鞅与Banach空间几何学

刘培德 著

概率论与Banach空间理论的相互渗透结合不仅使有关的经典理论大为改观而且引出一系列新的研究课题和研究方向，它们与现代数学的多种分支有着深刻的联系。

武汉大学学术丛书
WUHANUNIVERSITY ACADEMICLIBRARY 武汉大学出版社

鞅与Banach空间几何学

刘培德 著

国家自然科学基金
国家教委博士点基金 资助课题

武汉大学出版社

~~1993年 武汉~~

内 容 简 介

本书是关于取值于 Banach 空间的鞅与 Banach 空间几何理论的专著，全书包含 9 章和两个附录，在介绍了向量测度与积分以及 B 值鞅的基本性质等基础知识以后，书中一方面叙述鞅型序列的极限理论，独立增量鞅的大数定律，中心极限定理以及重对数律，鞅不等式，鞅变换等问题，另一方面则研究 Banach 空间中凸集的几何理论，Banach 空间的型和余型，局部理论，p 一致凸性和 q 一致光滑性，无条件鞅差序列性质等。整个叙述过程中随机过程的概率性质与空间的几何性质是有机结合在一起的。在这一过程中所得出的一系列结果在现代概率与分析的多种领域都有重要意义。本书可供概率论、泛函分析专业的研究生、大学生以及有关的数学工作者用作教本或参考书。

(鄂) 新登字 09 号

鞅与 Banach 空间几何学

© 刘培德 著

*

武汉大学出版社出版发行

(430072 武昌 珞珈山)

湖北省京山县印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 18.875 印张 485 字

1993 年 12 月第 1 版 1993 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—1000 (内含精装 200 册)

ISBN 7－307－01603－6/O・141 (平)

ISBN 7－307－01604－4/O・142 (精)

定价：17.30 元 (平)
22.80 元 (精)

前　　言

本书讲述的是近一、二十年发展起来的，由概率论、泛函分析，调和分析等相互渗透而产生的一个新的学科分支.

概率论与抽象空间的结合可以追溯到现代概率论确立的早期. Kolmogorov 1935 年就曾研究过 Banach 空间值随机变量的特征泛函，至于对 Banach 空间值随机序列的大数定律的研究(Mouvier，1953)也有了四十年的历史，但是将随机变量或随机过程的概率性质与在其中取值的抽象空间的结构或几何性质有机结合起来的研究还是近年来的事.

鞅与 Banach 空间几何学的发展是有其内在原因的. 事实上 1966 年 Rieffel 定义了 Banach 空间的一个几何概念——可凹性，后来证明了可凹性与 Radon-Nikodym 性质是等价的；证明这一重要结论的工具就是鞅. 这是一个典型的例子. 鞅论在 Banach 空间几何理论方面成功的应用显示了 B 值鞅理论有着不同于实值鞅的独立的价值. 自此以后，B 值随机过程的概率性质与 Banach 空间的几何性质之间相互依存、制约的关系成了人们关注的一个中心. 国际上一些著名的概率学家和分析学家率先开展研究，以此为内容的国际学术会议不断召开，至今已有了累累硕果. 举若干重要的，如 Edgar 证明了 Banach 空间中凸集的 Radon-Nikodym 性质与 Choquet 端点表现等价；Hoffmann-Jϕrgensen 与 Pisier 证明了 Banach 空间的 p 型与在其中取值的独立增量鞅满足大数定律等价；Enflo 与 Pisier 证明了超自反空间具有等价一致凸范数；Burkholder 证明了 ξ 凸性与好鞅性质等价；Burkholder 与 Bourgain 证明了向量值函数空间上 Hilbert 变换的有界性与无条件鞅差序列性质等价；等等. 它们在概率和分析中都有着重要的作用. 值得注意的是这些定理或者直接以鞅为对象或者以鞅为工具.

鞅方法在这一理论发展过程中成为具有系统性和最为有力的方法. 其实这也并不奇怪,因为鞅本身就是一种特殊的平均过程.

Banach 空间几何学通过 B 值鞅与调和分析的联系是本书内容的另一个侧面. 经典调和分析与鞅论的结合产生了一个富有特色的分支——H_p 鞅论,近二,三十年这一分支得到迅速的发展并且在这方面已经有了很好的总结. 与此同时,B 值鞅的相应理论也在发展. Pisier 关于一致凸空间值鞅的不等式就是一个很好的例子,Herz 还具体考虑了 B 值鞅的空间. 近年来一个富有 Banach 空间特色的 B 值鞅空间理论展示了丰富的内容,其中的鞅不等式与鞅空间的相互嵌入关系都与 Banach 空间的几何性质有着密不可分的联系. Burkholder 关于 B 值鞅变换理论的工作是另一个突出例子,这一工作直接导出了一类新的 Banach 空间——具有无条件鞅差序列性质(UMD)的空间. 事实证明它和向量值调和分析,特别是奇异积分算子理论密切相关. 有关工作引起了广泛重视,其研究兴趣方兴未艾.

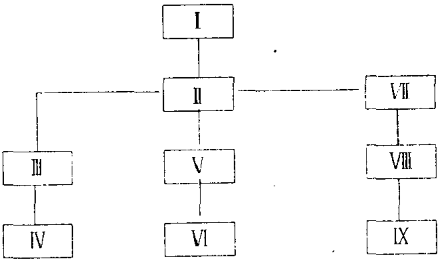
以上事实也说明了与多种学科的广泛联系是这一分支的一个特色. 概率论中的随机过程理论,极限理论,Banach 空间的局部理论,算子理论,逼近论,调和分析中的奇异积分算子理论,内插与外插空间理论,向量值解析函数的 Hardy 空间,微分方程边值问题等都与之有程度不同的联系. 可以说,多种学科理论发展的需要促进了这一分支的发展.

本书希望就这一理论的基本思想方法作一概括的介绍. 全书包括 9 章正文和两个附录:章 Ⅰ 作为预备知识,叙述向量测度与向量值函数的积分;章 Ⅱ 是鞅与 Radon-Nikodym 性质,介绍鞅的基本性质及其收敛定理;章 Ⅲ 是讨论以渐近鞅和一致渐近鞅为代表的某些鞅型序列的性质;章 Ⅳ 为 Banach 空间中凸集的几何理论,叙述可凹性,端点与暴露点表现定理,树与加权树等几何概念与 Radon-Nikodym 性质的关系;章 Ⅴ 主要是 Banach 空间的型与独立增量过程的极限理论;章 Ⅵ 介绍 Banach 空间的局部理论,叙述

并证明著名的 Dvoretzky 定理，K 凸性与 l_p^n 的一致包含，n 维空间与 Euclid 空间的逼近程度以及弱型空间等；章Ⅶ是超自反空间的各种性质，介绍 Enflo 与 Pisier 的等价赋范定理，基本鞅不等式和 p 一致光滑空间的鞅收敛定理和大数定律；章Ⅷ系统讨论 B 值鞅不等式与 B 值鞅空间. 关于 p 均方函数 $S^{(p)}(f)$ 的不等式把鞅空间理论与 Banach 空间的几何性质紧密联系起来；章Ⅸ叙述由 Burkholder 等人建立起来的 UMD 空间理论，鞅变换不等式与 ξ 凸性的等价关系以及在向量值调和分析，奇异积分算子理论中的应用.

我们假定读者具有概率论和泛函分析两方面的基础知识，为了提供两方面读者阅读的方便，书末给出了两个附录：一个是关于一般拓扑空间的网和渗透的，一个是关于独立性和条件独立性的. 当然如果读者具备一般随机过程和泛函分析基础的知识，则阅读全书将更为便利.

本书内容安排是相对集中的，因此并非对全书内容都有兴趣的读者可作适当选择. 下图提供了一种可行的选择：大体说来，Ⅰ，Ⅱ两章是全书的基础. 然后自左至右，第一路线适宜于对鞅型序列的极限理论和凸集几何理论有兴趣的读者. 中间一条路线适宜于对独立增量过程的极限理论以及 Banach 空间的型与局部理论有兴趣的读者. 右面一条路线适宜于对鞅空间，向量值调和分析有兴趣的读者.



在我从事有关课题的研究和撰写本书过程中曾得到国内外诸

多专家同行的支持和帮助，借此机会我向他们表示深切感谢！美国Bukholder教授，林伯禄教授，西班牙Blasco教授都给予作者热诚的鼓励，有的还寄来大量前沿性的文献资料. 波兰Pelczynski教授，美国Gassaza教授，林培基教授来华讲学期间关于一些内容的演讲和交流使我深受启发. 王梓坤教授的多次鼓励，龙瑞麟研究员许多热忱无私的帮助使作者受益匪浅. 与龙先生的合作给作者留下美好的回忆. 李国平教授多年来给我以关心和指教，胡迪鹤教授很早就支持作者的工作，本书部分内容分别在他们各自主持的讨论班上讲述过. 另外，一些博士生，硕士生和青年教师在听课过程中提出过宝贵意见并在本书出版过程中给予热情协助，在此一并致谢！

最后，本书从1989年开始写起，中途夫人沉疴，为照料病人曾一度辍笔，以后边讲边写为研究生开课. 年内夫人大愈且又负弱操持为我腾出不少时间使得此书能赶在武汉大学校庆100周年前夕出版. 故本书既是拖沓所致又是急就而成. 我感谢校学术委员会将其列为武汉大学学术丛书，也感谢出版社诸多同志的热情相助. 但由于作者水平有限，谬误之处在所难免，加上时断时续，章节之间衔接照应会有不周之处，诚望读者批评指正.

著　者

1993年6月

于武昌珞珈山

目　录

前言 …………………………………………………………… (Ⅰ)

Ⅰ. 向量测度与积分 ………………………………………… (1)

§1　向量测度 ………………………………………… (1)

§2　可数可加测度的性质 …………………………… (12)

§3　可测函数 ………………………………………… (23)

§4　Bochner 积分 ……………………………………… (28)

§5　Pettis 积分 ……………………………………… (40)

Ⅱ. 鞅与 Rodon-Nikodym 性质 ……………………………… (50)

§1　条件期望 ………………………………………… (50)

§2　鞅及其收敛定理 ………………………………… (58)

§3　停时与鞅 ………………………………………… (73)

§4　实值下鞅的应用 ………………………………… (77)

Ⅲ. 渐近鞅及其它鞅型序列 ………………………………… (91)

§1　渐近鞅 …………………………………………… (91)

§2　一致渐近鞅与有限维空间 ……………………… (102)

§3　鞅型序列的收敛定理 …………………………… (112)

§4　Pettis 可积鞅与渐近鞅 ………………………… (119)

Ⅳ. 凸集的几何理论 ………………………………………… (133)

§1　可凹性 …………………………………………… (133)

§2　暴露点与端点表现 ……………………………… (144)

§3　共轭空间中的凸集 ……………………………… (160)

§4　Asplund 空间、树与加权树 ……………………… (171)

Ⅴ. Banach 空间的型 …………………………………… (183)

§1 Rademacher p 型和 q 余型 …………………… (183)
§2 独立增量鞅 …………………………………… (197)
§3 p 型空间中独立 R.V. 序列的大数定律 ……… (215)
§4 中心极限定理与重对数律 …………………… (229)
§5 Gauss p 型、Kwapien 定理 …………………… (249)
§6 p 绝对可和算子 ……………………………… (263)

Ⅵ. 局部理论简介 …………………………………… (279)

§1 等周不等式与 Dvoretzky 定理 ……………… (279)
§2 K 凸性与一致包含 l_p^n ……………………… (293)
§3 有限维空间的几乎 Euclid 部分 …………… (309)
§4 弱型与弱 Hilbert 空间 ……………………… (322)

Ⅶ. 超自反空间 ……………………………………… (336)

§1 凸性模与光滑模 ……………………………… (336)
§2 超自反空间与重赋范定理 …………………… (352)
§3 p 光滑空间值鞅的大数定律 ……………… (364)
§4 有限树、J 凸性与超幂空间 ……………… (374)

Ⅷ. B 值鞅不等式与鞅空间 ……………………… (395)

§1 预备知识、若干引理…………………………… (395)
§2 凸 Φ 函数不等式 ……………………………… (403)
§3 鞅空间 ………………………………………… (416)
§4 鞅空间上若干算子的有界性 ………………… (429)
§5 上下函数不等式与微分从属 ………………… (440)
§6 Fefferman 不等式与 ${}_p\widetilde{H}_a$ 的共轭 …………… (452)
§7 正规鞅的一般 Φ 不等式 ……………………… (464)
§8 加权与内插 …………………………………… (473)

Ⅸ. **UMD 空间及其应用** …………………………… (490)

§1 好鞅变换性质 …………………………… (491)

§2 ξ凸性 …………………………… (502)

§3 UMD 空间的若干性质 …………………………… (513)

§4 奇异积分算子的有界性 …………………………… (524)

§5 经典分析与鞅论中不等式的最优系数 ………… (535)

附录 1 网与渗透 …………………………… (555)

附录 2 独立性与条件独立性 …………………………… (561)

参考文献…………………………… (569)

索引…………………………… (591)

I. 向量测度和积分

本书所叙述的内容与测度和积分有着紧密的联系. 作为今后各章的预备知识,较为系统地熟悉有关向量测度和积分的知识是十分必要的. 实际上,无论是向量测度或者是向量值函数的积分,在理论上或者在应用上,它们都有着各自独立的意义. 我们将从最基本的向量测度的定义开始,然后讨论它的有界性,连续性以及延拓定理,分解定理. 对于向量值函数我们将讨论可测性和两大类积分,即 Bochner 积分和 Pettis 积分. 同时还初步讨论 RN 性质.

§1 向量测度

定义 1 设 Ω 是一个点集,$\mathscr{F}$ 是由 Ω 的某些子集构成的集族. $\mathscr{F}$ 称为 Ω 上的一个代数(algebra)或域(field):若

(i) $\Omega\in\mathscr{F}$,

(ii) 当 $A\in\mathscr{F}$ 时,$A^c\triangleq\Omega\backslash A\in\mathscr{F}$,

(iii) 当 A、$B\in\mathscr{F}$ 时,$A\cup B\in\mathscr{F}$.

$\mathscr{F}$ 称为一个 σ 代数(σ-algebra):若代替(iii)成立

(iii)′ 当 $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$时,$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

容易验证,同一点集上任意多个代数(σ 代数)之交仍为代数(σ 代数),当 $\mathscr{F}_n$ 是一列单调增加代数(σ 代数)时,$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 是一个代数.

定义 2 设 $\mathscr{F}$ 是由 Ω 的子集构成的集族,Ω 上包含 $\mathscr{F}$ 的一切 σ 代数之交构成的 σ 代数称为由 $\mathscr{F}$ 生成的 σ 代数(genarated

σ-algebra)，记为 $\sigma(\mathscr{F})$. 若 $\{\mathscr{F}_n, n\geq 1\}$ 是 σ 代数族，通常以 $\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 表示由 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 生成的 σ 代数.

显然若 Σ 是 Ω 上的 σ 代数，$\mathscr{F}\subset\Sigma$ 是某个集族，则 $\sigma(\mathscr{F})\subset\Sigma$. 若 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$，$\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2$ 均为集族，则 $\sigma(\mathscr{F}_1)\subset\sigma(\mathscr{F}_2)$. 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 的任一集族，Ω_0 是 Ω 的子集，则 $\sigma(\mathscr{F}\cap\Omega_0)=\sigma(\mathscr{F})\cap\Omega_0$，其中 $\mathscr{F}\cap\Omega_0$ 表示 $\mathscr{F}$ 中的每一元与 Ω_0 的交.

定义 3 设 $\mathscr{F}$ 是点集 Ω 上的代数，X 是 Banach 空间. 在 $\mathscr{F}$ 上定义的函数 $F:\mathscr{F}\to X$ 称为一个向量测度(vector measure)：若对于任何 $E_1,E_2\in\mathscr{F}$，$E_1\cap E_2=\varnothing$，则

$$F(E_1\cup E_2)=F(E_1)+F(E_2).$$

容易验证，向量测度具有下面性质：(i) $F(\varnothing)=0$，(ii) 若 $A\subset B$，$A,B\in\mathscr{F}$，则 $F(B\backslash A)=F(B)-F(A)$，(iii) 若 $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots,k)$，$A_n$ 互不相交，则 $F(\bigcup_{n=1}^{k}A_n)=\sum_{n=1}^{k}F(A_n)$.

例 1 设 $\mathscr{F}$ 是[0,1]上的 Borel 可测集全体，$T:L_\infty[0,1]\to X$ 是线性算子，定义 $F:\mathscr{F}\to X$，$F(E)=T(\chi_E)$，$\forall\, E\in\mathscr{F}$，其中 χ_E 是 E 的特征函数(index function). 容易验证 F 是一个向量测度.

设 $\mathscr{F}$ 是点集 Ω 上的代数，$E\in\mathscr{F}$，E 的子集族 $\pi=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 称为 E 到 $\mathscr{F}$ 的一个有限分划(或简单地，分划 partition)，若 $A_i\in\mathscr{F}$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$ 并且 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=E$.

定义 4 设 $F:\mathscr{F}\to X$ 是向量测度，X^* 是 X 的**共轭**(dual).

(i) 称 $\|F\|(E)=\sup_{\pi}\sum_{A\in\pi}\|F(A)\|$ 是 F 在 E 上的**变差**，其中 sup 遍历从 E 到 $\mathscr{F}$ 的所有有限分划. 若 $\|F\|(\Omega)<\infty$，则称 F 在 $\mathscr{F}$ 上是有界变差的(bounded variation).

(ii) 称 $|F|(E)=\sup_{\|x^*\|\leq 1}\|x^*F\|(E)$ 是 F 在 E 上的半变差. 若 $|F|(\Omega)<\infty$，则称 F 在 $\mathscr{F}$ 上有**有界半变差**(bounded semivariation).

根据定义可直接验证，对于代数 $\mathscr{F}$ 上定义的向量测度 F，$\|F\|$ 与 $|F|$ 都是 $\mathscr{F}$ 上的实值非负测度并且对于 $\forall\ E\in\mathscr{F}$，$|F|(E)\leqslant\|F\|(E)$.

定义 5 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的代数，$F:\mathscr{F}\to X$ 是向量测度，X^* 是 X 的共轭.

(i) 称 F 在 $\mathscr{F}$ 上是有界的：若 $\sup\limits_{E\in\mathscr{F}}\|F(E)\|<\infty$.

(ii) 称 F 在 $\mathscr{F}$ 上是**可数可加的**(countably additive)：若对于任何 $A_n\in\mathscr{F}(n\geqslant 1)$，$A_n$ 互不相交，只要 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$，就有

$$F\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}F(A_n),$$

其中右端的级数是依 X 的范数收敛的. 不是可数可加的测度称为是**纯有限可加的**(purely finitely additive).

(iii) 称 F 是在 $\mathscr{F}$ 上**弱可数可加的**(weakly countably additive)：若对于每个 $x^*\in X^*$，x^*F 在 $\mathscr{F}$ 上是可数可加的.

(iv) 称 F 是在 $\mathscr{F}$ 上**强可加的**(strongly additive)：若对于任意 $A_n\in\mathscr{F}(n\geqslant 1)$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则以 X 的范数 $\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n)=0$.

例 2 设 $T:L_1[0,1]\to X$ 是有界线性算子，$\mathscr{F}$ 是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 可测集全体，μ 是 Lebesgue 测度. 定义 $F:\mathscr{F}\to X$，$F(E)=T(\chi_E)$，则

$$\|F(A)\|=\|T(\chi_A)\|\leqslant\|T\|\mu(A),$$

$$\|F\|(\Omega)\leqslant\|T\|\sup_{\pi}\sum_{A\in\pi}\mu(A)=\|T\|\mu(\Omega);$$

F 是有界的.

例 3 强可加测度未必是有界变差的. 仍考虑 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 可测集全体 $\mathscr{F}$ 和 Lebesgue 测度 μ，定义 $F:\mathscr{F}\to L_p[0,1]$，$F(A)=\chi_A$，$\forall\ A\in\mathscr{F}$，其中 $1<p<\infty$.

对于互不相交的集合序列 $A_n\in\mathscr{F}(n\geqslant 1)$，由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\mu(\Omega)<\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\|F(A_n)\|=\lim_{n\to\infty}\|\chi_{A_n}\|_p=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)^{1/p}=0,$$

这说明 F 的强可加性.

但对于任何 $E\in\mathscr{F}$, $\mu(E)>0$, 若取分划 $\pi=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 使得 $\mu(A_i)=\mu(E)/n(1\leqslant i\leqslant n)$, 则

$$\|F\|(E)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\|F(A_i)\|=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)^{1/p}=n^{1-1/p}\mu(E)^{1/p},$$

故有 $\|F\|(E)=\infty$.

定理 1 设 $F:\mathscr{F}\to X$ 是向量测度, 则下列条件等价:

(i) F 在 $\mathscr{F}$ 上强可加.

(ii) 对于任何单调增加序列 $A_n\in\mathscr{F}$, $A_n\subset A_{n+1}(n\geqslant 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n)$ 存在.

(iii) 对于任何单调减少序列 $A_n\in\mathscr{F}$, $A_n\supset A_{n+1}(n\geqslant 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n)$ 存在.

证明 (i)⇒(ii) 若(ii)不成立, 则存在 $\mathscr{F}$ 中的单调增加序列 A_n, $\lim\limits_{n\to\infty}\|F(A_n)\|$ 不存在. 不妨设

$$r=\limsup_{n\to\infty}\|F(A_n)\|>\liminf_{n\to\infty}\|F(A_n)\|=s,$$

不失一般性, 有 A_n 的子序列 $A_{n_1}\subset A_{n_2}\subset\cdots\subset A_{n_{2k-1}}\subset A_{n_{2k}}\subset\cdots$ 使得

$$s=\lim_{k\to\infty}\|F(A_{n_{2k-1}})\|,\quad r=\lim_{k\to\infty}\|F(A_{n_{2k}})\|,$$

显然, $B_k=A_{n_{2k}}\setminus A_{n_{2k-1}}$ 是 $\mathscr{F}$ 中互不相交的序列并且

$$\lim_{k\to\infty}\|F(B_k)\|\geqslant\lim_{k\to\infty}(\|F(A_{n_{2k}})\|-\|F(A_{n_{2k-1}})\|)$$
$$\geqslant r-s>0.$$

F 不是强可加的.

(ii)⟺(iii) 对于 $\mathscr{F}$ 中的序列 $A_n(n\geqslant 1)$, $\{A_n\}$ 是增加的当

且仅当$\{A_n^c\}$是递减的. 由于$F(A_n^c)=F(\Omega)-F(A_n)$,故极限$\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n^c)$与$\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n)$同时存在.

(ii)⇒(i) 设$\{A_n\}$是$\mathscr{F}$中的互不相交序列,则$B_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$是递增的,若$\lim\limits_{n\to\infty}F(B_n)$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}F(B_n)-\lim\limits_{n\to\infty}F(B_{n-1})=0$. F是强可加的.

定理 2 设$\mathscr{F}$是代数,$F:\mathscr{F}\to X$是向量测度,则下述条件

(i) F是有界变差的,(ii) F是强可加的,(iii) F有界,具有关系(i)⇒(ii)⇒(iii).

证明 (i)⇒(ii) 若$A_n\in\mathscr{F}$,$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$,记$B_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,则$\sum\limits_{i=1}^{n}\|F(A_i)\|\leqslant\|F\|(B_n)\leqslant\|F\|(\Omega)<\infty$. 于是

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|F(A_i)\|<\infty,\ \lim_{n\to\infty}\|F(A_n)\|=0.$$

(ii)⇒(iii) 对于任意$x^*\in X^*$,$E\in\mathscr{F}$,显然$\|x^*F\|(E)\geqslant|x^*F(E)|$. 从而

$$|F|(E)=\sup_{\|x^*\|\leqslant1}\|x^*F\|(E)\geqslant\sup_{\|x^*\|\leqslant1}|x^*F(E)|=\|F(E)\|.$$

若F在$\mathscr{F}$上不是有界的,则$|F|(\Omega)=\infty$. 取$E_1\in\mathscr{F}$,使得$\|F(E_1)\|\geqslant1+\|F(\Omega)\|$,此时有$\|F(\Omega\backslash E_1)\|\geqslant\|F(E_1)\|-\|F(\Omega)\|\geqslant1$. 由于$|F|(\Omega)\leqslant|F|(E_1)+|F|(\Omega\backslash E_1)$. $|F|(E_1)$与$|F|(\Omega\backslash E_1)$中必有一个为$\infty$,记此集合为$A_1$,则$|F|(A_1)=\infty$,$\|F(A_1)\|\geqslant1$. 由同样的方法确定$A_2\subset A_1$使得$|F|(A_2)=\infty$,$\|F(A_2)\|\geqslant2$,…,如此归纳地得到$A_n\in\mathscr{F}(n\geqslant1)$,$A_{n+1}\subset A_n$并且$|F|(A_n)=\infty$,$\|F(A_n)\|\geqslant n$. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}F(A_n)$不存在. F不是强可加的.

定理 3 设$F:\mathscr{F}\to X$是向量测度,$E\in\mathscr{F}$.

(i) $|F|(E)=\sup\limits_{\pi}\|\sum\limits_{A_i\in\pi}\varepsilon_iF(A_i)\|$,其中$\pi$是任一从$E$到$\mathscr{F}$的有限分划,$\varepsilon_i$是标量,$|\varepsilon_i|\leqslant1(1\leqslant i\leqslant n)$.

(ii) $\sup\{\|F(A)\|, A\subset E, A\in\mathscr{F}\}\leqslant|F|(E)$

$$\leqslant 2\sup\{\|F(A)\|, A\subset E, A\in\mathscr{F}\}. \tag{1.1}$$

(iii) F 在 $\mathscr{F}$ 上是有界半变差的当且仅当 F 是有界的.

证明 1° 对于分划 $\pi=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 和 ε_i, $|\varepsilon_i|\leqslant 1(1\leqslant i\leqslant n)$, 若 $x^*\in X^*$, $\|x^*\|\leqslant 1$, 则

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i F(A_i)\| &= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}|x^*\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i F(A_i)|\\ &\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i x^* F(A_i)|\\ &\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^{n}|x^* F(A_i)|\\ &\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\|x^*F\|(E)=|F|(E).\end{aligned}$$

由 π 和 ε_n 的任意性 $\sup_{\pi}\|\sum_{A_i\in\pi}\varepsilon_i F(A_i)\|\leqslant|F|(E)$.

反之,对于分划 π 和 $\|x^*\|\leqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|x^*F(A_i)| &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{sign}\,x^*F(A_i)\cdot x^*F(A_i)\\ &= |x^*(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sign}\,x^*F(A_i)\cdot F(A_i))|\\ &\leqslant \|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i F(A_i)\|.\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_i=\mathrm{sign}\,x^*F(A_i)$, 自然地, $|\varepsilon_i|\leqslant 1(1\leqslant i\leqslant n)$. 于是

$$\begin{aligned}|F|(E) &= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\|x^*F\|(E)\\ &\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^{n}|x^*F(A_i)|\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i F(A_i)\|.\end{aligned}$$

2° 当 $A\subset E$ 时, $\|F(A)\|\leqslant|F|(A)\leqslant|F|(E)$, 由此得到

$$\sup\{\|F(A)\|, A\subset E, A\in\mathscr{F}\}\leqslant|F|(E).$$

为证另一半不等式,设 $\pi=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 为 E 到 $\mathscr{F}$ 的分划,当 X 是实空间时,记 $\pi^+=\{A_i, A_i\in\pi, x^*F(A_i)\geqslant 0\}$, $\pi^-=\{A_i, A_i\in\pi, x^*F(A_i)<0\}$, 则

$$\sum_{A_i\in\pi}|x^*F(A_i)| = \sum_{A_i\in\pi^+} x^*F(A_i) - \sum_{A_i\in\pi^-} x^*F(A_i)$$

$$= x^*F(\bigcup_{A_i\in\pi^+} A_i) - x^*F(\bigcup_{A_i\in\pi^-} A_i)$$

$$\leqslant 2\sup\{\|F(A)\|, A\subset E, A\in\mathscr{F}\}.$$

(当 X 为复空间时，分开实部和虚部，将系数 2 换为 4).

3° 由 2° 知论断成立.

由定义知，每个可数可加测度是弱可数可加的，若 $\mathscr{F}$ 是 σ 代数，则可数可加测度又是强可加的. 实际上下面结论成立.

定理 4 设 Σ 是 σ 代数，则 Σ 上的每个有界变差向量测度 F 是可数可加的，甚至 $\|F\|$ 也是可数可加的.

证明 设 $A_n\in\Sigma$，A_n 互不相交，此时 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\Sigma$. 于是

$$\sum_{n=1}^{k}\|F(A_n)\| \leqslant \|F\|(\bigcup_{n=1}^{k}A_n) \leqslant \|F\|(\Omega) < \infty \quad (1.2)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\|F(A_n)\|$ 是收敛的. 现在

$$\|F(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) - \sum_{n=1}^{k}F(A_n)\| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty}\|F(A_n)\| \to 0$$

$(k\to\infty)$，所以 $F(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}F(A_n)$.

设 π 是 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 到 Σ 的分划，则 $\pi\cap A_n$ 是 A_n 到 Σ 的分划. 由于

$$\sum_{A\in\pi}\|F(A)\| = \sum_{A\in\pi}\|\sum_{n=1}^{\infty}F(A\cap A_n)\|$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{A\in\pi}\|F(A\cap A_n)\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|F\|(A_n),$$

所以 $\|F\|(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|F\|(A_n)$. 另一方面，由 $\|F\|$ 的有限可加性，对于 $\forall\, n\in N$，

$$\sum_{i=1}^{n}\|F\|(A_i) = \|F\|(\sum_{i=1}^{n}A_i) \leqslant \|F\|(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n).$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\|F\|(A_n)\leqslant\|F\|(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$. 总之等号成立.

定理 5 (Orlicz-Pettis)　设 Σ 是 σ 代数，则 Σ 上的每个弱可数可加向量测度是可数可加的.

若 $A_n\in\Sigma$，A_n 互不相交，F 的可数可加性意味着 $\sum_{n=1}^{\infty}F(A_n)$ 的每个子级数都收敛. 此时称 $\sum_{n=1}^{\infty}F(A_n)$ 是无条件收敛的. 对于弱可数可加性，类似的叙述关于弱拓扑成立，此时称原级数是 w 无条件收敛的. 所以为了得到定理的结论，只须证明 Banach 空间中的每个 w 无条件收敛级数是无条件收敛的.

证明　1°　对于 w 无条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$，若 $x^*\in X^*$，记 $N^+=\{n,x^*x_n\geqslant 0\}$，$N^-=N\backslash N^+$ (N 是自然数全体)，则

$$\sum_{n\in N^+}x^*x_n,\quad \sum_{n\in N^-}x^*x_n$$

均收敛. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*x_n|<\infty.\quad (\forall\ x^*\in X^*),\tag{1.3}$$

2°　记 D 是由 $\{x_n\}$ 张成的 X 的闭子空间，D^* 是其共轭. 由于 D^* 是 w^* 紧的，对于任一序列 $x_k^*\in D^*$，$\|x_k^*\|\leqslant 1$，必要时过渡到子序列，不妨假定 $x_k^*\xrightarrow{w^*}x_0^*\in D^*$. 记 $y_k^*=x_k^*-x_0^*$，由 1° 知道 $\alpha_k=(y_k^*(x_n))\in l_1$，现在证明 $\|\alpha_k\|_1\to 0(k\to\infty)$. 由于 l_1 空间的 Schur 性质，只须证明 $\alpha_k\xrightarrow{w}0$.

设 $a=(a_n)\in l_\infty$，其中 a_n 仅取 0，1，－1 值，全体这种点的线性组合在 l_∞ 中稠密. 现在固定其中一个，由 w 无条件收敛性，对于 $\forall\ x^*\in X^*$，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^*(x_n)&=\sum_{a_n=1}x^*(x_n)-\sum_{a_n=-1}x^*(x_n)\\&=x^*(x^+)-x^*(x^-)=x^*(x_0)\end{aligned}$$

这说明 $\sum_{n=1}^{k} a_n x_n \xrightarrow{w} x_0$，故 $x_0 \in D$. 由 Hahn-Banach 定理，此式对于 D^* 中每一元成立(x_0 与 a 的选取有关). 由上面提到的稠密性，对于 l_∞ 中任一元，同样的式子成立. 特别地

$$a(\alpha_k^*) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_k^*(x_n) = y_k^*(x_0)$$
$$= x_k^*(x_0) - x_0^*(x_0) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

所以 $\alpha_k \xrightarrow{w} 0$.

3° 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，存在 n_0 使得

$$\sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \sum_{n=n_0}^{\infty} |x^* x_n| < \varepsilon.$$

若不然，有 $x_k^* \in X^*$，$\|x_k^*\| \leqslant 1$，数列 $n_k \in N$，$n_k \uparrow \infty$ 以及 $\delta > 0$ 使得 $\sum_{n=n_k}^{\infty} |x_k^*(x_n)| \geqslant \delta$. 不失一般性，视 x_k^* 为 D^* 中元，从而 $x_0^* \in D^*$，$x_k^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$. 注意到(1.3)对于 x_0^* 成立，从而至少对于充分大的 n_k，

$$\sum_{n=n_k}^{\infty} |x_k^*(x_n) - x_0^*(x_n)| \geqslant \sum_{n=n_k}^{\infty} |x_k^*(x_n)| - \sum_{n=n_k}^{\infty} |x_0^*(x_n)| \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

这与 $\|\alpha_k\|_1 \to 0(k \to \infty)$ 矛盾. 实际上有

$$\sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty$$

并且 $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$.

4° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 不是无条件收敛的，则存在某个子级数不收敛，通过插入括号的方法可得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 使得 $\limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \geqslant \delta$. 但 w 无条件收敛级数的每个子级数及其有限线性组合仍是 w 无条件收敛的. 由上述证明 $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 0$，矛盾. 定理证毕.

设 $\mathscr{F}$ 是在点集 Ω 上的代数，X 是 Banach 空间. 以 $ba(\mathscr{F}, X)$

表示定义在 $\mathscr{F}$ 上取值于 X 的有界向量测度全体. 容易验证半变差是 $ba(\mathscr{F},X)$ 上的范数,它使得 $ba(\mathscr{F},X)$ 成为 Banach 空间. 此外由定理 3(ii), $\|F\|(\Omega)=\sup\{\|F(A)\|;A\in\mathscr{F}\}$ 是与之等价的范数.

以 $sa(\mathscr{F},X)$, $ca(\mathscr{F},X)$ 分别表示代数 $\mathscr{F}$ 上强可加和可数可加的向量测度全体. 二者都是 $ba(\mathscr{F},X)$ 的闭线性子空间.

若以 $bva(\mathscr{F},X)$ 记 $\mathscr{F}$ 上有界变差向量测度全体,则 $\|\cdot\|$ 是 $bva(\mathscr{F},X)$ 上的范数,它使 $bva(\mathscr{F},X)$ 成为 Banach 空间. 特别地,以 $bvca(\mathscr{F},X)$ 记 $\mathscr{F}$ 上有界变差可数可加向量测度全体,则 $bvca(\mathscr{F},X)$ 是 $bva(\mathscr{F},X)$ 的闭线性子空间.

如果空间 X 是有限维的,半变差和变差就是等价的. 为此我们先叙述一个引理. 首先有界线性算子 $T:X\to Y$ 称为是绝对可和算子(absolutely summing operator):若 T 将 X 中的每个可和序列映射为 Y 中的绝对可和序列.

引理 有界线性算子 $T:X\to Y$ 是绝对可和的当且仅当对于任何 $n\in N$ 和 $x_1,\cdots,x_n\in X$,

$$\sum_{i=1}^{n}\|Tx_i\|\leqslant K\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^{n}|x^*x_i|,\tag{1.4}$$

其中 K 是与 n 和 $x_1,\cdots,x_n$ 无关的常数.

证明 若(1.4)成立,$\{x_n,n\in N\}$ 是 X 中的可和序列,即

$$\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{n=1}^{\infty}|x^*x_n|<\infty,\tag{1.5}$$

则对于 $\forall\, n\in N$,

$$\sum_{i=1}^{n}\|Tx_i\|\leqslant K\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^{n}|x^*x_i|\leqslant K\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}|x^*x_i|<\infty,$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\|Tx_n\|<\infty$,$T$ 绝对可和.

反之,设 T 是绝对可和的,若(1.4)不成立,则存在 $x_1^{(n)},\cdots,x_{n_k}^{(n)}\in X$ 使得

$$\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{i=1}^{n_k}|x^*x_i^{(n)}|\leqslant 1,\text{但}\sum_{i=1}^{n_k}\|Tx_i^{(n)}\|\geqslant 2^n\quad(n\in N).$$

考虑序列$\{2^{-n}x_i^{(n)},i=1,\cdots,n_k,n=1,2,\cdots\}$，由

$$\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_k}|x^*(2^{-n}x_i^{(n)})|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\leqslant 1,$$

此序列是可和的. 但由于$\sum_{i=1}^{n_k}\|T(2^{-n}x_i^{(n)})\|\geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_k}\|T(2^{-n}x_i^{(n)})\|=\infty,$$

T 不是绝对可和的. 矛盾.

定理 6 设 X 是Banach空间，则 X 是有限维的当且仅当对于任一代数 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}$ 上的向量测度 $F:\mathscr{F}\to X$，当 F 是半变差有界时，F 是有界变差的，并且此时有 $\|F\|(\Omega)=|F|(\Omega)$.

证明 我们应用 Dvoretzky-Rogers 定理证明这一结论. 该定理断定 X 是有限维的当且仅当 X 上的恒等映射 $I:X\to X$ 是绝对可和的并且(1.4) 中最小的 $K\triangleq\|I\|_{as}=1$. (证明见 V. §6).

1° 设 X 是有限维的. 若 π 是 Ω 到 $\mathscr{F}$ 的分划: $\pi=\{A_1,\cdots,A_n\}$,

$$\begin{aligned}\sum_{A_i\in\pi}\|F(A_i)\|&=\sum_{A_i\in\pi}\|IF(A_i)\|\\&\leqslant\|I\|_{as}\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{A_i\in\pi}|x^*F(A_i)|\\&\leqslant\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\|x^*F\|(A_i)=|F|(\Omega).\end{aligned}$$

于是 $\|F\|(\Omega)\leqslant|F|(\Omega)$. 相反的不等式是显然的，必要性成立.

2° 若 X 不是有限维的，I 不是绝对可和的. 故存在序列$\{x_n,n\geqslant 1\}$，可和但不绝对可和. 考虑$(0,1]$上的代数 $\mathscr{F}$. $\mathscr{F}$ 由集合 $A_n=(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}],n\in N$ 生成. 显然，$F:\mathscr{F}\to X,F(A_n)=x_n$ 是一个向量测度. 由可和性,

$$|F|(\Omega)=\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sup_{n\in N}\sum_{i=1}^{n}|x^*F(A_n)|=\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}|x^*x_i|<\infty,$$

F 是半变差有界的. 但$\{x_n, n \in N\}$不是绝对可和的,

$$\|F\|(\Omega) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \|F(A_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \quad (\forall\, n \in N),$$

所以 $\|F\|(\Omega) = \infty$. 充分性得证.

§2 可数可加测度的性质

这一节我们讨论可数可加向量测度的有界性,连续性以及向量测度的延拓定理和分解定理.

一、有界性

定理 1(Nikodym) 设 Σ 是 σ 代数, $\{F_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是 Σ 上的 X 值有界向量测度族. 若对于每个 $E \in \Sigma$, $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \|F_\lambda(E)\| < \infty$, 则 $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} |F_\lambda|(\Omega) < \infty$.

证明 考虑标量测度族$\{x^* F_\lambda, \lambda \in \Lambda, x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1\}$. 容易知道若结论对于该测度族成立,则对原测度族自然成立. 对于新测度族我们仍记为$\{F_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$.

若结论不成立. 于是存在 $\lambda_n (n \geqslant 1)$ 使得

$$\sup_{n \in N} \sup_{E \in \Sigma} |F_{\lambda_n}(E)| = \infty.$$

为方便起见,记 $F_{\lambda_n} = F_n$. 取 n_1 和 $E_1 \in \Sigma$, 使

$$|F_{n_1}(E_1)| > 1 + \sup_{n \in N} |F_n(\Omega)|,$$

此时

$$\begin{aligned} |F_{n_1}(E_1^c)| &= |F_{n_1}(E_1) - F_{n_1}(\Omega)| \\ &\geqslant |F_{n_1}(E_1)| - |F_{n_1}(\Omega)| > 1. \end{aligned}$$

由于$\sup\limits_{n > n_1} \sup\limits_{E \in \Sigma} |F_n(E \cap E_1)|$ 与$\sup\limits_{n > n_1} \sup\limits_{E \in \Sigma} |F_n(E \cap E_1^c)|$ 中至少有一个为 ∞. E_1 与 E_1^c 中使上述值为 ∞ 的记为 S_1, 另一个为 T_1. 在 σ 代数 $E \cap S_1$ 上取 $n_2 > n_1$ 以及 $E_2 \in \Sigma \cap S_1$ 使

$$|F_{n_2}(E_2)| > 2 + |F_{n_1}(T_1)| + \sup_{n \in N} |F_n(S_1)|$$

此时有

$$|F_{n_2}(S_1\backslash E_2)| > |F_{n_2}(E_2) - F_{n_2}(S_1)| > 2 + |F_{n_1}(T_1)|.$$

类似地，可以取 $S_2, T_2 \in \Sigma \cap S_1$ 使得

$$|F_{n_2}(T_2) > 2 + |F_{n_1}(T_1)|, \sup_{n>n_2}\sup_{E\in\Sigma}|F_n(E \cap S_2)| = \infty.$$

一般地，在 σ 代数 $\Sigma \cap S_k$ 上，取 $n_{k+1} > n_k, S_{k+1}, T_{k+1} \in \Sigma \cap S_k$ 使得

$$|F_{n_{k+1}}(T_{k+1})| \geqslant k + 1 + \sum_{j=1}^{k}|F_{n_{k+1}}(T_j)|,$$

$$\sup_{n>n_{k+1}}\sup_{E\in\Sigma}|F_n(E \cap S_{k+1})| = \infty, \tag{2.1}$$

当 $i < j$ 时，$T_j \subset S_i \subset T_i^c$，故 $T_i \cap T_j = \varnothing$. 为简便计，记 $F_{n_k} = F_k$.

对于 F_1 和 $K \in N$，$\| F_1 \| (\bigcup_{k=1}^{K} T_k) \leqslant \| F_1 \| (\Omega)$，$K$ 是任意的，故 $\| F_1 \| (\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k) \leqslant \| F_1 \| (\Omega)$. 于是有 $\{T_k, k \geqslant 2\}$ 的子序列 $\{T_{k_i}\}$ 使得 $\| F_1 \| (\bigcup_{j=1}^{\infty} T_{k_j}) < 1$. 对于 F_{k_1} 类似地有 $\{T_{k_i}, i \geqslant 2\}$ 的子序列 $\{T_{k_{i_j}}\}$ 使得 $\| F_{k_1} \| (\bigcup_{j=1}^{\infty} T_{k_{i_j}}) < 1$，…… 记 $m_1 = 1, m_2 = n_1, m_3 = n_{k_1}, m_4 = n_{k_{i_1}}, \cdots$，则

$\| F_{m_k} \| (\bigcup_{i=k+1}^{\infty} T_{m_i}) < 1$. 令 $D = \bigcup_{j=1}^{\infty} T_{m_j}$，现在有

$$|F_{m_k}(D)| \geqslant |F_{m_k}(T_{m_k})| - |F_{m_k}(\bigcup_{i=1}^{k-1} T_{m_i})| - \| F_{m_k} \| (\bigcup_{i=k+1}^{\infty} T_{m_i})$$
$$\geqslant m_k - 1,$$

于是 $\sup_{n\in N}|F_n(D)| = \infty$. 与定理条件矛盾.

推论 1 σ 代数上每个 w 可数可加向量测度是有界的.

例 1 在一个代数上，Nikodym 有界性定理未必成立. 设 $\Omega = N \cup \{-N\} \cup \{0\}$. $\mathscr{F}$ 由 Ω 的有限子集及其余集组成. 设

$$\mu_n(E) = \begin{cases} n, & n \in E, -n \overline{\in} E, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

容易验证：1° $\mathscr{F}$ 是代数，μ_n 是 $\mathscr{F}$ 上的测度.

2° $|\mu_n(E)| \leqslant n, \forall E \in \mathscr{F}$，$\mu_n$ 是有界的.

3° 对于每个固定的 $E \in \mathscr{F}$，若 E 为有限集，记 $\bar{n} = \max\{|n|, n \in E\}$，则 $\sup\limits_{n \in N} |\mu_n(E)| = \bar{n}$. 若 E 的余集为有限集，记 $\bar{n} = \min\{|n|, n \overline{\in} E, -n \overline{\in} E\}$ 则 $\sup\limits_{n \in N} |\mu_n(E)| < \bar{n}$，故 $\sup\limits_{n \in N} |\mu_n(E)| < \infty, \forall E \in \mathscr{F}$.

4° 但易知 $\sup\limits_{n \in N} \sup\limits_{E \in \mathscr{F}} |\mu_n(E)| = \infty$.

二、连续性

定义 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的代数，$\mu: \mathscr{F} \to [0, \infty)$ 是非负实值有限测度，$F: \mathscr{F} \to X$ 是向量测度，称 F 关于 μ 是连续的 (μ-continuous)，若 $\lim\limits_{\mu(E) \to 0} \| F(E) \| = 0$，此事记为 $F \ll \mu$. 对于一族向量测度 $F_\lambda: \mathscr{F} \to X (\lambda \in \Lambda)$，称它是关于 μ 等度连续的 (equi-μ-continuous)，若 $\lim\limits_{\mu(E) \to 0} \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \| F_\lambda(E) \| = 0$.

若 Σ 为 Ω 上的 σ 代数，μ 是 Σ 上的非负可数可加实值测度. 如通常那样，称 (Ω, Σ, μ) 为测度空间 (measure space). 若 $\mu(\Omega) < \infty$，则称它为有限测度空间 (finite measure space). 若 $\mu(\Omega) = 1$，称它为概率空间 (probability space)，称 μ 是 Σ 上的概率 (probability). 此时，在一定意义上，可以将 Σ 视为一个度量空间. 实际上，设 $A, A' \in \Sigma$，记 $A \triangle A' = (A \setminus A') \cup (A' \setminus A)$. 若 $\mu(A \triangle A') = 0$，则把 A 与 A' 视为同一元(或者 A 等价于 A'，$A \sim A'$)，记这种元素的全体为 $\widetilde{\Sigma}$，容易验证 $\widetilde{\Sigma}$ 为 σ 代数，μ 仍为 $\widetilde{\Sigma}$ 上的可数可加测度. 实际上，我们作出了一个商空间 $\widetilde{\Sigma} = \Sigma / \sim$.

若 $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \widetilde{\Sigma}$，定义 $d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \mu(A \triangle B)$，其中 A 属于 $\widetilde{A}$ 所在的类，B 属于 $\widetilde{B}$ 所在的类. 容易知道，$d(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ 与 A, B 在相应的类中的选取无关并且 d 是 $\widetilde{\Sigma}$ 上的度量函数. 为方便起见，仍记 $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ 为 A, B.

引理 $\widetilde{\Sigma}$ 是完备度量空间.

证明 实际上，对于任何 $A \in \Sigma$，若 χ_A 是 A 的特征函数，则

$$d(A, B) = \int_\Omega |\chi_A - \chi_B| d\mu. \tag{2.2}$$

若 $A_n \in \widetilde{\Sigma}$，$A_n$ 为 d-Cauchy 序列，即 $d(A_n, A_m) \to 0 (m, n \to \infty)$ 则 $\{\chi_{A_n}, n \geqslant 1\}$ 是 L_1 中的 Cauchy 序列，从而有 $\xi \in L_1$，$\| \chi_{A_n} - \xi \|_1 \to 0\ (n \to \infty)$. $\{\chi_{A_n}\}$ 有子序列 $\mu - a.e.$ 收敛于 ξ，所以 $\xi(\omega) = 0$ 或 1，不计 0 测度集，ξ 是某个集合的特征函数，即 $\xi = \chi_A$. 现在

$$d(A_n, A) = \int_\Omega |\chi_{A_n} - \chi_A| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

定理 2(Vitali-Hahn-Saks) 设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间，$F_n: \Sigma \to X (n \geqslant 1)$ 是向量测度序列，$F_n \ll \mu$ 并且对于 $\forall E \in \Sigma$，$\lim\limits_{n \to \infty} F_n(E)$ 存在. 则 $F_n (n \geqslant 1)$ 关于 μ 是等度连续的.

证明 考虑引理中提到的空间 $\widetilde{\Sigma}$. 对于 $\forall\ \varepsilon > 0$，记

$$\Sigma_{nm} = \{A, A \in \widetilde{\Sigma}, \| F_n(A) - F_m(A) \| \leqslant \varepsilon\},$$

$$\Sigma_p = \bigcap_{m, n \geqslant p} \Sigma_{nm} \tag{2.3}$$

$(m, n \geqslant 1)$. Σ_{nm} 是 $\widetilde{\Sigma}$ 中的闭集，从而 Σ_p 是闭集. 由于 $\lim\limits_{n \to \infty} F_n(E)$ 存在 $(\forall\ E \in \Sigma)$，故对于充分大的 p，$E \in \Sigma_p$. 换句话说，$\widetilde{\Sigma} = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \Sigma_p$.

$\widetilde{\Sigma}$ 是完备的，由 Baire 性质，至少有某个 p_0，Σ_{p_0} 在 $\widetilde{\Sigma}$ 中包含内点，即存在 $A_0 \in \widetilde{\Sigma}$，$r > 0$，对于任何 $E \in \widetilde{\Sigma}$，只要 $d(E, A_0) < r$，便有 $E \in \Sigma_{p_0}$：

$$\| F_n(E) - F_m(E) \| \leqslant \varepsilon, m, n \geqslant p_0.$$

对于 $n = 1, 2, \cdots, p_0$，则存在 $\delta > 0$ 使得当 $B \in \Sigma$，$\mu(B) < \delta$ 时 $\| F_n(B) \| < \varepsilon$.

现在对于 $\forall\ E \in \widetilde{\Sigma}$，$E = (A_0 \cup E) \backslash (A_0 \backslash E)$，

$$(A_0 \cup E) \triangle A_0 \subset E, \quad d(A_0, A_0 \cup E) \leqslant \mu(E),$$

$$(A_0 \backslash E) \triangle A_0 \subset E, \quad d(A_0, A_0 \backslash E) \leqslant \mu(E).$$

若 $\mu(E) < \min(r, \delta)$，则

$$\begin{aligned} \| F_n(E) \| &\leqslant \| F_n(A_0 \cup E) \| + \| F_n(A_0 \backslash E) \| \\ &\leqslant \| F_{p_0}(A_0 \cup E) \| + \| F_{p_0}(A_0 \backslash E) \| \\ &\quad + \| F_n(A_0 \cup E) - F_{p_0}(A_0 \cup E) \| \\ &\quad + \| F_n(A_0 \backslash E) - F_{p_0}(A_0 \backslash E) \| \end{aligned}$$

$$\leqslant 4\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\sup_{n\in N}\|F_n(E)\| = 0.$$

推论 2 在定理 2 条件下，若 $\mu(\Omega)<\infty$ 并且 $F(E)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(E)(\forall E\in\Sigma)$，则 $F\ll\mu$，F 是可数可加的.

证明 由等度连续性，$F\ll\mu$ 成立.

F 在 Σ 上有定义，显然是有限可加的. 若 $A_n\in\Sigma$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$\|F(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)-\sum_{n=1}^{k}F(A_n)\| = \|F(\bigcup_{n=k+1}^{\infty}A_n)\|.$$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(\bigcup\limits_{n=k+1}^{\infty}A_n)=0$ 知道 $\lim\limits_{k\to\infty}\|F(\bigcup\limits_{n=k+1}^{\infty}A_n)\|=0$. 推论成立.

定理 3 (Pettis) 设 (Ω,Σ,μ) 是测度空间，$F:\Sigma\to X$ 是可数可加向量测度，则 $F\ll\mu$ 当且仅当对于每个 $E\in\Sigma$，$\mu(E)=0$ 时 $F(E)=0$.

证明 必要性是显然的，现证充分性.

首先注意到这一事实对于实值(不一定非负)测度成立. 实际上对于实值有限测度，它的(全)变差是有限测度. 如果所说的结论对于实值测度 ν 不成立，则存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $A_n\in\Sigma$，$\mu(A_n)<\frac{1}{2^n}(n\geqslant 1)$，而 $\|\nu\|(E)\geqslant\varepsilon_0$. 取 $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}A_m$，则 $E\in\Sigma$，

$$\mu(E)\leqslant\mu(\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m)\leqslant\sum_{m=n}^{\infty}\mu(A_m)\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\quad(\forall n\in N).$$

从而 $\mu(E)=0$. 但

$$\|\nu\|(E)=\lim_{n\to\infty}\|\nu\|(\bigcup_{m=n}^{\infty}A_n)\geqslant\limsup_{n\to\infty}\|\nu\|(A_n)\geqslant\varepsilon_0,$$

这与 $\nu\ll\mu$ 矛盾.

对于向量测度 $F:\Sigma\to X$，考虑测度族 $\{x^*F, x^*\in X^*, \|x^*\|\leqslant 1\}$，我们只须证明 $\lim\limits_{\mu(E)\to 0}\sup\limits_{\|x^*\|\leqslant 1}|x^*F(E)|=0$. 若反设此事不能成立，则存在 $\varepsilon_0>0$ 和一列 $x_n^*\in X^*$，$\|x^*\|\leqslant 1$ 以及 $A_n\in\Sigma$，尽

管 $\mu(A_n) < \frac{1}{n}$，但 $|x^* F(A_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

设 $\mathscr{F}$ 是由 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 生成的代数并且 $\Sigma_0 = \sigma(\mathscr{F})$. 容易验证，在 Σ_0 上 F 的可数可加性以及定理中所说的条件仍然保持. 于是对于每个 $E \in \Sigma$，若 $\mu(E) = 0$，则 $x_n^* F(E) = 0 (n \geqslant 1)$. 由上面证明知道 $x_n^* F \ll \mu|_{\Sigma_0}$，后者是 μ 在 Σ_0 上的限制.

当 $n = 1$ 时，由 $|x_n^* F(A_1)| \leqslant \| F(A_1) \| < \infty (\forall\, n \in N)$，取子列 $x_{n_k}^*$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}^* F(A_1)$ 存在. 由 $|x_{n_k}^* F(A_2)| \leqslant \| F(A_2) \| < \infty (\forall\, n_k \in N)$，再取 n_k 的子列 n_{k_i} 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i}^* F(A_2)$ 存在，……，通过对角线选择过程得到 x_n^* 的子列，我们仍记为 x_n^*，对于它

$$\lim_{n\to\infty} x_n^* F(A_k) \text{ 存在 } (\forall\, k \in N). \tag{2.4}$$

由于 $\mathscr{F}$ 是由 $\{A_n\}$ 生成的，所以对于 $\forall\, A \in \mathscr{F}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* F(A)$ 存在.

记 $X_1 = \overline{\operatorname{span}}\{F(E), E \in \mathscr{F}\}$，$X_1$ 是 X 的闭子空间，X_1 是可分的. 对于 $\forall\, E \in \Sigma_0$，则 $F(E) \in X_1$. 否则存在 $x^* \in X^*$ 和 $r > 0$ 使得

$$x^* F(E) < r \leqslant x^* x, \forall\, x \in X_1.$$

由 F 的可数可加性，选取 $\mathscr{F}$ 中的单调序列 E_n 使 $F(E) = \lim\limits_{n\to\infty} F(E_n)$，从而 $x^* F(E) = \lim\limits_{n\to\infty} x^* F(E_n) \geqslant r$，这与上式矛盾.

现在设 $E \in \Sigma_0$，对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，取 $x_0 \in \{F(E), E \in \mathscr{F}\}$ 使得 $\| F(E) - x_0 \| < \varepsilon$，此时必有标量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 和 $A_1, \cdots, A_k \in \mathscr{F}$，$x_0 = \alpha_1 F(A_1) + \cdots + \alpha_k F(A_k)$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* x_0 = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i (\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* F(A_i))$ 的存在性，对于足够大的 m, n，$|x_n^* x_0 - x_m^* x_0| < \varepsilon$. 从而

$$\begin{aligned} |x_n^* F(E) - x_m^* F(E)| &\leqslant |x_n^* x_0 - x_m^* x_0| \\ &\quad + |x_n^* x_0 - x_n^* F(E)| + |x_m^* x_0 - x_m^* F(E)| \\ &\leqslant \varepsilon + 2 \| F(E) - x_0 \| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* F(E)$ 存在. 由 Vitali-Hahn-Saks 定理知道，在 Σ_0 上

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \sup_{n \in N} |x_n^* F(E)| = 0.$$

这与 $|x_n^* F(A_n)| \geqslant \varepsilon_0$ 的事实矛盾. 定理得证.

由 §1 定理 4 可以得出

推论 3 设 (Ω, Σ, μ) 是测度空间, $F: \Sigma \to X$ 是有界变差向量测度, 若 $F \ll \mu$, 则 $\|F\| \ll \mu$.

定理 4 设 Σ 是 σ 代数. 若 $F_\lambda: \Sigma \to X (\lambda \in \Lambda)$ 是有界可数可加向量测度并且一致强可加(uniformly strongly additive), 即对于任何不相交序列 $\{A_n, n \geqslant 1\} \subset \Sigma$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} \|F_\lambda(A_n)\| = 0,$$

则存在可数可加测度 $\nu: \Sigma \to [0, \infty)$ 使得 $\nu(E) \to 0$ 当且仅当 $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} |F_\lambda|(E) \to 0$.

证明 先设 F_n 是一列实值(不必非负)可数可加测度. 由实测度的理论知道, F_n 有限且(全)变差 $\|F_n\|$ 也有限. 定义

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|F_n\|(E)}{2^n \|F_n\|(\Omega)} \tag{2.5}$$

则 ν 是非负可数可加测度并且当 $\sup\limits_{n\in N} \|F_n(E)\| \to 0$ 时, $\nu(E) \to 0$.

为证 $\nu(E) \to 0$ 时 $\sup\limits_{n\in N} \|F_n\|(E) \to 0$, 设 $F: \Sigma \to l_\infty$ 是一个测度, 其中第 n 个坐标 $F(E)_n = \|F_n\|(E)$, 由 F_n 的一致强可加性, F 是可数可加的有限测度. 此外, 当 $E \in \Sigma, \mu(E) = 0$ 时, $F_n(E) = 0$ 从而 $\|F_n\|(E) = 0$. 由定理 3, $\lim\limits_{\nu(E)\to 0} F(E) = 0$, 即

$$\lim_{\nu(E)\to 0} \sup_{n\in N} \|F_n\|(E) = 0.$$

对于向量测度族 $\{F_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, 我们只须证明标量测度族 $\{x^* F_\lambda, \lambda \in \Lambda, x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1\}$ 的等度连续性. 为简便计, 我们仍以 $\{F_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 表示所说的标量测度族.

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 现在证明存在 $N_\varepsilon = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \Lambda$ 使得当 $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \|F_{\lambda_i}\|(E) = 0$ 时 $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} |F_\lambda(E)| < \varepsilon$. 若不然, 对于 $\lambda_1 \in \Lambda$, 存在 $E_1 \in \Sigma, \lambda_2 \in \Lambda$ 使得

$$\|F_{\lambda_1}\|(E_1) = 0 \text{ 但 } |F_{\lambda_2}(E_1)| \geqslant \varepsilon.$$

又对于 $\lambda_1,\lambda_2 \in \Lambda$，存在 $E_2 \in \Sigma$ 和 $\lambda_3 \in \Lambda$ 使得

$$\| F_{\lambda_1} \| (E_2) = \| F_{\lambda_2} \| (E_2) = 0 \text{ 但 } |F_{\lambda_3}(E_2)| \geqslant \varepsilon.$$

一般地，对于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n \in \Lambda$，存在 $E_n \in \Sigma$ 和 $\lambda_{n+1} \in \Lambda$ 使得

$$\| F_{\lambda_i} \| (E_n) = 0 (1 \leqslant i \leqslant n), \text{但 } |F_{\lambda_{n+1}}(E_n)| \geqslant \varepsilon.$$

现在由 $\bigcup_{j=n}^{\infty} E_j$ 关于 n 的单调性和 F_λ 的一致强可加性，容易得到 $\lim_{n\to\infty} |F_{\lambda_i}(\bigcup_{j=n}^{\infty} E_j)|$ 关于 i 是一致存在的，实际上

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i} |F_{\lambda_i}(\bigcup_{j=n}^{\infty} E_j)| = 0. \tag{2.6}$$

但另一方面，由 $\| F_{\lambda_{n+1}} \| (E_j) = 0 (j \geqslant n+1)$，

$$F_{\lambda_{n+1}}(\bigcup_{j=n}^{\infty} E_j) = F_{\lambda_{n+1}}(E_n) + F_{\lambda_{n+1}}(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} E_j \backslash E_n) = F_{\lambda_{n+1}}(E_n),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i} |F_{\lambda_{i+1}}(\bigcup_{j=n}^{\infty} E_j)| \geqslant \varepsilon.$$

矛盾.

依次取 $\varepsilon = \frac{1}{m}$，则存在 $N_{\frac{1}{m}} = \{\lambda_1^{(m)},\cdots,\lambda_{k(m)}^{(m)}\} \subset \Lambda$ 使得

$$\sup_{1\leqslant j\leqslant k(m)} \| F_{\lambda_j^{(m)}} \| (E) = 0 \text{ 时} \sup_{\lambda\in\Lambda} |F_\lambda(E)| < \frac{1}{m}.$$

定义

$$\mu_m(E) = \frac{1}{k(m)} \sum_{j=1}^{k(m)} \| F_{\lambda_j^{(m)}} \| (E), \tag{2.7}$$

则 μ_m 是实值可数可加测度. 由 $\{F_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 的一致强可加性，$\{\mu_m, m \in N\}$ 一致可数可加并且 $\mu_m(E) = 0$ 时 $\sup_{\lambda\in\Lambda} |F_\lambda(E)| < \frac{1}{m}$. 由前面关于标量情况的证明，$\{\mu_m, m \in N\}$ 是等度连续测度族并且存在可数可加测度 ν，使得 $\nu(E) \to 0$ 当且仅当 $\sup_{m\in N} \| \mu_m \| (E) \to 0$. 现在由

$$\nu(E) \leqslant \sup_{m\in N} \| \mu_m \| (E) \leqslant \sup_{\lambda\in\Lambda} \| F_\lambda \| (E), \tag{2.8}$$

当 $\sup_{\lambda\in\Lambda} \| F_\lambda \| (E) \to 0$ 时，$\nu(E) \to 0$. 另一方面当 $\nu(E) = 0$ 时 $\| \mu_m \| (E) = 0$ 从而 $\sup_{\lambda\in\Lambda} \| F_\lambda \| (E) < \frac{1}{m} (\forall\, m \in N)$，故

$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|F_\lambda\|(E)=0$. 为了证明当 $\nu(E)\to 0$ 时 $\sup_{\lambda\in\Lambda}\|F_\lambda\|(E)\to 0$，只要象证明标量情况一样考察测度 $F:\Sigma\to l_\infty(\Lambda)$，$F(E)_\lambda=F_\lambda(E)$ 就行了. 定理证毕.

推论 4(Bartle-Dunford-Schwartz)　设 Σ 为 σ 代数，$F:\Sigma\to X$ 是可数可加向量测度，则存在可数可加测度 $\mu:\Sigma\to[0,\infty)$ 使得 $\mu(E)\to 0$ 当且仅当 $|F|(E)\to 0$. 实际上可取 μ 满足 $0\leqslant\mu(E)\leqslant|F|(E)$，$\forall E\in\Sigma$.

三、延拓定理和分解定理

设 $\mathscr{F}$ 是点集 Ω 上的代数，$\Sigma=\sigma(\mathscr{F})$. 向量测度 $\overline{F}:\Sigma\to X$ 称为是 $F:\mathscr{F}\to X$ 的延拓：若 $\overline{F}(E)=F(E)$，$\forall E\in\mathscr{F}$.

定理 5　设 $\mathscr{F}$ 是点集 Ω 上的代数，$\Sigma=\sigma(\mathscr{F})$. $F:\mathscr{F}\to X$ 是有界 w 可数可加向量测度. 则以下条件等价：

(i) F 有(唯一)可数可加延拓 $\overline{F}:\Sigma\to X$.

(ii) 存在可数可加实测度 $\mu:\mathscr{F}\to[0,\infty)$ 使得 $F\ll\mu$.

(iii) F 在 $\mathscr{F}$ 上强可加.

证明　(i)⇒(iii) 是显然的.

(iii)⇒(ii) 考虑测度族 $\{x^*F, x^*\in X^*, \|x^*\|\leqslant 1\}$. 每个 x^*F 在 $\mathscr{F}$ 上是强可加的，由实测度的延拓定理(Carathéodory-Hahn)，x^*F 可延拓为 Σ 上的可数可加测度，记为 $\overline{x^*F}$. 往证 $\{\overline{x^*F}, x^*\in X^*, \|x^*\|\leqslant 1\}$ 在 Σ 上的一致可数可加性. 一旦此事成立，则由定理 4，存在可数可加实测度 $\mu:\Sigma\to[0,\infty)$ 使得 $\mu(E)\to 0$ 时，$\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}|x^*F(E)|\to 0$，即 $F\ll\mu$，而后 $\mu|\mathscr{F}$ 即为所求. 同时为着我们的目的，甚至只须考虑非负测度族. 总之，我们假定 $\{\mu_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 $\mathscr{F}$ 上的一致强可加测度族，$\{\overline{\mu}_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是相应的 Carathéodory-Hahn 延拓.

若 $\{\overline{\mu}_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 不是一致可数可加的，注意到在 σ 代数上测度族的一致可数可加与一致强可加是等同的. 由 §1 定理 1，存在 $E_n\in\Sigma$，$E_n\supset E_{n+1}(n\geqslant 1)$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$ 和 $n\in N$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sup_{m\in N}|\bar{\mu}_m(E_n)| > 0, \tag{2.9}$$

必要时过渡到子序列并重新安排脚码，不妨设对于某个 $\varepsilon_0 > 0$，$\mu_n(E_n) > 2\varepsilon_0$.

固定 μ_1，由于 $\bar{\mu}_1$ 是 μ_1 的延拓，存在互不相交集列 $S_j \in \mathscr{F}$ 使得

$$E_1 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\mu_1(S_j) < \mu_1(E_1) + \varepsilon_0/2.$$

现在 $E_m = (\bigcup_{j=1}^{p} S_j \cap E_m) \cup (\bigcup_{j=p+1}^{\infty} S_j \cap E_m)(\forall\ m,p \in N)$，根据 (μ_n) 在 $\mathscr{F}$ 上的一致强可加性，存在 p_0 使得

$$\mu_n(\bigcup_{j=p_0+1}^{\infty} S_j) < \varepsilon_0/2.\ (\forall\ n \in N)$$

记 $B_1 = \bigcup_{j=1}^{p_0} S_j$，则 $B_1 \in \mathscr{F}$ 并且

$$\mu_n(E_m \cap B_1) \geqslant \mu_n(E_m) - \varepsilon_0/2 \quad (\forall\ n,m \in N)$$

$$\mu_1(E_1) + \varepsilon_0/2 > \sum_{j=1}^{\infty}\mu_1(S_j) > \mu_1(B_1).$$

在 $\mathscr{F} \cap B_1$ 上考虑类似的情况可得到 $B_2 \in \mathscr{F}$ 使得

$$\mu_n(E_m \cap B_1 \cap B_2) > \mu_n(E_m) - \varepsilon_0/2 - \varepsilon_0/2^2 \quad (n \geqslant 1, m \geqslant 2)$$

$$\mu_j(E_2) + \varepsilon_0/4 \geqslant \mu_j(B_2). \quad (j = 1,2)$$

一般地，得到 $B_k \in \mathscr{F}$ 使得

$$\mu_n(E_m \cap B_1 \cap \cdots \cap B_k) \geqslant \mu_n(E_m) - \sum_{j=1}^{k}\varepsilon_0/2^j (n \geqslant 1, m \geqslant k)$$

$$\mu_j(E_k) + \varepsilon_0/2^k \geqslant \mu(B_k). \quad (j = 1,\cdots,k)$$

注意到 $E_k \subset E_{k-1}$，$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \varnothing$，故 $\lim_{k\to\infty}\mu_j(E_k) = 0(\forall\ j \geqslant 1)$. 于是对于某个固定的 j，

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty}\mu_j(B_1 \cap \cdots \cap B_k) \leqslant \lim_{k\to\infty}u_j(B_k)$$
$$\leqslant \lim_{k\to\infty}(\mu_j(E_k) + \varepsilon_0/2^k) = 0.$$

由一致强可加性，上述收敛性关于 j 是一致的. 另一方面，

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{j\in N}\mu_j(B_1 \cap \cdots \cap B_k) \geqslant \lim_{k\to\infty}\mu_k(E_k \cap B_1 \cap \cdots \cap B_k)$$

$$\geqslant \limsup_{k\to\infty}\mu_k(E_k) - \varepsilon_0 > \varepsilon_0. \qquad (2.10)$$

矛盾.

(ii)⇒(i) 设 $\bar{\mu}$ 是 μ 从 $\mathscr{F}$ 到 Σ 的延拓. 考虑引理中提到的空间 $\tilde{\Sigma}$,则 $\mathscr{F}(\bar{\mu})$ 在 $\tilde{\Sigma}$ 中是稠密的. 对于 $\forall\ E_1,E_2 \in \mathscr{F}$,

$$F(E_1) - F(E_2) = F(E_1\backslash E_1 \cap E_2) - F(E_2\backslash E_1 \cap E_2)$$

其中 $E_1\backslash E_1 \cap E_2 \subset E_1\backslash E_2 \subset E_1\triangle E_2, E_2\backslash E_1 \cap E_2 \subset E_2\backslash E_1 \subset E_1\triangle E_2$,由于 $F \ll \mu$,所以 $F:\mathscr{F}(\bar{\mu}) \to X$ 是一致连续测度,从而有唯一延拓 $\bar{F}:\tilde{\Sigma} \to X$. 作为向量测度,$\bar{F}$ 是有限可加和 $\bar{\mu}$ 连续的,从而是可数可加的.

由实测度的 Carathéodory-Hahn 延拓的唯一性得到向量测度延拓的唯一性.

根据 Stone 关于 Boole 代数的表示定理,对于任一点集 Ω 和 Ω 上的代数 $\mathscr{F}$,存在着完全不连通紧 Hausdorff 空间 $\bar{\Omega}$ 和由 $\bar{\Omega}$ 的开闭集构成的代数 $\tilde{\mathscr{F}}$,使得 $\mathscr{F}$ 到 $\tilde{\mathscr{F}}$ 上的 Boole 同构存在. 利用这一表示定理,可以将关于实测度的 Yosida-Hewitt 以及 Lebesgue 分解定理以适当方式转移到向量测度上来.

定理 6 (Yosida-Hewitt) 设 $\mathscr{F}$ 为某个代数,$F:\mathscr{F} \to X$ 是强可加向量测度,则

(i) F 可以唯一地分解为两个测度 F_c 与 F_p 之和:$F=F_c+F_p$,其中 $F_c:\mathscr{F}\to X$ 是可数可加的;$F_p:\mathscr{F}\to X$ 使得对于每个 $x^* \in X^*$,x^*F_p 都是纯有限可加的(即除去 0 之外,没有其它可数可加测度 $\nu:\mathscr{F}\to[0,\infty)$ 满足 $0\leqslant\nu(E)\leqslant \|x^*F_p\|(E), \forall\ E\in\mathscr{F}$).

(ii) 若 F 是有界变差的,则 F_c,F_p 也是有界变差的并且

$$\|F\|(E)=\|F_c\|(E)+\|F_p\|(E), \forall\ E\in\mathscr{F}. \qquad (2.11)$$

此外 $\|F_c\|$ 与 $\|F_p\|$ 是互为奇异的(mutually singular),即对于 $\forall\ \varepsilon>0$,存在 $A\in\mathscr{F}$ 使得

$$\|F_c\|(\Omega\backslash A)+\|F_p\|(A)\leqslant\varepsilon. \qquad (2.12)$$

定理 7 (Lebesgue) 设 $\mathscr{F}$ 为某个代数,$F:\mathscr{F}\to X$ 是强可加向量测度,则对于任何有限可加实测度 $\mu:\mathscr{F}\to[0,\infty)$,

(i) 存在唯一分解 $F = F_c + F_s$，F_c，F_s 强可加，$F_c \ll \mu$；对于每个 $x^* \in X^*$，$x^* F_s$ 是与 μ 互为奇异的.

(ii) 若 F 与 μ 可数可加，则 F_c，F_s 可数可加.

(iii) 若 F 是有界变差的，F_c 与 F_s 是有界变差的并且

$$\|F\|(E) = \|F_c\|(E) + \|F_s\|(E),\ \forall\ E \in \mathscr{F}.$$

此外 $\|F_s\|$ 与 μ 是互为奇异的.

§3 可测函数

假定 (Ω,Σ,μ) 是有限测度空间.

一个 σ 代数 Σ 称为是完备的(complete)：如果 $A \in \Sigma$，$\mu(A) = 0$，则 $\forall\ B \subset A$，$B \in \Sigma$. 任何 σ 代数都可以完备化成为完备 σ 代数，例如以 Q 表示 Σ 中的 0 测度集的全体子集，则 $\widetilde{\Sigma} = \sigma\{A \triangle B, \forall\ A \in \Sigma, B \in Q\}$ 就是 Σ 的完备 σ 代数. 对于 $\forall\ B \in Q$ 定义 $\widetilde{\mu}(A \triangle B) = \mu(A)$，$\forall\ A \in \Sigma$，则 $\widetilde{\mu}$ 是 $\widetilde{\Sigma}$ 上的测度，称 $\widetilde{\mu}$ 是 $\widetilde{\Sigma}$ 的完备测度，$(\Omega, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ 是完备测度空间.

定义 1 设 X 是 Banach 空间，X^* 是 X 的共轭.

(1) 称 $f:\Omega \to X$ 为 μ 强可测(μ-strongly measurable)(或简单地可测)函数. 若存在简单函数列 $f_n:\Omega \to X$，使得 $\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \to 0(n \to \infty)$.

(2) f 称为是 μ 弱可测的(μ-weakly measurable)：若对于每个 $x^* \in X^*$，$x^* f$ 是可测的.

(3) f 称为是可分值的(separably valued)：若集合 $f(\Omega) = \{f(\omega), \omega \in \Omega\} \subset X$ 可分. 称为是几乎可分值的(almost separably valued)：若存在 0 测度集 Q，使得 $f(\Omega \backslash Q)$ 可分.

我们有下面简单结论：

(i) 若 f,g 可测(w 可测)，α,β 是标量，则 $\alpha f + \beta g$ 可测(w 可测). (ii) 若 f 是标量值可测函数，g 是可测(w 可测)函数，则 fg 可测(w 可测). (iii) 若 f 是可测函数，$x_0 \in X$，则 $\|f(\omega) - x_0\|$ 是

标量值可测函数.(iv) 每个可测函数 w 可测.(v) 每个可测函数是几乎可分值的.

对于(v) 可证明如下:若 f 可测,简单函数列 f_n 使得 $\| f_n(\omega) - f(\omega) \| \to 0 (n \to \infty)$,若记 $Q = \{\omega, \| f_n(\omega) - f(\omega) \| \not\to 0\}$,则 $\mu(Q) = 0$. 显然,

$$f(\Omega \backslash Q) \subset \overline{\text{span}}\{f_n(\omega), \omega \in \Omega \backslash Q, n \in N\} \qquad (3.1)$$

后者是 X 的可分子空间.

定义 2 设 $f, f_n: \Omega \to X (n \in N)$ 是可测函数.

(1) 称 f_n μ 测度收敛(converges in μ-measure) 于 f:若对于 $\forall \sigma > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mu\{\omega, \| f_n(\omega) - f(\omega) \| \geqslant \sigma\} = 0. \qquad (3.2)$$

(2) 称 f_n 几乎处处收敛(almost everywhere converges) 于 f:若 $\exists\, Q \in \Sigma, \mu(Q) = 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n(\omega) - f(\omega) \| = 0, \forall\, \omega \in \Omega \backslash Q.$$

(3) 称 f_n 弱 μ-$a.e.$ 收敛(weakly μ-a.e. converges) 于 f:若存在 $Q \in \Sigma, \mu(Q) = 0$ 使得对于任何 $x^* \in X^*, \omega \in \Omega \backslash Q$, $\lim_{n \to \infty} x^* f_n(\omega) = x^* f(\omega)$.

定理 1 设 $f, f_n: \Omega \to X (n \geqslant 1)$ 是可测函数.

(1) 若 $f_n \to f \quad \mu$-$a.e.$,则 f_n 测度收敛于 f.

(2) 若 f_n 测度收敛于 f,则存在子列 $f_{n_k} \to f \quad \mu$-$a.e.$.

证明与实值情况类似,故略去.

对于任一度量空间 X,X 中全体开集生成的 σ 代数称为 Borel 代数(Borel algebra). 其中的每个集合称为 Borel 集(Borel set).

定理 2 设(Ω, Σ, μ) 是完备测度空间,X 是 Banach 空间,下面诸条件等价:

(i) $f: \Omega \to X$ 是 μ 可测的.

(ii) f 有几乎可分值并且对于 X 中任一开集 $O, f^{-1}(O) \in \Sigma$.

(iii) f 有几乎可分值并且对于 X 中任一 Borel 集 $E, f^{-1}(E)$

$\in \Sigma$.

(iv) f 有几乎可分值并且对于 $\forall\, x \in X$, $\| f(\omega) - x \|$ 可测.

证明 (i)⇒(ii) 设 f 是 μ 可测的,若 f 为简单函数,$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$,$x_i \in X$,$A_i \in \Sigma$,则对于任一开集 $O \subset X$,

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{x_i \in O} A_i \in \Sigma.$$

对于一般的可测函数 f,取简单的函数序列 f_n,$\| f_n(\omega) - f(\omega) \| \to 0$ μ-$a.e.$,则下面式子在至多相差一个 0 测度集的范围内成立:

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} f_m^{-1}(O), \tag{3.3}$$

因 Σ 是完备的,故 $f^{-1}(O) \in \Sigma$.

(ii)⇒(iii) 由式子

$$f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n), f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n) \tag{3.4}$$

可知.

(iii)⇒(iv) 对于每个 $x \in X$, $\| f(\omega) - x \|$ 是有限实值函数,集合 $S_r(x) = \{y, \| x - y \| \leqslant r\}$ 是 X 中的 Borel 集. 现在$\{\omega, \| f(\omega) - x \| \leqslant r\} = f^{-1}(S_r(x)) \in \Sigma$,这说明 $\| f(\omega) - x \|$ 是通常的实值可测函数.

(iv)⇒(i) f 有几乎可分值,不妨设 $Q \in \Sigma$,$\mu(Q) = 0$,$f(\Omega \backslash Q)$ 可分. 设$\{x_n\}$ 是在 $f(\Omega \backslash Q)$ 中稠密的. 由(iv),$\| f(\omega) - x_n \|$ 可测($n \geqslant 1$). 对于每个 $k \in N$ 令 $E_n = \{\omega \in \Omega \backslash Q, \| f(\omega) - x_n \| < \frac{1}{k}\}$,$E_n \in \Sigma$. 定义

$$g_k(\omega) = \begin{cases} x_n, & \omega \in E_n \backslash \bigcup_{i<n} E_i, n = 1,2,\cdots. \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $\| g_k(\omega) - f(\omega) \| < \frac{1}{k}$ μ-$a.e.$. $g_k(\omega)$ 取可数多个值,g_k 可以写成

$$g_k(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{k_i} \chi_{A_{k_i}}$$

的形式，其中 $A_{k_i}\in\Sigma$ 并且 $A_{k_i}\cap A_{k_j}=\varnothing(i\neq j)$. μ 是有限测度，故当 $m\to\infty$ 时 $\mu(\bigcup_{i=m}^{\infty}A_{k_i})\to 0$. 于是可取 m_k 使得 $\mu(\bigcup_{i=m_k+1}^{\infty}A_{k_i})<\frac{1}{k}$，令 $f_k(\omega)=\sum_{i=1}^{m_k}x_{k_i}\chi_{A_{k_i}}$，则

$$\| f_k(\omega)-f(\omega)\| <\frac{1}{k},\omega\in\bigcup_{i=1}^{m_k}A_{k_i} \tag{3.5}$$

至多相差一个 0 测度集. 从而简单函数列 $f_k\to f\mu$-$a.e.$ ，f 可测.

若允许取可数多个值的函数列，则上述最后的证明还可以加强. 实际上 g_k 即是一个取可数多个值的函数列，除去一个 0 测度集之外，它一致收敛于 f. 于是我们有

定理 3 $f:\Omega\to X$ 是可测的当且仅当存在可数值可测函数列 f_n，除去一个 0 测度集以外，f_n 一致收敛于 f.

可测性与 σ 代数 Σ 是有关的，所以有时以 $\sigma(f)$ 记使 f 可测的最小 σ 代数. 对于可测函数族 $\{f_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$，以 $\sigma(f_\lambda,\lambda\in\Lambda)$ 记使每个 f_λ 都可测的最小 σ 代数. 此外，对于可测和 w 可测的关系，我们将看到值域的可分性是关键的.

例 设 $\Omega=[0,1]$，(Ω,Σ,μ) 是 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度空间，Q 是 Ω 中的非可测集. $l_2[0,1]$ 是指标为 $[0,1]$ 中元素的函数，它使得每个元素 $\xi=(\xi_t)$ 满足 $\sum_{t\in[0,1]}\xi_t^2<\infty$. 现在定义函数 $f:\Omega\to l_2[0,1]$，$f(\omega)=(\xi_t(\omega))$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$\omega\in\Omega$ 并且当 $t\overline{\in}Q$ 或 $t\in Q$，$t\neq\omega$ 时 $\xi_t(\omega)=0$，当 $t\in Q$ 并且 $t=\omega$ 时 $\xi_t(\omega)=1$. 对于每个 $0\leqslant t\leqslant 1$，$\xi_t(\omega)$ 是 Ω 上的可测函数. 对于每个 $x^*\in l_2[0,1]^*$，由 Riesz 表现定理，至多除去一点，$x^*f(t)=0$. x^*f 可测，从而 f w 可测. 但

$$\| f(\omega)\| =(\sum_{t\in[0,1]}|\xi_t(\omega)|^2)^{1/2}=\begin{cases}0, & \omega\overline{\in}Q\\ 1, & \omega\in Q\end{cases}$$

它是 Q 的特征函数，故不可测. 由定理 2(iv)，f 不是 w 可测的.

定理 4(Pettis) 设 (Ω,Σ,μ) 是完备测度空间，则 $f:\Omega\to X$

可测当且仅当 f w 可测并且有几乎可分值.

证明 必要性是明显的,现证充分性. 设 $f(\Omega\backslash Q)$ 是可分的, $\mu(Q)=0$. 若 $\{x_n\}$ 是 $f(\Omega\backslash Q)$ 的可数稠密集,取 $x_n^*\in X^*$,使得 $\|x_n^*\|=1, x_n^*x_n=\|x_n\|$. 实际上有 $\|x_n\|=\sup\limits_{m\geqslant 1}|x_m^*x_n|$ 并且

$$\|f(\omega)\|=\sup_m|x_m^*f(\omega)|, \omega\in\Omega\backslash Q \tag{3.6}$$

从而 $\|f(\omega)\|$ 是可测的、类似的讨论知 $\|f(\omega)-x\|$ $(\forall\, x\in X)$ 可测. 定理 2(iv) 说明 f 是可测的.

推论 (i) 若 X 是可分 Banach 空间,则可测与 w 可测等价.

(ii) 若存在集合 $\Gamma\subset X^*$,使得对于任何 $x\neq 0$,

$$\|x\|=\sup\left\{\frac{|x^*x|}{\|x\|}, x^*\in\Gamma\right\} \tag{3.7}$$

并且对于每个 $x^*\in\Gamma$, x^*f 可测,则 f 可测. (称 Γ 是 X 的决定集,上述定理的证明还说明可分空间具有可数决定集).

定理 5 设 (Ω,Σ,μ) 是完备测度空间. 则

(i) w 可测函数序列的弱 $a.e.$ 收敛极限函数弱可测.

(ii) 可测函数序列的弱 $a.e.$ 收敛极限可测.

(iii) 可测函数序列的测度收敛极限函数可测.

证明 1° 设 f_n 弱可测, $f_n w$ μ-$a.e.$ 收敛于 f. 存在 $Q\in\Sigma$, $\mu(Q)=0$,对于每个 $x^*\in X^*$ 和 $\omega\in\Omega\backslash Q$, $x^*f_n(\omega)\to x^*f(\omega)$. x^*f_n 可测,所以 x^*f 可测. 由于 (Ω,Σ,μ) 是完备的, f w 可测.

2° 若 f_n 可测并且 w μ-$a.e.$ 收敛于 f. 由 1°, f w 可测. 为证明 f 可测,只须证明 f 有几乎可分值. 假设 $Q_n\in\Sigma, \mu(Q_n)=0$ 使得 $f_n(\Omega\backslash Q_n)$ 是可分的. 记 $Q=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}Q_n$,则 $\mu(Q)=0$ 并且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}f_n(\Omega\backslash Q_n)$ 可分从而 $\overline{\text{span}}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}f_n(\Omega\backslash Q_n)$ 可分. 但对于凸集来说, w 闭集等于范数闭集,所以 $f(\Omega\backslash Q)\subset\overline{\text{span}}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}f_n(\Omega\backslash Q_n)$.

3° 由定理 1(2) 得出.

§4 Bochner 积分

定义 1 称可测函数 $f:\Omega\to X$ 是在 Bochner 意义下关于 μ 可积的(Bochner integrable),若存在简单函数序列 $f_n(n\geqslant 1)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| f_n(\omega)-f(\omega)\| d\mu=0. \tag{4.1}$$

此时对于任何 $A\in\Sigma$, $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(\omega)d\mu$ 存在,记为 $\int_A f(\omega)d\mu$,称 $\int_A f(\omega)d\mu$ 是 f 在 A 上的 Bochner 积分(Bochner integral).

容易知道,若有另一个简单函数列使(4.1)成立,积分值不会改变.

定理 1 可测函数 $f:\Omega\to X$ 关于 μ 是可积的,当且仅当 $\int_\Omega \| f(\omega)\| d\mu<\infty$.

证明 若 f 可积,简单函数列 f_n 满足定义中的极限式,记

$$f_n(\omega)=\sum_{i=1}^{k_n} x_{n_i}\chi_{A_{n_i}}$$

则

$$\int_\Omega \| f_n(\omega)\| d\mu=\sum_{i=1}^{k_n}\| x_{n_i}\| \mu(A_{n_i})$$

是有限的,于是从不等式

$$\int_\Omega \| f(\omega)\| d\mu\leqslant\int_\Omega \| f(\omega)-f_n(\omega)\| d\mu+\int_\Omega \| f_n(\omega)\| d\mu$$

立即得出左端的有限性.

反之,若知道上式左端是有限的,由 §3 定理 3 的推论,f 是一列可数值函数 f_n 的一致极限(除去一个 0 测度集).不妨设

$$f_n(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}\chi_{A_{n_i}},x_{n_i}\in X,A_{n_i}\in\Sigma,A_{n_i}\cap A_{n_j}=\varnothing\ (i\neq j)$$

$$\| f_n(\omega)-f(\omega)\| \leqslant\varepsilon_n\quad \mu\text{-}a.e. \tag{4.2}$$

并且 $\varepsilon_n \to 0(n \to \infty)$. 于是对于每个 n,由 $\| f_n(\omega) \|$, $\| f(\omega) \|$ 的积分定义和(4.2)得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| x_{n_i} \| \mu(A_{n_i}) = \int_\Omega \| f_n(\omega) \| d\mu$$

$$\leqslant \int_\Omega \| f(\omega) \| d\mu + \varepsilon_n \mu(\Omega) < \infty.$$

取 $k_n \in N$ 使得 $\sum_{i=k_n+1}^{\infty} \| x_{n_i} \| \mu(A_{n_i}) < \varepsilon_n$ 并且记 $f'_n = \sum_{i=1}^{k_n} x_{n_i} \chi_{A_{n_i}}$,则 f'_n 是简单函数序列并且

$$\int_\Omega \| f'_n(\omega) - f(\omega) \| d\mu \leqslant \int_\Omega \| f'_n(\omega) - f_n(\omega) \| d\mu$$

$$+ \int_\Omega \| f_n(\omega) - f(\omega) \| d\mu$$

$$\leqslant \sum_{i=k_n+1}^{\infty} \| x_{n_i} \| \mu(A_{n_i}) + \varepsilon_n \mu(\Omega) \leqslant (1 + \mu(\Omega))\varepsilon_n.$$

所以 $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| f'_n(\omega) - f(\omega) \| d\mu = 0$, $f(\omega)$ 是可积的.

下面结论是不难得出的.

(i) 若 f, g 关于 μ 可积, α, β 为标量,则 $\alpha f + \beta g$ 也 μ 可积并且

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu + \beta \int_\Omega g d\mu.$$

(ii) 若 f, g 都是 μ 可测的, $\| f(\omega) \| \leqslant \| g(\omega) \|$ μ-a.e.,则 g 可积时, f 也可积.

(iii) 若 f μ 可积, $\{A_n\}$ 是 Σ 中一列互不相交的集合序列,则

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f(\omega) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(\omega) d\mu \tag{4.3}$$

(iv) 若 f 关于 μ 可积,则

$$\left\| \int_\Omega f(\omega) d\mu \right\| \leqslant \int_\Omega \| f(\omega) \| d\mu \tag{4.4}$$

例如对于(iv),当 f 可积时,对于任何 $x^* \in X^*$, $x^* f(\omega)$ 标量值可积并且若简单函数列 f_n 如(4.1),则

$$\int_{\Omega} x^{*} f(\omega) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} x^{*} f_n(\omega) d\mu = \lim_{n\to\infty} x^{*} \int_{\Omega} f_n(\omega) d\mu$$
$$= x^{*} \int_{\Omega} f(\omega) d\mu.$$

特别地取 $x^{*} \in X^{*}$，$\| x^{*} \| = 1$ 使得

$$x^{*} \int_{\Omega} f(\omega) d\mu = \left\| \int_{\Omega} f(\omega) d\mu \right\|$$

则

$$\left\| \int_{\Omega} f(\omega) d\mu \right\| = x^{*} \int_{\Omega} f(\omega) d\mu = \int_{\Omega} x^{*} f(\omega) d\mu \leqslant \int_{\Omega} \| f(\omega) \| d\mu.$$

定理 2 设(Ω, Σ, μ)是有限测度空间，$f: \Omega \to X$ 是关于 μ 可积的，定义向量测度 $F: \Sigma \to X$，$F(E) = \int_E f(\omega) d\mu$，则

(i) F 是可数可加向量测度并且 $F \ll \mu$.

(ii) F是有界变差的并且 $\| F \| (E) = \int_E \| f(\omega) \| d\mu, \forall\, E \in \Sigma$.

(iii) F 有相对紧值域，即 $F(\Sigma) = \{F(E), \forall\, E \in \Sigma\}$ 是相对紧集.

证明 1° F 的可数可加性即前面的(iii). 由(4.4)和实积分的绝对连续性得到 $F \ll \mu$.

2° 设 π 是 Ω 到 Σ 的任一分划，

$$\sum_{A \in \pi} \| F(A) \| = \sum_{A \in \pi} \left\| \int_A f(\omega) d\mu \right\|$$
$$\leqslant \sum_{A \in \pi} \int_A \| f(\omega) \| d\mu = \int_{\Omega} \| f(\omega) \| d\mu,$$

从而 $\| F \| (\Omega) \leqslant \int_{\Omega} \| f(\omega) \| d\mu$. F 是有界变差的.

另一方面，设 f_n 是 f 的积分定义中的简单函数列. 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，取 n_0 使得

$$\int_{\Omega} \| f(\omega) - f_{n_0}(\omega) \| d\mu < \varepsilon.$$

不妨设 $f_{n_0} = \sum_{i=1}^{k} x_i \chi_{A_i}$，$x_i \in X$，$A_i \in \Sigma$，$A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$. 设 π_0

$=\{A_1,\cdots,A_k\}$，对于比 π_0 更细的任何分划 π 和 $A\in\pi$，则容易验证

$$\left\|\int_A f_{n_0}(\omega)d\mu\right\| = \int_A \|f_{n_0}(\omega)\| d\mu.$$

由变差的定义，取 π 比 π_0 细并且使

$$\|F\|(\Omega) - \sum_{A\in\pi}\|F(A)\| < \varepsilon.$$

此时

$$\begin{aligned}
&\left|\|F\|(\Omega) - \int_\Omega \|f_{n_0}(\omega)\| d\mu\right| \\
&\leqslant \left|\|F\|(\Omega) - \sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f(\omega)d\mu\right\|\right| \\
&\quad + \left|\sum_{A\in\pi}\left\|\int_A f(\omega)d\mu\right\| - \left\|\sum_{A\in\pi}\int_A f_{n_0}(\omega)d\mu\right\|\right| \\
&\leqslant \varepsilon + \sum_{A\in\pi}\left\|\int_A (f(\omega)-f_{n_0}(\omega))d\mu\right\| \\
&\leqslant \varepsilon + \int_\Omega \|f(\omega)-f_{n_0}(\omega)\| d\mu < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

特别地

$$\int_\Omega \|f_{n_0}(\omega)\| d\mu \leqslant \|F\|(\Omega) + 2\varepsilon,$$

从而

$$\int_\Omega \|f(\omega)\| d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|f_n(\omega)\| d\mu \leqslant \|F\|(\Omega) + 2\varepsilon,$$

ε 是任意的，从而得到(ii)，把 Ω 换为 E，证明仍适用.

3° 注意若 $f:\Omega\to X$ 是 μ 可积的，$g:\Omega\to R$ 是标量值 μ 可测函数，$g\in L_\infty$. 则 gf 是 μ 可积的. 定义算子 $T:L_\infty\to X$，$T(g)=\int_\Omega gf d\mu$，由于

$$\|T(g)\| \leqslant \int_\Omega |g(\omega)|\,\|f(\omega)\| d\mu \leqslant \|g\|_\infty\int_\Omega \|f(\omega)\| d\mu,$$

T 是有界线性算子. 若 f_n 是简单函数，则 T 是有限秩算子. 取 f_n 是 f 的积分定义中的简单函数列并且对于每个 f_n 都定义相应的算子

$T_n: L_\infty \to X, T_n(g) = \int_\Omega g f_n d\mu$，则

$$\| T(g) - T_n(g) \| \leqslant \int_\Omega |g| \| f - f_n \| d\mu$$

$$\leqslant \| g \|_\infty \int_\Omega \| f - f_n \| d\mu,$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty} \| T - T_n \| = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \| f - f_n \| d\mu = 0$. T是紧算子. 特别地，

$$F(\Sigma) \subset \{T(\chi_E), E \in \Sigma\} \subset \{T(g), \| g \|_\infty \leqslant 1\}.$$

所以$F(\Sigma)$是相对紧集.

定理 3 设X, Y是Banach空间，$T: X \to Y$是有界线性算子，$f: \Omega \to X$是可积的. 则Tf可积并且对于任何$E \in \Sigma$,

$$T\left(\int_E f(\omega) d\mu\right) = \int_E Tf(\omega) d\mu. \tag{4.5}$$

证明 设f_n是定义f的积分中的简单函数列，则Tf_n是简单Y值函数列并且

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| Tf_n(\omega) - Tf(\omega) \| d\mu$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \| T \| \int_\Omega \| f_n(\omega) - f(\omega) \| d\mu = 0.$$

于是Tf可积并且对于$\forall E \in \Sigma$,

$$\int_E Tf(\omega) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E Tf_n(\omega) d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} T \int_E f_n(\omega) d\mu = T \int_E f(\omega) d\mu.$$

定理 4 (i) 设$f, g: \Omega \to X$是可积的，并且对于$\forall E \in \Sigma$,

$$\int_E f(\omega) d\mu = \int_E g(\omega) d\mu.$$

则$f(\omega) = g(\omega)$, μ-$a.e.$

(ii) 对于每个$E \in \Sigma, \mu(E) > 0, \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(\omega) d\mu = \overline{co} f(E)$.

证明 1° 设$F(E) = \int_E (f(\omega) - g(\omega)) d\mu, \forall E \in \Sigma$，由定理2(ii)，

$$\int_{\Omega} \| f(\omega) - g(\omega) \| d\mu = \| F \| (\Omega)$$

$$= \sup_{\pi} \sum_{E \in \pi} \left\| \int_E f(\omega) d\mu - \int_E g(\omega) d\mu \right\| = 0.$$

所以 $f(\omega) = g(\omega), \mu\text{-}a.e.$

2° 若所说的式子不成立，由 Hahn-Banach 定理，存在 $x^* \in X^*$ 和 $r \in R$ 使得

$$x^* \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(\omega) d\mu \right) < r \leqslant x^* f(\omega), \omega \in E,$$

两端在 E 上积分得出

$$\int_E x^* f(\omega) d\mu < r\mu(E) \leqslant \int_E x^* f(\omega) d\mu,$$

矛盾.

在叙述下面定理之前，让我们证明一个常被用到的定理.

定理 5(Mazur)　Banach 空间中的紧集的闭凸壳是紧的.

这一定理是下面引理的明显推论.

引理　Banach 空间中的闭集 K 是紧的当且仅当存在 $x_n \in X$ 使得 $x_n \to 0$ 并且 $K \subset \overline{co}\{x_n\}$.

证明　充分性. 设 $A = \{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n, \lambda_n \geqslant 0, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1\}$，则 $A = \overline{co}\{x_n\}$. 实际上对于任何 n, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \in co\{x_n\}$，从而 $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in \overline{co}\{x_n\}$, $A \subset \overline{co}\{x_n\}$. 反过来的关系是明显的. 现在一旦证明了 A 紧，则闭子集 K 也紧. 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，取 $n_0 \in N$ 使得当 $n > n_0$ 时 $\| x_n \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$，则

$$\left\| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \lambda_n x_n \right\| \leqslant \sup_{n > n_0} \| x_n \| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \lambda_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$\sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i x_i$ 是有限维空间中的有界闭集，故为紧集，A 也是紧集.

必要性　设 K 是紧集，则 $2K$ 紧. 取 $x_1,\cdots,x_{1n_1}\in X$ 使 $2K\subset\bigcup_{i=1}^{n_1}\overline{B}_{1/4}(x_{1i})$，令 $K_2=\bigcup_{i=1}^{n_1}(\overline{B}_{1/4}(x_{1i})\cap 2K-x_{1i})$，则 $K_2\subset\overline{B}_{1/4}(0)$，$2K_2\subset\overline{B}_{1/2}(0)$. 又 K_2 紧，取 $x_{21},\cdots,x_{2n_2}$ 使 $2K_2\subset\bigcup_{i=1}^{n_2}\overline{B}_{1/4^2}(x_{2i})$，令 $K_3=\bigcup_{i=1}^{n_2}(\overline{B}_{1/4^2}(x_{2i})\cap 2K_2-x_{2i})$，……

一直做下去得到 $\{x_{ij},i\geqslant 1,1\leqslant j\leqslant n_i\}$，依序将 x_{ij} 排列起来. 由于

$$\|x_{ij}\|\leqslant 2\cdot 4^{-i+1},1\leqslant j\leqslant n_i,i\geqslant 1,$$

故 $\|x_{ij}\|\to 0$. 另一方面，对于 $\forall\, x\in K$，由 K_n 的构造方式，$\exists\, x_{1i_1}$ 使得 $1\leqslant i_1\leqslant n_1$，$2x-x_{1i_1}\in K_2\subset\overline{B}_{1/4}(0)$，又存在 x_{2i_2} 使得 $1\leqslant i_2\leqslant n_2$，$2(2x-x_{1i_1})-x_{2i_2}\in K_3\subset\overline{B}_{1/4^2}(0)$. 一般地，存在 x_{ki_k} 使得 $1\leqslant i_k\leqslant n_k$ 并且 $x-(\frac{1}{2}x_{1i_1}+\frac{1}{2^2}x_{2i_2}+\cdots+\frac{1}{2^k}x_{ki_k})\in 2^{-k}K_{k+1}\subset 2^{-k}\overline{B}_{1/4^k}(0)$. 所以 $x=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_{ki_k}\in A=\overline{co}\{x_{ij}\}$，即 $K\subset\overline{co}\{x_{ij}\}$.

现在考虑可积函数的空间.

对于实数 p，$1\leqslant p<\infty$，取值于Banach空间 X 的可测函数 f：$\Omega\to X$ 若满足 $\int_\Omega\|f(\omega)\|^p d\mu<\infty$，称 f 是 p 可积的(p-integrable). p 可积函数的全体记为 $L_p(\mu,X)$. 使得 $\|f(\omega)\|$ 是本质有界的可测函数全体记为 $L_\infty(\mu,X)$. 视 μ-$a.e.$ 相等的函数为同一元并且以下面数值作为范数：

$$\|f\|_p=(\int_\Omega\|f(\omega)\|^p d\mu)^{1/p},\qquad 1\leqslant p<\infty$$

$$\|f\|_\infty=\text{ess sup}\,\|f(\omega)\|,\qquad p=\infty$$

则 $L_p(\mu,X)$ 与 $L_\infty(\mu,X)$ 成为Banach空间. 特别地，当 X 是标量域时，记 $L_p(\mu,X)=L_p(\mu)(1\leqslant p\leqslant\infty)$. 此外，当 $1\leqslant p<\infty$ 时，简单函数的全体在 $L_p(\mu,X)$ 中是稠密的.

若 $f,f_n\in L_p(\mu,X)(n\geqslant 1)$ 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$，则称 f_n

p 平均收敛(p-mean converges) 于 f.

定理 6 f_n p 平均收敛于 f,则 f_n 测度收敛于 f.

定理 7(Lebesgue) 设 $1 \leqslant p < \infty, f_n \in L_p(\mu, X)$ $(n \geqslant 1)$, 若存在 p 可积函数 $g: \Omega \to [0, \infty)$ 使得 $\| f_n(\omega) \| \leqslant g(\omega)$ $(n \geqslant 1)$, μ-$a.e.$, 并且 f_n 测度收敛于 f,则 f_n p 平均收敛于 f.

证明与实值情况类似,这里略去.

定义 2 设 $f_\lambda: \Omega \to X(\lambda \in \Lambda)$ 是一族可测函数,称这族函数是一致可积的(uniformly integrable):若

$$\lim_{c \to +\infty} \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_{\{\| f_\lambda(\omega) \| > c\}} \| f_\lambda(\omega) \| d\mu = 0. \tag{4.6}$$

定理 8 $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是一致可积函数族当且仅当

(i) $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \int_\Omega \| f_\lambda(\omega) \| d\mu < \infty$.

(ii) 对于 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ 使得 $\forall\, E \in \Sigma, \mu(E) < \delta$ 则

$$\int_E \| f_\lambda(\omega) \| d\mu < \varepsilon \quad (\forall\, \lambda \in \Lambda). \tag{4.7}$$

证明 1° 设 $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是一致可积的,若 c 足够大使得

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \int_{\{\| f_\lambda(\omega) \| > c\}} \| f_\lambda(\omega) \| d\mu \leqslant 1,$$

记 $E_{\lambda c} = \{ \| f_\lambda \| (\omega) > c \}$,则由

$$\int_\Omega \| f_\lambda(\omega) \| d\mu = \int_{E_{\lambda c}} \| f_\lambda(\omega) \| d\mu + \int_{\Omega \setminus E_{\lambda c}} \| f_\lambda(\omega) \| d\mu$$

得出

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \int_\Omega \| f_\lambda(\omega) \| d\mu \leqslant c + 1 < \infty.$$

为了得到(ii),注意

$$\int_E \| f_\lambda(\omega) \| d\mu = \int_{E_{\lambda c} \cap E} \| f_\lambda(\omega) \| d\mu + \int_{(\Omega \setminus E_{\lambda c}) \cap E} \| f_\lambda(\omega) \| d\mu$$

$$\leqslant c\mu(E) + \int_{E_{\lambda c}} \| f_\lambda(\omega) \| d\mu,$$

对于 $\varepsilon > 0$,选取 $c > 0$,使第二项关于 λ 一致小于 $\frac{\varepsilon}{2}$,再取 E 使

$\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2c}$,则有

$$\int_E \| f_\lambda(\omega) \| d\mu \leqslant c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (\forall \lambda \in \Lambda).$$

2° 不妨设 $M = \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_\Omega \| f_\lambda(\omega) \| d\mu$. 由于

$$\mu(E_{\lambda c}) \leqslant \frac{1}{c} \int_{E_{\lambda c}} \| f_\lambda \| d\mu \leqslant \frac{M}{c} \to 0 \ (c \to +\infty),$$

关于 $\lambda \in \Lambda$ 一致成立. 对于 $\forall \delta > 0$,存在 $K > 0$ 使当 $c \geqslant K$ 时,$\mu(E_{\lambda c}) < \delta$ 关于 $\lambda \in \Lambda$ 一致成立,从而由(ii)

$$\int_{E_{\lambda c}} \| f_\lambda(\omega) \| d\mu < \varepsilon \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

即(4.6)成立.

定理 9 若 $f_n \in L_1(\mu, X)$,则 $\| f_n - f \|_1 \to 0$ 当且仅当 f_n 测度收敛于 f 并且 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 一致可积.

证明 1° 若 $\| f_n - f \|_1 \to 0 (n \to \infty)$,定理5说明 f_n 测度收敛于 f. 此外 $\sup_{n \in N} \| f_n \|_1 < \infty$. 对于 $\forall \varepsilon > 0$,取 $n_0 \in N$ 使得当 $n \geqslant n_0$ 时 $\| f_n - f \|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. 由于 f 可积,故存在 $\delta > 0$ 使得当 $E \in \Sigma$,$\mu(E) < \delta$ 时,$\int_\Omega \| f(\omega) \| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而对于 $n \geqslant n_0$.

$$\int_E \| f_n(\omega) \| d\mu \leqslant \int_E \| f(\omega) \| d\mu + \| f_n - f \|_1 < \varepsilon.$$

由于 $\{f_i, 1 \leqslant i < n_0\}$ 一致可积,当 δ 足够小时,上式对于任何 $n \geqslant 1$ 成立. 所以 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 一致可积.

反之,由于 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 有子列 $f_{n_k} \to f \quad a.e.$,由 Fatou 引理,$\| f \|_1 \leqslant \lim_{n_k \to \infty} \| f_{n_k} \|_1 < \infty$,$f$ 可积. 设 $E_c = \{ \| f(\omega) \| > c \}$,则

$$\begin{aligned}\int_\Omega \| f_n - f \| d\mu &= \int_{(\Omega \setminus E_{nc}) \cap (\Omega \setminus E_c)} \| f_n - f \| d\mu \\ &\quad + \int_{E_{nc} \cup E_c} \| f_n - f \| d\mu \\ &\leqslant \int_{(\Omega \setminus E_{nc}) \cap (\Omega \setminus E_c)} \| f_n - f \| d\mu\end{aligned}$$

$$+\int_{E_{nc}\cup E_c}(\|f\|+\|f_n\|)d\mu$$

由一致可积性,$\lim\limits_{c\to\infty}\mu(E_{nc})=0$,又由 f 的可积性,$\lim\limits_{c\to\infty}\mu(E_c)=0$. 对于 $\varepsilon>0$,取 c 足够大,使右端第二项小于 $\varepsilon/2$. 又对于第一项应用控制收敛定理,对于充分大的 n,小于 $\varepsilon/2$,从而得出 $\|f_n-f\|_1\to 0(n\to\infty)$.

尽管 Bochner 积分有许多与 Lebesgue 积分类似的性质,但积分理论的进一步发展显示出二者在某些方面的差别,这些差别是由于值空间的特殊性质造成的. 回忆实值测度的 Radon-Nikodym(RN) 定理:对于有限测度空间(Ω,Σ,μ) 和测度 $\nu:\Sigma\to R$,若 $\nu\ll\mu$,则存在函数 $f:\Omega\to R$ 使得

$$\nu(E)=\int_E f(\omega)d\mu,\quad \forall\, E\in\Sigma.$$

此时记 $f=\dfrac{d\nu}{d\mu}$,称 f 为 ν 关于 μ 的 RN 导数. 将 R 换为一般的 Banach 空间 X,类似的结果能否成立?下面例子表明 $X=c_0$ 时上述情况不能成立.

例 1 设(Ω,Σ,μ) 是$[0,1)$ 上的 Lebesgue 测度空间. 令

$$E_1=[0,\frac{1}{2}),E_2=[\frac{1}{2},1),E_3=[0,\frac{1}{3}),$$

$$E_4=[\frac{1}{3},\frac{2}{3}),E_5=[\frac{2}{3},1),E_6=[0,\frac{1}{4}),\cdots\cdots$$

定义 $\nu:\Sigma\to c_0$,

$$\nu(E)=(\mu(E\cap E_1),\mu(E\cap E_2),\cdots,\mu(E\cap E_n),\cdots).$$

直接验证可知

1° $\nu(E)$ 是可数可加的.

2° $\|\nu(E)\|=\sup\limits_n\mu(E\cap E_n)\leqslant\mu(E)$,所以 $\nu\ll\mu$.

3°. $\|\nu\|(E)=\sup\limits_\pi\sum\limits_{A\in\pi}\|\nu(A)\|\leqslant\mu(\Omega)=1$,$\nu$ 是有界变差的.

若存在函数 $f:\Omega\to c_0$ 使得对于 $\forall\, E\in\Sigma$,$\nu(E)=\int_E f(\omega)d\mu$.

不妨设 c_0 上的第 n 个坐标泛函是 x_n^*，则

$$x_n^* \int_E f(\omega) d\mu = \int_E x_n^* f(\omega) d\mu = x_n^* \nu(E)$$

$$= \mu(E \cap E_n), \quad \forall E \in \Sigma.$$

$x_n^* f(\omega)$ 是 $f(\omega)$ 对应的第 n 个坐标，由实值测度的 RN 定理和上面等式，必有 $x_n^* f(\omega) = \chi_{E_n}$. 从而

$$f(\omega) = (\chi_{E_1}, \chi_{E_2}, \cdots).$$

但对于$[0,1)$ 中任一开集 B，有无穷多个 n，$\chi_{E_n}(\omega) = 0$，同时有无穷多个 n，$\chi_{E_n}(\omega) = 1$ $(\forall \omega \in B)$. 所以 $f(\omega) \overline{\in} c_0$. 矛盾.

定义 3 称 Banach 空间 X 关于测度空间(Ω, Σ, μ) 具有 RN 性质：若对于 Σ 上的任何 μ 连续有界变差向量测度 F，存在 $f \in L_1(\mu, X)$ 使得

$$F(E) = \int_E f(\omega) d\mu, \quad \forall E \in \Sigma.$$

称 f 是 F 关于 μ 的 RN 导数，记为 $f = \dfrac{dF}{d\mu}$. 称 X 具有 RN 性质：若 X 关于任一测度空间具有 RN 性质.

上面例子表明 c_0 不具有 RN 性质.

定义 4 称线性算子 $T: L_1(\mu) \to X$ 是可表现的(representable)：若存在可测函数 $g: \Omega \to X$，$\| g \|_\infty < \infty$ 使得

$$T(f) = \int_\Omega f g d\mu, \quad \forall f \in L_1(\mu). \tag{4.8}$$

定理 10 设 X 是 Banach 空间，X 具有 RN 性质当且仅当每个有界线性算子 $T: L_1(\mu) \to X$ 是可表现的，其中(Ω, Σ, μ) 是任一测度空间.

证明 必要性 设 X 具有 RN 性质，$T: L_1(\mu) \to X$ 是有界线性算子. 令 $F(E) = T(\chi_E), E \in \Sigma$. 则 $\| F(E) \| \leqslant \| T \| \| \chi_E \|_1 = \| T \| \mu(E)$. 由此易知 F 是有界变差可数可加向量测度(μ 连续). 从而存在 $g \in L_1(\mu, X)$ 对于任何简单函数 $f: \Omega \to R$，

$$T(f) = \int_\Omega fg d\mu \tag{4.9}$$

为证明 $g \in L_\infty(\mu, X)$，注意到由 §1 定理 4，$\|F\|(E)$ 是实值可数可加测度并且

$$\|F\|(E) = \sup_\pi \sum_{A\in\pi} \|F(A)\| \leqslant \|T\| \mu(E) \tag{4.10}$$

实值情况的 RN 定理保证了$\frac{d\|F\|}{d\mu} \leqslant \|T\|$. 但由 $\|F\|(E) = \int_E \|g\| d\mu$ 知道 $\|g\| = \frac{d\|F\|}{d\mu}$. 于是 $\|g\|_\infty \leqslant \|T\|$. 通过极限得出(4.9)对于任何 $f \in L_1(\mu)$ 成立.

充分性　对于有界变差 μ 连续向量测度 $F:\Sigma \to X$，$\|F\|$ 是可数可加实值测度并且 $\|F\| \ll \mu$. 于是实值情况的 RN 定理保证有 $\xi = \frac{d\|F\|}{d\mu} \in L_1(\mu)$. 取 $E_n = \{\omega, n-1 \leqslant \xi < n\}(n \geqslant 1)$，定义 $T_n(\chi_E) = F(E_n \cap E)$，对于简单函数 $f = \sum_{i=1}^k a_i\chi_{A_i}$，则 $T_n(f) = \sum_{i=1}^k a_i T(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^k a_i F(E_n \cap A_i)$，从而

$$\|T_n(f)\| \leqslant \sum_{i=1}^k |a_i| \|F\|(E_n \cap A_i) \leqslant n\int_{E_n\cap A_i} \xi d\mu$$

$$\leqslant n\sum_{i=1}^k |a_i| \mu(E_n \cap A_i) \leqslant n\int_{E_n} |f| d\mu \tag{4.11}$$

由简单函数在 $L_1(\mu)$ 中的稠密性，(4.11)对任何 $f \in L_1(\mu)$ 成立. 定理条件说明 T_n 是可表现的，即存在 $g_n \in L_\infty(\mu, X)$ 使得

$$T_n(f) = \int_{E_n} fg_n d\mu, \forall f \in L_1(\mu).$$

换句话说，$F(E_n \cap A) = \int_{E_n\cap A} g_n d\mu$. 取 $g = \sum_{n=1}^\infty g_n\chi_{E_n}$，则一方面

$$\int_\Omega \|g\| d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} \|g\| d\mu = \sum_{n=1}^\infty \|F\|(E_n)$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} \xi d\mu = \int_\Omega \xi d\mu < \infty,$$

另一方面对于任何 $E \in \Sigma$,

$$F(E) = \lim_{n\to\infty} F(E \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \lim_{n\to\infty} \int_{E \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i} g d\mu = \int_E g d\mu.$$

X 具有 RN 性质.

例 2 $L_1(\mu)$ 不具有 RN 性质,其中 μ 是[0,1]上的 Lebesgue 测度.实际上,设 $F:\Sigma \to L_1(\mu)$, $F(E) = \chi_E$,则 $\| F \| (E) = \mu(E)$,从而 F 是有界变差和 μ 连续的.若存在 Bochner 可积函数 $g:\Omega \to L_1(\mu)$ 使得

$$F(E) = \int_E g d\mu, \quad E \in \Sigma$$

定义算子 $T:L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)$, $Tf = \int_\Omega f g d\mu$, $\forall f \in L_\infty(\mu)$,由定理 2, $F(E) = \{T(\chi_E), E \in \Sigma\}$ 是 $L_1(\mu)$ 中的相对紧集.但 $\{T(\chi_E), E \in \Sigma\}$ 中存在序列 $\{\chi_{E_n}, n \geq 1\}$ 使得

$$\mu(E_n) = \mu(\Omega)/2, \quad \mu(E_m \triangle E_n) = \mu(\Omega)/4, m \neq n$$

从而

$$\begin{aligned} \| T(\chi_{E_m}) - T(\chi_{E_n}) \|_1 &= \| \chi_{E_m} - \chi_{E_n} \|_1 \\ &= \mu(E_m \cap E_n) \geq \frac{1}{4}, (m \neq n). \end{aligned}$$

这与相对紧性矛盾.

§5 Pettis 积分

考虑完备测度空间 (Ω, Σ, μ). 对于 Banach 空间 X,以 X^*, X^{**} 表示 X 的一次和二次共轭空间.

定理 1(Dunford) 设 $f:\Omega \to X$ 是弱可测函数,若对于 $\forall x^* \in X^*$, $x^* f \in L_1(\mu)$,则对于每个 $E \in \Sigma$,存在 $x_E^{**} \in X^{**}$ 使得

$$x_E^{**}(x^*) = \int_E x^* f(\omega) d\mu, \forall x^* \in X^*. \qquad (5.1)$$

此外, x_E^{**} 是唯一确定的.

证明 定义算子 $T:X^* \to L_1(\mu)$, $T(x^*) = x^* f(\omega)$. 由定理

条件，T 是在 X^* 上定义的有界线性算子. 若 $x_n^* \to 0, T(x_n^*) \to g(n \to \infty)$，后者是在 L_1 意义下收敛的，从而测度收敛，取子列 n_k，使 $T(x_{n_k}^*) = x_{n_k}^* f(\omega) \to g(\omega), \mu\text{-}a.e.$. 注意到

$$|x_{n_k}^* f(\omega)| \leqslant \| x_{n_k}^* \| \, \| f(\omega) \| \to 0 (n_k \to \infty),$$

必有 $g(\omega) = 0, \mu\text{-}a.e.$. 闭图象定理保证了 T 是有界算子. 记 $\varphi_E(x^*) = \int_E x^* f(\omega) d\mu$，则

$$\begin{aligned} |\varphi_E(x^*)| &= \left|\int_E x^* f(\omega) d\mu\right| \leqslant \int_\Omega |x^* f(\omega)| d\mu \\ &= \| T(x^*) \|_1 \leqslant \| T \| \, \| x^* \| \end{aligned} \tag{5.2}$$

φ_E 是 X^* 上的有界线性泛函，记 $\varphi_E = x_E^{**}$，则(5.1) 成立.

由 X^{**} 上 w^* 线性泛函的可分点性质知道 x_E^{**} 是唯一的.

定义 1 (1) 记定理1中的 $x_E^{**} = (D)\int_E f(\omega) d\mu$，称 x_E^{**} 是 f 在 E 上的 Dunford 积分.

(2) 若对于任何 $E \in \Sigma, x_E^{**} \in X$，则称 f 是 Pettis 可积(或 P 可积)的. 称 $x_E = x_E^{**}$ 为 f 在 E 上的 Pettis 积分，记为 $x_E = (\mathrm{P})\int_E f(\omega) d\mu$.

容易验证下面结论成立.

(i) 若 f, g 是 P 可积的，α, β 是标量，则 $\alpha f + \beta g$ P 可积并且

$$(\mathrm{P})\int_\Omega (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha(\mathrm{P})\int_\Omega f d\mu + \beta(\mathrm{P})\int_\Omega g d\mu.$$

(ii) 每个 Bochner 可积函数是 P 可积的并且积分值相同.

(iii) 设 X 是自反空间，则每个 Dunford 可积函数(即对于每个 $x^* \in X^*, x^* f \in L_1(\mu)$ 的 w 可测函数) 是 P 可积的.

(iv) 设 $f: \Omega \to X$ 是 P 可积的，$T: X \to Y$ 是有界线性算子，则 Tf 是 P 可积的，并且

$$(\mathrm{P})\int_\Omega Tf d\mu = T(\mathrm{P})\int_\Omega f d\mu.$$

定理 2 设 $f: \Omega \to X$ 是 μ 可测并且 Dunford 可积的，$F: \Sigma \to$

X^{**} 是向量测度，$F(E)=(D)\int_E fd\mu$，则 f 是P可积的当且仅当 F 可数可加.

证明 必要性. 若 $\{A_n, n\geqslant 1\}$ 是 Σ 中互不相交的元素序列，f P 可积，则对于 $\forall\, x^*\in X^*$，

$$x^*((\mathrm{P})\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}} fd\mu)=\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n} x^* fd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} x^* fd\mu. \quad (5.3)$$

对于 A_n 的任一子列也如此，这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} fd\mu$ 是 w 无条件收敛的，由 §1 定理 5，它是无条件收敛的，从而测度 F 是可数可加的，即 (5.3) 右端是 $x^*(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mathrm{P})\int_{A_n} fd\mu)$，$x^*$ 是任意的，从而

$$(\mathrm{P})\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}} A_n fd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{P})\int_{A_n} fd\mu. \quad (5.4)$$

充分性 若 $F:\Omega\to X^{**}$ 可数可加，取 Σ 中互不相交序列 $\{A_n, n\geqslant 1\}$ 使每个 $f\chi_{A_n}$ 有界并且 $\Omega=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，此事可行，因为由 f 的可测性

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mu\{\omega, \|f(\omega)\|>\lambda\}=\mu\{\omega, \|f(\omega)\|=\infty\}=0.$$

现在对于每个 $A\in\Sigma$，f 在 $A\cap A_n$ 上 Bochner 可积，从而

$$(D)\int_{A\cap A_n} fd\mu=\int_{A\cap A_n} fd\mu\in X.$$

由可数可加性，

$$(D)\int_A fd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}(D)\int_{A\cap A_n} fd\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(D)\int_{A\cap A_n} fd\mu\in X.$$

所以 f 是 Pettis 可积的.

定理 3 若 $g:\Omega\to X$ Pettis 可积，则对于 $\forall\, f\in L_\infty(\mu)$，$fg$ Pettis 可积.

证明 仅证必要性. 若 $f\in L_\infty(\mu)$ 是简单函数，则结论明显成立. 对于一般的 $f\in L_\infty(\mu)$. 取简单函数 f_n 使得 $\|f_n-f\|_\infty<$

$\frac{1}{n}$，则$(D)\int_A f_n g d\mu \in X$并且

$$\|(D)\int_A f_n g d\mu - (D)\int_A f g d\mu\| = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} |\int_A x^*(f_n - f) g d\mu|$$

$$\leqslant \|f_n - f\|_\infty \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \int_A |x^* g| d\mu \leqslant \|T\| \, \|f_n - f\|_\infty.$$

最后的不等式来自定理1(5.2)式. 令$n \to \infty$即知$(D)\int_A f g d\mu \in X$，从而fg Pettis可积.

定理4 (Krein-Smulian) Banach空间的弱紧子集的范数闭凸壳是弱紧的.

证明 不失一般性，设K是范数可分w紧子集，由Eberlien-Smulian定理，只须证明K的范数闭凸壳是相对w序列紧的.

在w拓扑下，K是紧Hausdorff空间. 设$g(\omega) = x, x \in K$. g具有可分值并且对于$\forall x^* \in X^*$，$x^* g$为连续函数，从而可测，所以g关于每个定义在K的w Borel集上的正则测度可测，从而对于每个$\mu \in C(K)^*$，Bochner积分$\int_K g d\mu$存在(注意K有界). 定义T: $C(K)^* \to X$，$T(\mu) = \int_K g d\mu$. 若$\{\mu_\alpha\} \subset C(K)^*$是一个网并且以$C(K)^*$的$w^*$拓扑$\lim_\alpha \mu_\alpha = \mu$，则对于任何$x^* \in X^*$，$x^* g \in C(K)$并且

$$\lim_\alpha x^* T(\mu_\alpha) = \lim_\alpha x^* \int_K g d\mu_\alpha = \lim_\alpha \int_K x^* g d\mu_\alpha = x^* T(\mu),$$

即T是$w^* - w$连续的，T是w紧算子. 若S^*是$C(K)^*$的闭单位球，$T(S^*)$是X的w紧凸集. 于是由$K \subset T(S^*)$(K上的单质量测度被T映射为K的元)，所以$\overline{co}(K) \subset T(S^*)$，所以$\overline{co}(K)$是$w$紧的.

定理5 设$g: \Omega \to X$是可测函数并且Dunford可积，$F: \Sigma \to X^{**}$是向量测度，$F(E) = (D)\int_E g d\mu$，则下面条件等价：

(i) g Pettis 可积.

(ii) $F(\Sigma)=\{F(E),\forall\ E\in\Sigma\}$ 是相对 w 紧集.

(iii) 算子 $T:L_\infty(\mu)\to X^{**}$，$T(f)=(D)\int_\Omega fgd\mu$ 是 w 紧的.

证明 (i)⇒(ii) 由定理 3，$T(f)=(P)\int_\Omega fgd\mu$，($\forall\ f\in L_\infty(\mu)$) 是线性算子. 若 $\{f_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 $L_\infty(\mu)$ 中的网并且 $f_\lambda\xrightarrow{w^*}f$，注意到对于 $\forall\ x^*\in X^*$，$x^*g\in L_1$，于是

$$\lim_\lambda x^*T(f_\lambda)=\lim_\lambda x^*\int_\Omega f_\lambda gd\mu=\lim_\lambda\int_\Omega f_\lambda(x^*g)d\mu$$
$$=x^*\int_\Omega fgd\mu.$$

即 $T(f_\lambda)\xrightarrow{w}T(f)$，换句话说 T 是 w^*-w 连续的. 由于 $\{f\in L_\infty,\|f\|_\infty\leqslant 1\}$ 是 w^* 紧集(Banach-Alaoglu 定理)，所以 $\{T(f),\|f\|_\infty\leqslant 1\}$ w 紧，从而 $F(\Sigma)\subset\{T(f),\|f\|_\infty\leqslant 1\}$ 是相对 w 紧的.

(ii)⇒(iii) $K=F(\Sigma)$ 是相对 w 紧集. Krein-Smulian 定理保证了 $\overline{co}K$ 是 w 紧的. 其实 K 的绝对闭凸壳 $\overline{co}(K\cup -K)=\{\sum_{i=1}^\infty\lambda_ix_i,x_i\in K,\sum_{i=1}^\infty|\lambda_i|=1\}$ 是 w 紧集. 我们证明 $\{T(f),\|f\|_\infty\leqslant 1\}\subset\overline{co}(K\cup -K)$. 为此只须证明

$$\{\int_\Omega fgd\mu,f=\sum_{i=1}^n\alpha_i\chi_{A_i},0\leqslant\alpha_i\leqslant 1\}\subset\overline{co}(K\cup -K).$$

不妨设 $0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n\leqslant 1$，则 $\alpha_1+\sum_{j=2}^n(\alpha_j-\alpha_{j-1})\leqslant 1$，从而

$$\int_\Omega fgdu=\alpha_1\int_{\bigcup_{i=1}^n A_i}gd\mu+\sum_{j=2}^n(\alpha_j-\alpha_{j-1})\int_{\bigcup_{i=1}^n A_i}fd\mu$$
$$\in co(K\cup -K)$$

故得之.

(iii)⇒(i) 取 $B_n\in\Sigma$，$B_n\subset B_{n+1}$，g 在每个 B_n 上有界，则 f_n

$=\chi_{A_n \cap A}$ 是 $L_\infty(\mu)$ 中有界集，从而 $T(f_n)=\int_{A\cap B_n} g d\mu$ 有 w 收敛子列. 但 $\int_{A\cap B_n} g d\mu \in X$，$X$ 在 X^{**} 中弱闭，从而 $T(\chi_A)=w-\lim\limits_{n\to\infty} T(f_n)\in X$. 故 g 是 P 可积的.

定义 2 称函数 $f:\Omega\to X$ 是局部 Bochner 可积的：若对于每个 $B\in\Sigma$，$\mu(B)>0$，存在 $A\in\Sigma$，$A\subset B$，$\mu(A)>0$ 使得 f 在 A 上是 Bochner 可积的.

引理 1（竭举引理） 设 $F:\Sigma\to X$ 是向量测度，(P) 是 F 所具有的某种性质，并且

(i) 对于每个 $B\in\Sigma$，$\mu(B)>0$ 存在 $A\in\Sigma$，$A\subset B$，$\mu(A)>0$，则 F 在 A 上具有(P).

(ii) 若 F 在 B 上具有(P)，$A\subset B$，$A\in\Sigma$，则 F 在 A 上具有(P).

(iii) 若 F 在 B_1，B_2 上具有(P)，则 F 在 $B_1\cup B_2$ 上具有(P).

此时必存在 $B_n\in\Sigma$，F 在 B_n 上具有(P) 并且 $\mu(\Omega\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)=0$.

证明 记 $\mathscr{A}=\{A\in\Sigma, F$ 在 A 上具有(P)$\}$. 由(i)，$\mathscr{A}$ 非空. 设 $c=\sup\limits_{A\in\mathscr{A}}\mu(A)$，取 $A_n\in\mathscr{A}$，不妨设 A_n 是递增序列使得 $\mu(A_n)\to c(n\to\infty)$，则必有 $\mu(\Omega\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=0$. 否则由(i)，存在 $A_0\subset\Omega\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，$\mu(A_0)>0$，$F$ 在 A_0 上具有(P)，从而

$$\mu(A_0\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n))=\mu(A_0)+\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A_0)+c>c$$

与 c 的定义矛盾. 取 $B_1=A_1$，$B_n=A_n\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}B_i(n\geqslant 2)$，则 $\{B_n, n\geqslant 1\}$ 为所求序列.

定理 6 设 $f:\Omega\to X$ 是可测并且 Pettis 可积函数，$F:\Sigma\to X$，$F(A)=\int_A f d\mu$，则 f 是 Pettis 可积的当且仅当 f 是局部 Bochner 可积的并且 F μ 连续.

证明 对于$\forall\ n\in N$,令$E_n=\{\omega,\ \|f(\omega)\|\leqslant n\}\in\Sigma$. 则$E_n\subset E_{n+1}(n\geqslant 1)$,$\mu(\Omega\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=0$,$f$在$E_n$上Bochner可积. 此外$\mu$连续已在定理2中得到.

反过来,若f是局部Bochner可积的,由竭举引理,存在$A_n\in\Sigma$,f在A_n上Bochner可积($n\geqslant 1$)并且$\mu(\Omega\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=0$. 对于$\forall\ A\in\Sigma$,由$\mu$连续性,

$$\int_A fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{A\cap\bigcup_{i=1}^{n}A_i}fd\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{A\cap A_i}fd\mu.$$

但$\int_{A\cap A_i}fd\mu\in X$,从而$\int_A fd\mu\in X$,$f$ Pettis可积.

引理 2 (Bessaga-Pelczynski) Banach空间X不具有与c_0同构的子空间当且仅当对于X中的任何(形式)级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$,若

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*x_n|<\infty,\forall\ x^*\in X^*,\tag{5.5}$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$是无条件收敛的(unconditionally converges).

证明 若X包含与c_0同构的子空间. 考虑c_0的标准基序列$\{e_n\}$,对于任何$x^*\in c_0^*=l_1$,$\sum_{n=1}^{\infty}|x^*e_n|<\infty$,但$\sum_{n=1}^{\infty}e_n$不是收敛的,从而不是无条件收敛的.

反之,若(5.5)对于某个级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$成立,而级数本身是发散的. 由 §1 定理5的证明可知$\sup\limits_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{n=1}^{\infty}|x^*x_n|<\infty$. 但$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散,故存在$\varepsilon_0>0$和整数序列$p_1<q_1\leqslant p_2<q_2\leqslant\cdots\cdots$,使得$\|\sum_{i=p_k}^{q_k}x_i\|\geqslant\varepsilon_0$. 记$y_k=\sum_{i=p_k}^{q_k}x_i(k\geqslant 1)$,则

$$\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\sum_{k=1}^{\infty}|x^*y_k|\leqslant M<\infty.\tag{5.6}$$

于是一方面，$\|y_k\| \geqslant \varepsilon_0 (\forall\ k \geqslant 1)$，另一方面，$y_k \xrightarrow{w} 0$. 此时$\{y_k\}$或者$\{y_k\}$的某个子序列必为$X$中的基序列，不失一般性，设$\{y_k\}$本身为基序列，基常数为$K$. 从而对于$\forall\ n \leqslant m$，$\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\| \leqslant K\|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\|$，其中$\{a_i, 1 \leqslant i \leqslant m\}$是任一标量序列. 于是

$$\varepsilon_0 |a_k| \leqslant \|a_k y_k\| = \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i y_i\| \leqslant 2K \|\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\|,$$

或者由(5.6)，

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_0}{2K} \max_{1\leqslant k\leqslant m} |a_k| &\leqslant \|\sum_{k=1}^{m} a_k y_k\| \leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \sum_{k=1}^{m} |a_k x^* y_k| \\ &\leqslant M \max_{1\leqslant k\leqslant m} |a_k|.\end{aligned} \tag{5.7}$$

所以$\{y_k\}$等价于c_0的标准基. 换句话说，span$\{y_k\}$与c_0同构. 证毕.

定理 7 若X不包含与c_0同构的子空间，则每个可测并且Dunford可积的函数是Pettis可积的.

证明 由可测性，存在可数值函数$g: \Omega \to X$，$g = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \chi_{A_i}$，$x_i \in X$，$A_i \in \Sigma$使得$\|g(\omega) - f(\omega)\| \leqslant 1$，$\mu$-$a.e.$ 现在只须证明g是Pettis可积的.

对于$\forall\ A \in \Sigma$和$x^* \in X^*$，由于g是Dunford可积的，

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x^* x_i| \mu(A \cap A_i) = \int_A |x^* g| d\mu < \infty.$$

将引理2用于级数$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \mu(A \cap A_i)$，由于$X$不包含同构于$c_0$的子空间，级数本身是无条件收敛的，即

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \mu(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} g \chi_A d\mu = \int_A g d\mu \in X.$$

g是Pettis可积的，从而f是Pettis可积的.

定义 3 Banach空间X称为具有弱Radon-Nikodym性质(weak Radon-Nikodym property，简单地，wRN性质)：若对于每

个有限完备测度空间(Ω,Σ,μ)和每个μ连续有界变差向量测度$F:\Sigma\to X$存在Pettis可积函数$f:\Omega\to X$使得

$$F(E)=(\mathrm{P})\int_E f d\mu,\quad \forall\, E\in\Sigma.$$

当X具有RN性质时,X必具有wRN性质.反之却未必.

设(Ω,Σ,μ)是完备测度空间,若$f:\Omega\to X$ Pettis可积,定义

$$\|f\|_P=\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\int_\Omega |x^*f(\omega)|d\mu, \tag{5.8}$$

又记$|||f|||=\sup\limits_{E\in\Sigma}\|F(E)\|$,其中$F(E)=(\mathrm{P})\int_E f d\mu$,由§1定理3(ii)

$$|||f|||\leqslant\|f\|_P\leqslant 2|||f|||, \tag{5.9}$$

(在复情况2换为4).两个Pettis可积函数f,g称为是关于μ弱几乎处处相等的,假若对于$\forall\, x^*\in X^*$,$x^*f(\omega)=x^*g(\omega)$,$\mu$-$a.e.$,其中例外集允许与$x^*$有关.把弱几乎处处相等的元素视为同一元,则Pettis可积函数全体以$\|\cdot\|_P$或$|||\cdot|||$为范数构成线性赋范空间,记为$\mathrm{P}(\mu,X)$.

与空间$L_p(\mu,X)$不同,$\mathrm{P}(\mu,X)$有许多奇异性质.例如简单函数全体在$\mathrm{P}(\mu,X)$中未必是稠密的,甚至$\mathrm{P}(\mu,X)$可能不是完备的.一个空间$\mathrm{P}(\mu,X)$是否具有以上性质,要看测度空间(Ω,Σ,μ)和Banach空间X具有何等性质.

我们以下面定理作为本章的结束.

定理8(Bru,Heinich) 设X是Banach空间,则下列条件等价:

(i) X是有限维的.

(ii) 每个可测Pettis可积函数是Bochner可积的.

(iii) $L_1(\mu,X)$在Pettis范数(5.8)下是完备的.

(iv) 在$L_1(\mu,X)$中$\|\cdot\|_1$范数与$\|\cdot\|_P$等价.

证明 由§1定理6,(i)⇒(ii)成立.由于每个$f\in L_1(\mu,X)$,$\|f\|_P\leqslant\|f\|_1$,$\|\cdot\|_P$与$\|\cdot\|_1$是可比较的范数,所以

(ii)⇒(iii) 和(iii)⇒(iv) 成立. 剩下只须证明(iv)⇒(i).

若 X 不是有限维的，由 Dvoretzky-Rogers 定理，存在可和但不是绝对可和的序列$\{x_n, n \geqslant 1\}$. 不失一般性，设 $\| x_n \| \leqslant 1 (n \geqslant 1)$. 取$(\Omega, \Sigma, \mu)$为$(0,1]$上的 Lebesgue 测度空间，记$A_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] (n \geqslant 1)$. 定义

$$f_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) x_i \chi_{A_i}, \quad (n \geqslant 1).$$

则 $f_n \in L_1(\mu, X)$ 并且由于$\{x_n, n \geqslant 1\}$ 不是绝对可和的，

$$\| f_n \|_1 = \int_\Omega \| f_n(\omega) \| d\mu = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \| \to \infty \quad (n \to \infty).$$

但由可和性，

$$\begin{aligned} \| f_n \|_P &= \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} \int_\Omega |x^* f_n(\omega)| d\mu \\ &= \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |x^* x^*| \leqslant M < \infty \quad (\forall\, n \geqslant 1) \end{aligned}$$

$\| \cdot \|_1$ 与 $\| \cdot \|_P$ 不可能是 $P(\mu, X)$ 上的等价范数.

Ⅱ. 鞅与 Radon-Nikodym 性质

对于本书来说，鞅既是我们研究的对象又是一种工具，因此弄清鞅的基本性质是完全必要的. 我们将讨论条件期望的有关性质，鞅的收敛性质，鞅在停时变换下的性质，即选样定理和停止定理. 在这一过程中我们将研究鞅的性质与 Radon-Nikodym 性质的关系. 在 §4，特别地将借助于实质下鞅给出若干常见空间的 Radon-Nikodym 性质的判定.

§1 条件期望

假定(Ω,Σ,μ)是概率空间，我们称在(Ω,Σ,μ)上定义的一个 Bochner 可积函数为一个随机变量(Random Variable)，简记为 R. V. ，又设 $\mathscr{B}$ 是 Σ 的子 σ 代数.

定义 设函数 $f\in L_1(\mu,X)$，称函数 $g:\Omega\to X$ 是 f 关于 $\mathscr{B}$ 的条件期望(conditional expectation)：若

(i) g 关于 $\mathscr{B}$ 是可测的，

(ii) 对于任何 $E\in\mathscr{B}$，$\int_E g d\mu=\int_E f d\mu$ (1.1)

此时记 $g=E(f|\mathscr{B})$.

今后记函数 f 在整个 Ω 上的积分值为 Ef，称为 f 的期望(expectation). 类似地 $E\|f\|$ 是 $\|f\|$ 的期望(即 $\|f\|_1$) 等等.

由定义和 Ⅰ. §3 定理 4 知道，若把仅在零测度集上不同的函数视为同一元，则当条件期望存在时，它是唯一确定的. 文献中有时将 $E(f|\sigma(h))$ 记为 $E(f|h)$，$\sigma(h)$ 是使 h 可测的最小 σ 代数. 今

后对于 $a.e.$ 成立的等式或不等式，常常省去 $a.e.$ 字样.

例 1 对于实值可积函数 $f \in L_1(\mu)$，条件期望总是存在的. 例如若 $\mathscr{B}$ 是 Σ 的子 σ 代数，令

$$F(E) = \int_E f d\mu, \forall E \in \mathscr{B}$$

则 $F(E)$ 是可数可加有限测度并且关于 μ 绝对连续，由实值情况的 RN 定理，存在 $g = \dfrac{dF}{d\mu}$，g 关于 $\mathscr{B}$ 可测并且 $F(E) = \int_E g d\mu = \int_E f d\mu, \forall E \in \mathscr{B}$. g 即是 f 关于 $\mathscr{B}$ 的条件期望.

明显地，以上论证对于每个具有 RN 性质的空间 X 以及每个 $f \in L_1(\mu, X)$ 仍成立. 但我们将证明 RN 性质不是必要的.

有几个简单性质是可以直接从定义得出的.

1° 若 f 在 Ω 上取常值 c，则 $E(f|\mathscr{B}) = c$.

2° 若 $E(f|\mathscr{B})$，$E(g|\mathscr{B})$ 存在，$\alpha, \beta \in \Phi$，则

$$E(\alpha f + \beta g|\mathscr{B}) = \alpha E(f|\mathscr{B}) + \beta E(g|\mathscr{B}).$$

3° 若 X、Y 是 Banach 空间，$T: X \to Y$ 是有界线性算子，$E(Tf|\mathscr{B})$ 存在，则

$$E(Tf|\mathscr{B}) = TE(f|\mathscr{B}).$$

4° $E(E(f|\mathscr{B})) = Ef$.

5° 若 $\mathscr{B} = \{\varnothing, \Omega\}$，则 $E(f|\mathscr{B}) = Ef$.

6° 对于实函数 $f(\omega) \geqslant 0$，则 $E(f|\mathscr{B}) \geqslant 0$. 从而若实函数 $f(\omega) \leqslant g(\omega)$，则 $E(f|\mathscr{B}) \leqslant E(g|\mathscr{B})$.

7° 若 f 关于 σ 代数 $\mathscr{B}$ 独立，则 $E(f|\mathscr{B}) = Ef$.

关于 4° 的证明，只须在定义(1.1)中取 $E = \Omega$ 即得之. 关于 7° 的证明并不困难，但我们将它留在附录 2 中.

现在我们讨论条件期望的存在性.

引理 1 设 $\varphi: (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ 是连续凸函数，即 $\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leqslant \lambda\varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2), \forall t_1, t_2 \in (\alpha, \beta), 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，则存在 a_n，$b_n \in \mathbf{R}$ 使得

$$\varphi(t) = \sup_{n \in N}(a_n t + b_n) \tag{1.2}$$

证明 对于 φ,在 (α,β) 上设

$$\varphi'_-(t_0) = \sup_{\Delta t<0} \frac{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}{\Delta t},$$

$$\varphi'_+(t_0) = \inf_{\Delta t>0} \frac{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}{\Delta t},$$

$\varphi'_-(t_0)$,$\varphi'_+(t_0)$ 分别是 φ 在 t_0 的左导数和右导数. 由 φ 的凸性知道 $\varphi'_-(t_0) \leqslant \varphi'_+(t_0)$,并且二者都是增函数. 上式又可写成

$$\varphi(t) \geqslant \varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi'_+(t_0), \qquad t \geqslant t_0$$

$$\varphi(t) \geqslant \varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi'_-(t_0) \qquad t \leqslant t_0$$

取 a_{t_0} 使得 $\varphi'_-(t_0) \leqslant a_{t_0} \leqslant \varphi'_+(t_0)$,$b_{t_0} = \varphi(t_0) - t_0 a_{t_0}$,则

$$\varphi(t) \geqslant a_{t_0} t + b_{t_0}, t \in (\alpha,\beta) \tag{1.3}$$

$t_0 \in (\alpha,\beta)$ 是任意的,故有

$$\varphi(t) \geqslant \sup_{t_0 \in (\alpha,\beta)} (a_{t_0} t + b_{t_0}) \tag{1.4}$$

实际上(1.4) 中的 t_0 只须取遍 (α,β) 的可数稠密子集,例如 (α,β) 中的有理数构成的子集. 为了得到(1.4) 中的等号成立,对于任何 $t_0 \in (\alpha,\beta)$,不妨设 $t_n \in (\alpha,\beta)$,$t_n \to t_0$,则一方面 $\varphi'_-(t_n) \leqslant a_{t_n} \leqslant \varphi'_+(t_n)$,$\varphi'_-$,$\varphi'_+$ 单调增加. 从而在 (α,β) 的任何闭子集上. $\{a_{t_n}\}$ 是有界集. 所以

$$\lim_{t_n \to t_0}(a_{t_n} + b_{t_n}) = \lim_{t_n \to t_0}(\varphi(t_n) + (t-t_n)a_{t_n})$$
$$= \varphi(t_0) + (t-t_0)a_{t_0}.$$

由 $\lim\limits_{t \to t_0}(\varphi(t_0) + (t-t_0)a_{t_0}) = \varphi(t_0)$, 结合(1.4) 得到 $\varphi(t_0) = \sup\limits_{n \in N}(a_{t_n} t_0 + b_{t_n})$,$\{t_n\}$ 是上述可数稠密集中任一序列,t_0 是任意的,故(1.2) 成立.

引理 2(Jensen) 若 $\varphi: (\alpha,\beta) \to \mathbf{R}$ 是连续凸函数,$f: \Omega \to (\alpha,\beta)$ 为实函数并且 $E\varphi(f)$ 存在,则

$$\varphi(E(f|\mathscr{B})) \leqslant E(\varphi(f)|\mathscr{B}). \tag{1.5}$$

证明 由上面基本性质 6°,$\alpha \leqslant E(f|\mathscr{B}) \leqslant \beta$,故 $\varphi(E(f|\mathscr{B}))$

有意义. 根据引理 1,

$$\varphi(t)=\sup_{n\in N}(a_nt+b_n)$$

其中 $a_n,b_n\in\mathbf{R}$,于是

$$\varphi(f(\omega))\geqslant a_nf(\omega)+b_n$$

两端关于 $\mathscr{B}$ 取条件期望,由 6°

$$E(\varphi(f)|\mathscr{B})\geqslant a_nE(f|\mathscr{B})+b_n,$$

从而 $E(\varphi(f)|\mathscr{B})\geqslant\sup\limits_{n\in N}(a_nE(f|\mathscr{B})+b_n)=\varphi(E(f)|\mathscr{B})$.

定理 1 设 $\mathscr{B}\subset\Sigma$ 是子 σ 代数,则对于每个 $f\in L_p(\mu,X)$

(i) $E(f|\mathscr{B})$ 存在.

(ii) $\|E(f|\mathscr{B})\|\leqslant E(\|f\||\mathscr{B}),\mu\text{-}a.e.$ (1.6)

(iii) $\|E(f|\mathscr{B})\|_p\leqslant\|f\|_p$. (1.7)

证明 当 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\chi_{A_i}$ 是简单函数时,由条件期望的定义容易验证

$$E(f|\mathscr{B})=\sum_{i=1}^{n}x_iE(\chi_{A_i}|\mathscr{B}).$$

对于函数 $\varphi(t)=t^p,t\geqslant0,1\leqslant p<\infty$,根据引理 2,

$$\begin{aligned}\|E(f|\mathscr{B})\|_p^p&=\int_\Omega\|E(f|\mathscr{B})\|^pd\mu\\&=\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|E(\chi_{A_i}|\mathscr{B})\Big)^pd\mu\\&=\int_\Omega(E(\|f\||\mathscr{B}))^pd\mu\\&\leqslant\int_\Omega E(\|f\|^p|\mathscr{B})d\mu=\int_\Omega\|f\|^pd\mu.\end{aligned}\tag{1.8}$$

对于 $p=\infty$ 容易直接验证成立.

现在,1°,只要 $f\in L_1(\mu,X)$,取 f_n 为简单函数列,使得 $\|f_n-f\|_1\to0$,则(1.8) 意味着

$$\|E(f_n|\mathscr{B})-E(f_m|\mathscr{B})\|_1\leqslant\|f_n-f_m\|_1\to0,$$

$\{E(f_n|\mathscr{B}),n\geqslant1\}$ 是 $L_1(\mu,X)$ 中的 Cauchy 序列,由 $L_1(\mu,X)$ 的完备性,不妨设在 $L_1(\mu,X)$ 中,

$$g = \lim_{n\to\infty} E(f_n | \mathscr{B})$$

一方面取子序列使之 μ-$a.e.$ 收敛于 g，不难知道 g 关于 $\mathscr{B}$ 可测；另一方面，对于 $\forall\ E \in \mathscr{B}$，

$$\int_E g d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E E(f_n | \mathscr{B}) d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

g 即是 f 关于 $\mathscr{B}$ 的条件期望.

2° 任取 $x^* \in X^*$，$\| x^* \| = 1$，由基本性质 3° 和引理 2，

$$|x^* E(f|\mathscr{B})| = |E(x^* f|\mathscr{B})| \leqslant E(|x^* f||\mathscr{B})$$
$$\leqslant E(\|f\| |\mathscr{B}),$$

然后知道对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$，

$$\| E(f|\mathscr{B}) \| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^* E(f|\mathscr{B})| \leqslant E(\|f\| |\mathscr{B}).$$

3° 对于 $f \in L_p(\mu, X)$，由 1° 得出 $g = E(f|\mathscr{B})$ 存在，实际上 $g \in L_1(\mu, X)$. 从(1.6) 和引理 2 可以得到

$$\| E(f|\mathscr{B}) \|_p^p \leqslant \| E(\|f\| |\mathscr{B}) \|_p^p = E(E(\|f\| |\mathscr{B}))^p$$
$$\leqslant E(E(\|f\|^p|\mathscr{B})) = E\|f\|^p = \|f\|_p^p.$$

此即(1.7).

(1.7) 通常称为条件期望的收缩性质. 实际上当把关于某个 σ 代数 $\mathscr{B}$ 的条件期望看成一个算子时，它恰是从 $L_p(\mu, \Sigma, X)$ 到 $L_p(\mu, \mathscr{B}, X)$ 的线性，保持常数不变的收缩算子，从而是连续算子. 下面定理的(ii) 还说明它是幂等的.

定理 2 设 $\mathscr{B}, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ 是 Σ 的子 σ 代数，$f \in L_p(\mu, X)$，则

(i) 若 $g: \Omega \to R$ 关于 $\mathscr{B}$ 可测并且 $gf \in L_1(\mu, X)$，则

$$E(gf|\mathscr{B}) = gE(f|\mathscr{B}). \tag{1.9}$$

当 g 为向量值函数，f 为实值函数时同样的结论成立. 特别地，若 f 关于 $\mathscr{B}$ 可测，则 $E(f|\mathscr{B}) = f$.

(ii) 若 $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$，则

$$E(E(f|\mathscr{B}_2)|\mathscr{B}_1) = E(f|\mathscr{B}_1) \tag{1.10}$$

作为特例，$E(E(f|\mathscr{B})|\mathscr{B}) = E(f|\mathscr{B})$.

证明 1° 若 $g=\chi_B, B\in\mathscr{B}$，则对于 $\forall A\in\mathscr{B}, A\cap B\in\mathscr{B}$，

$$\int_A gfd\mu=\int_{A\cap B}fd\mu=\int_{A\cap B}E(f|\mathscr{B})d\mu=\int_A gE(f|\mathscr{B})d\mu.$$

注意到 $gE(f|\mathscr{B})$ 关于 $\mathscr{B}$ 可测，从而(1.9)成立. 由条件期望的线性知道(1.9)对于任何简单函数成立. 最后利用条件期望的收缩性得出所要的结论.

2° 对于任何 $A\in\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}_2$，由条件期望的定义

$$\int_A fd\mu=\int_A E(f|\mathscr{B}_2)d\mu=\int_A E(E(f|\mathscr{B}_2)|\mathscr{B}_1)d\mu,$$

所以(1.10)成立.

定理 3 对于函数 $f\in L_p(\mu,X), g\in L_q(\mu,X^*), \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 1<p<\infty$，条件 Hölder 不等式成立，

$$E(|fg||\mathscr{B})\leqslant E(\|f\|^p|\mathscr{B})^{1/p}E(\|g\|^q|\mathscr{B})^{1/q} \tag{1.11}$$

证明 记 $E_1=\{\omega, E(\|f\|^p|\mathscr{B})=0\}, E_2=\{\omega, E(\|g\|^q|\mathscr{B})=0\}$，则 $E_1, E_2\in\mathscr{B}$，对于 E_1，由通常的 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\int_{E_1}|E(fg|\mathscr{B})|d\mu&\leqslant\int_{E_1}|fg|d\mu\\&\leqslant(\int_{E_1}\|f\|^pd\mu)^{1/p}(\int_{E_1}\|g\|^qd\mu)^{1/q}\\&=(\int_{E_1}E(\|f\|^p|\mathscr{B})d\mu)^{1/p}(\int_{E_1}E(\|g\|^q|\mathscr{B})d\mu)^{1/q}=0,\end{aligned}$$

恰是右端函数的积分. 同样地对于 E_2，上式仍成立. 于是在 E_1 或 E_2 上，$E(fg|\mathscr{B})=0$，(1.11)成立. 记 $E=\Omega\setminus(E_1\cup E_2)$，则在 E 上，由 Young 不等式

$$\begin{aligned}&\frac{\|f\|}{E(\|f\|^p|\mathscr{B})^{1/p}}\cdot\frac{\|g\|}{E(\|g\|^q|\mathscr{B})^{1/q}}\\&\qquad\leqslant\frac{1}{p}\frac{\|f\|^p}{E(\|f\|^p|\mathscr{B})}+\frac{1}{q}\frac{\|g\|^q}{E(\|g\|^q|\mathscr{B})},\end{aligned}$$

从而

$$E\left(\frac{|fg|}{E(\|f\|^p|\mathscr{B})^{1/p}E(\|g\|^q|\mathscr{B})^{1/q}}\chi_E|\mathscr{B}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{p}E\left(\frac{\|f\|^p}{E(\|f\|^p|\mathscr{B})}\chi_E\Big|\mathscr{B}\right)$$

$$+\frac{1}{q}E\left(\frac{\|g\|^q}{E(\|g\|^q|\mathscr{B})}\chi_E\Big|\mathscr{B}\right)\leqslant\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\chi_E=\chi_E.$$

换句话说，在 E 上有

$$E(|fg||\mathscr{B})\leqslant E(\|f\|^p|\mathscr{B})^{1/p}E(\|g\|^q|\mathscr{B})^{1/q},$$

与上面合在一起得出整个(1.11).

定理 4 若 f_n 为可测函数并且 $0\leqslant f_n\uparrow f$ $a.e.$ 则 $E(f_n|\mathscr{B})\uparrow E(f|\mathscr{B})$.

证明 由条件期望的性质，$E(f_n|\mathscr{B})$ 非负且单调递增，不妨设 $E(f_n|\mathscr{B})\uparrow h$，$\mu$-$a.e.$，由单调收敛定理，对于 $\forall A\in\mathscr{B}$，

$$\int_A h d\mu=\int_A \lim_{n\to\infty}E(f_n|\mathscr{B})d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A E(f_n|\mathscr{B})d\mu$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu=\int_A f d\mu=\int_A E(f|\mathscr{B})d\mu.$$

从而 $h=E(f|\mathscr{B})$.

定理 5(Fatou 引理) 若 $f_n\geqslant 0$ 为可测函数，则

$$E(\liminf_{n\to\infty}f_n|\mathscr{B})\leqslant\liminf_{n\to\infty}E(f_n|\mathscr{B}) \tag{1.12}$$

证明 记 $g_n=\inf_{m\geqslant n}f_m$，则 $g_n\uparrow\liminf_{n\to\infty}f_n$ 并且 $g_n\geqslant 0$，由定理 4

$$E(\liminf_{n\to\infty}f_n|\mathscr{B})=E(\lim_{n\to\infty}g_n|\mathscr{B})=\lim_{n\to\infty}E(g_n|\mathscr{B})$$

$$\leqslant\liminf_{n\to\infty}E(f_n|\mathscr{B}),a.e.$$

注 定理 4,5 都是关于实函数的条件期望的定理. 有必要说明的是，对于非可积的非负可测函数仍可定义条件期望，只不过条件期望未必是处处有限的. 其方法是对于 $f\geqslant 0$，作截断函数 $f^{(n)}=f\chi_{\{f\leqslant n\}}+n\chi_{\{f>n\}}$，然后令 $E(f|\mathscr{B})$ 是极限 $\lim_{n\to\infty}E(f^{(n)}|\mathscr{B})$. 定理 4.5 中的条件期望当作此理解.

定理 6(控制收敛定理) 若 $f_n\to f$ μ-$a.e.$，$g\in L_1(\mu)$ 并且 $\|f_n(\omega)\|\leqslant g(\omega)$ μ-$a.e.$，则 $E(f_n|\mathscr{B})\to E(f|\mathscr{B})$ μ-$a.e.$

证明 记 $h_n=\sup_{m\geqslant n}\|f_m-f\|$，$h_n'=\sup_{m\geqslant n}E(\|f_m-f\||\mathscr{B})$. 显然，$0\leqslant h_n\leqslant 2g$，$h_n$，$h_n'$ 均为单调下降函数序列. 记其 μ-$a.e.$ 极限

分别为 h 和 h'，由定理条件 $h=0,\mu\text{-}a.e.$ 从而 $Eh_n\to 0$. 另一方面由 Fatou 引理，

$$0\leqslant Eh'=\liminf_{n\to\infty}Eh'_n\leqslant\liminf_{n\to\infty}Eh_n=0.$$

所以 $h'=0,\mu\text{-}a.e.$

定理 7(Levy)　设 $\{\mathscr{B}_n,n\geqslant 1\}$ 是一列递增子 σ 代数，$\mathscr{B}_n\subset\mathscr{B}_{n+1}$ 并且 $\Sigma=\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n)$，则对于每个 $f\in L_1(\mu,X)$，

(i)　$E(f|\mathscr{B}_n)\to f,\mu\text{-}a.e.$

(ii)　$\|E(f|\mathscr{B}_n)-f\|_1\to 0\ (n\to\infty)$.

证明　记 $f_n=E(f|\mathscr{B}_n)$，考虑 $L_1(\mu,X)$ 的线性子空间

$$K=\{f\in L_1(\mu,X),f\text{ 满足(i) 和(ii)}\},$$

我们将证明实际上 $K=L_1(\mu,X)$.

首先，K 在 $L_1(\mu,X)$ 中稠密. 实际上，若 $f\in L_1(\mu,\mathscr{B}_n,X)$ 并且 $k\geqslant n$，则 $E(f|\mathscr{B}_k)=f$，所以 $f\in K$，并且由此 $K\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}L_1(\mu,\mathscr{B}_n,X)$. 但后者在 $L_1(\mu,X)$ 中稠密. 例如对于每个 $x\chi_A\in L_1(\mu,X)$（从而每个简单函数）有序列 $f_k\in\bigcup_{n=1}^{\infty}L_1(\mu,\mathscr{B}_n,X)$ 使得 $\|f_k-x\chi_A\|_1\to 0(k\to\infty)$，此事由下面方法得出：由 $\Sigma=\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n)$ 取 $A_k\in\mathscr{B}_{n_k}$ 使得 $\mu(A_k\triangle A)\to 0(k\to\infty)$. 令 $f_k=x\chi_{A_k}$，则

$$\|f_k-x\chi_A\|_1\leqslant\|x\|\mu(A_k\triangle A)\to 0\ (k\to\infty).$$

其次，K 是 $L_1(\mu,X)$ 的闭子空间. 对于 $\forall\ f\in L_1(\mu,X)$ 和 $\varepsilon>0$，取 $g\in L_1(\mu,\mathscr{B}_{n_0},X)$，使得 $\|f-g\|_1<\varepsilon/2$，当 $n\geqslant n_0$ 时，$E(g|\mathscr{B}_n)=g$，从而

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_1&\leqslant\|E(f|\mathscr{B}_n)-E(g|\mathscr{B}_n)\|_1\\&\quad+\|E(g|\mathscr{B}_n)-f\|_1\leqslant 2\|f-g\|_1<\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 f 满足(ii).

取 $g\in K$，则对于 $m,n\in N$，

$$\|f_n-f_m\|\leqslant\|E(f|\mathscr{B}_n)-E(g|\mathscr{B}_n)\|+\|E(g|\mathscr{B}_n)$$

$$- E(g|\mathscr{B}_m)\| + \|E(g|\mathscr{B}_n) - E(f|\mathscr{B}_m)\|$$

$$\leqslant 2\sup_{n\geqslant 1} h_n + \|E(g|\mathscr{B}_n) - E(g|\mathscr{B}_m)\|. \qquad (1.13)$$

其中 $h_n = E(\|f - g\| |\mathscr{B}_n)$，剩下只须证明 $h_n \to 0$.

h_n 关于 $\mathscr{B}_n$ 可测，对于每个 $\varepsilon > 0$，取

$A_1 = \{\omega, h_1(\omega) > \varepsilon\}$,

$\cdots$,

$A_k = \{\omega, h_1(\omega) \leqslant \varepsilon, \cdots, h_{k-1}(\omega) \leqslant \varepsilon, h_k(\omega) > \varepsilon\}$,

$\cdots, \cdots$

则 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，$A_k \in \mathscr{B}_k (k \geqslant 1)$ 并且

$$\mu(\omega, \sup_{k\leqslant n} h_k(\omega) > \varepsilon) = \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}\frac{h_k}{\varepsilon}d\mu \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}\|f - g\| d\mu$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|f - g\|_1,$$

令 $n \to \infty$，得到 $\mu(\omega, \sup_{k\geqslant 1} h_k(\omega) > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|f - g\|_1$. 对于 $\forall\, \delta > 0$，取 $g \in K$，使得 $\|f - g\|_1 < \delta\varepsilon$，则

$$\mu(\omega, \sup_{k\geqslant 1} h_k(\omega) > \varepsilon) \leqslant \delta.$$

于是 $h_n \to 0$，总之 f_n μ-$a.e.$ 收敛，其极限与 $L_1(\mu, X)$ 范数极限仅在零测度集上不同，所以 f 满足(i)，$f \in K$.

§2 鞅及其收敛定理

设 (Ω, Σ, μ) 是概率空间，Λ 是定向集(directed set)，$\{\mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是单调增加子 σ 代数族，即若 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$，当 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ 时，$\mathscr{B}_{\lambda_1} \subset \mathscr{B}_{\lambda_2}$. 函数族 $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 称为是与 $\{\mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 适应的(adapted)：若 f_λ 关于 $\mathscr{B}_\lambda$ 可测 $(\lambda \in \Lambda)$. 每个 f_λ 都可积的适应族称为可积适应函数族或可积适应过程.

定义 1 适应过程 $(f_\lambda,\mathscr{B}_\lambda,\lambda\in\Lambda)$ 称为 $L_p(\mu,X)$ 鞅(martingale)：若 $f_\lambda\in L_p(\mu,X)$ 并且对于任何 $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda,\lambda_1\leqslant\lambda_2$ 时

$$E(f_{\lambda_2}|\mathscr{B}_{\lambda_1})=f_{\lambda_1} \tag{2.1}$$

在许多情况下我们将讨论定向集 Λ 是自然数集 N 的鞅. 此时(2.1)等价于对于任何自然数 $m\geqslant n,E(f_m|\mathscr{B}_n)=f_n$.

例 1 §1 定理 7 中的函数序列 $(E(f|\mathscr{B}_n),\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 实际上是鞅. 对于 $f\in L_p(\mu,X)$，它是 $L_p(\mu,X)$ 中的鞅. 实际上对于 $f_n=E(f|\mathscr{B}_n)$，由条件期望的性质，$E(f_m|\mathscr{B}_n)=E(E(f|\mathscr{B}_m)|\mathscr{B}_n)=E(f|\mathscr{B}_n)=f_n(m\geqslant n)$. 定理 7 证明了这种鞅是 $L_1(\mu,X)$ 范数收敛的. 后面将证明 $L_1(\mu,X)$ 范数收敛鞅都具有这种形式.

通过具体地构造 σ 代数族还可以具体地给出这种鞅. 例如若 π_n 是 Ω 的一列逐步加细的分划，$f\in L_p(\mu,X)$，定义

$$f_n=\sum_{A\in\pi_n}\frac{1}{\mu(A)}\int_A fd\mu\chi_A \quad (\text{约定}\frac{0}{0}=0). \tag{2.2}$$

记由 π_n 的各子集生成的 σ 代数是 $\sigma(\pi_n)$，则 $(f_n,\sigma(\pi_n),n\geqslant 1)$ 是鞅. 这不难从直接计算得到.

例 2 空间 X 中的每个无穷树(infinite tree)对应一个 $L_1(\mu,X)$ 鞅，序列 $\{x_n\}\subset X$ 称为无穷树，若对于任何 $n\geqslant 1,x_n=\frac{1}{2}(x_{2n}+x_{2n+1})$. 令 μ 是 $[0,1)$ 中的 Lebesgue 测度，记

$$A_1^1=[0,1),A_2^2=[0,\frac{1}{2}),A_2^3=[\frac{1}{2},1),\cdots\cdots$$

$$A_k^i=\left[\frac{i-2^{k-1}}{2^{k-1}},\frac{i-2^{k-1}+1}{2^{k-1}}\right),$$

$$k=1,2,\cdots,i=2^{k-1},\cdots,2^k-1,$$

定义
$$f_k=\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1}x_i\chi_{A_k^i},\mathscr{B}_k=\sigma(A_k^i,2^{k-1}\leqslant i<2^k)$$

则 $(f_k,\mathscr{B}_k,k\geqslant 1)$ 是鞅.

例 3 若 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 是相互独立的期望为零的随机变量，$f_n=\sum_{i=1}^n a_i\xi_i,\mathscr{B}_n=\sigma(\xi_i,1\leqslant i\leqslant n)$，则 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是鞅. 实际上

$E(f_{n+1}|\mathscr{B}_n) = f_n + a_{n+1}E(\xi_{n+1}|\mathscr{B}_n) = f_n + a_{n+1}E\xi_{n+1} = f_n$, $(n \geqslant 1)$.

例 4 考虑由两点$\{-1,1\}$构成的离散度量空间. $\Omega = \{-1, 1\}^N$ 是其乘积度量空间. 每个 $\omega \in \Omega$ 是一个无穷序列，它的每个坐标上的数字是 -1 或 1. Ω 实际上是一个紧群. 设 Σ 是 Ω 的全体子集构成的 σ 代数，在 Σ 上定义如下的概率测度(Haar 测度)μ：若 δ_{-1}，δ_1 分别是在 -1 和 1 的 Dirac 质量，即 $\delta_i(j) = \delta_{ij}, i,j = -1, 1$，令

$$\mu = \left(\frac{\delta_{-1} + \delta_1}{2}\right)^{\otimes N} \tag{2.3}$$

现在考虑 σ 代数序列

$$\mathscr{B}_0 = \{\varnothing, \Omega\},$$

$$\mathscr{B}_1 = \sigma(\{(i_1, \omega_2, \omega_3, \cdots), \omega_k = \pm 1, k \geqslant 2\}, i_1 = \pm 1)$$

$$\cdots,\cdots$$

$$\mathscr{B}_n = \sigma(\{(i_1, \cdots, i_n, \omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \cdots), \omega_k = \pm 1, k \geqslant n\},$$
$$i_1 = \pm 1, \cdots, i_n = \pm 1).$$

由定义，$\mathscr{B}_n$ 是由 2^n 个事件生成的 σ 代数，可以进一步验证 $\mathscr{B}_n$ 中的每个基本事件恰恰被分成等概率的事件，它们成为 $\mathscr{B}_{n+1}$ 中的基本事件. 此外 $\Sigma = \sigma(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathscr{B}_n)$.

现在取 $X = c_0$. 定义 $f_n: \Omega \to c_0$ 使 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots)$ 时

$$f_n(\omega) = (\omega_1, \cdots, \omega_n, 0, \cdots)$$

则 $f_n(\omega) \in c_0$(特别地令 $f_0(\omega) \equiv 0$). 由于 f_n 仅依赖于前 n 个坐标，f_n 关于 $\mathscr{B}_n$ 可测.

对于 $\forall A \in \mathscr{B}_n$，例如 $A = \{(i_1, \cdots, i_n, \omega_{n+1}, \omega_{n+2}, \cdots), \omega_k = \pm 1, k \geqslant n+1\}$ 记 $A = A_{-1} \cup A_1$，其中

$$A_{-1} = \{(i_1, \cdots, i_n, -1, \omega_{n+2}, \cdots), \omega_k = \pm 1, k \geqslant n+2\}.$$

$$A_1 = \{(i_1, \cdots, i_n, 1, \omega_{n+2}, \cdots), \omega_k = \pm 1, k \geqslant n+2\}.$$

则由于 f_{n+1} 在 A_{-1}，A_1 上均取常值，从而

$$\int_A f_{n+1} d\mu = \int_{A_{-1}} f_{n+1} d\mu + \int_{A_1} f_{n+1} d\mu$$
$$= 2^{-(n+1)}(i_1, \cdots, i_n, -1, 0, \cdots)$$
$$+ 2^{-(n+1)}(i_1, \cdots, i_n, 1, 0, \cdots)$$
$$= 2^{-n}(i_1, \cdots, i_n, 0, \cdots) = \int_A f_n d\mu.$$

A 是 $\mathscr{B}_n$ 中任一基本事件(集合),其余事件均可表示为形如 A 的事件之并,故上式对于 $\mathscr{B}_n$ 中任一元成立. $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅.

定义 2 设 $(f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 是 $L_p(\mu, X)$ 鞅,

(1) 若 $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} \| f_\lambda \|_p < \infty$,称此鞅是 $L_p(\mu, X)$ 有界的.

(2) 若存在 $f \in L_p(\mu, X)$ 使得 $f_\lambda = E(f | \mathscr{B}_\lambda), \lambda \in \Lambda$,称此鞅是正则的.

(3) 若 $f \in L_p(\mu, X)$ 并且对于 $\forall\ A \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda$,

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \int_A f_\lambda d\mu = \int_A f d\mu,$$

称 f 为此鞅的右闭元(right-closed menber). 当 f 关于 $\sigma(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda)$ 可测时,称 f 为此鞅的最近右闭元.

定理 1 设 $(f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 是 $L_p(\mu, X)$ 鞅, $1 \leqslant p < \infty$,则以下条件等价:

(i) $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是 $L_p(\mu, X)$ 收敛的;

(ii) $(f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 是正则的;

(iii) $(f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 有右闭元;

(iv) 当空间 X 具有 RN 性质时,若 $p = 1$, $\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 一致可积或若 $p > 1$ 时 $\{f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是 $L_p(\mu, X)$ 有界的.

证明 (i)⇒(ii) 若 $\lim\limits_{\lambda \in \Lambda} \| f_\lambda - f \|_p = 0$,设 $g_\lambda = E(f | \mathscr{B}_\lambda)$. 由(2.1)对于每个 $\lambda_0 \in \Lambda$,当 $\lambda \geqslant \lambda_0$ 时, $E(f_\lambda | \mathscr{B}_{\lambda_0}) = f_{\lambda_0}$,从而

$$\| f_{\lambda_0} - g_{\lambda_0} \|_p = \| E(f_\lambda | \mathscr{B}_{\lambda_0}) - E(f | \mathscr{B}_{\lambda_0}) \|_p$$
$$\leqslant \| f_\lambda - f \|_p \to 0.$$

于是 $f_{\lambda_0} = g_{\lambda_0}$ μ-$a.e.$,亦即 $f_{\lambda_0} = E(f | \mathscr{B}_{\lambda_0})$, $\lambda_0 \in \Lambda$.

(ii)⇒(iii) 当 $f_\lambda = E(f|\mathscr{B}_\lambda)$ 时，对于 $\forall\ A \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda$，例如 $A \in \mathscr{B}_{\lambda_0}$，则当 $\lambda \geqslant \lambda_0$ 时，由鞅定义和条件期望的性质，

$$\int_A f_\lambda d\mu = \int_A E(f|\mathscr{B}_\lambda)d\mu = \int_A f d\mu$$

于是 $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}\int_A f_\lambda d\mu = \int_A f d\mu, f \in L_p(\mu, X)$，故 f 为右闭元.

(iii)⇒(i) 设 $f \in L_p(\mu,X)$ 是 $(f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 的右闭元，可以假设 f 是最近的右闭元，即 f 关于 $\mathscr{B}_\infty = \sigma(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda)$ 可测，否则取 $f_\infty = E(f|\mathscr{B}_\infty)$，则 f_∞ 为最近右闭元，对于 $\forall\ A \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda$，

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}\int_A f_\lambda d\mu = \int_A f_\infty d\mu.$$

应用 §1 定理 7 证明的同样方法可以证明 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_p(\mu, \mathscr{B}_\lambda, X) \subset L_p(\mu, \mathscr{B}_\infty, X)$，并且前者在后者之中稠密. 特别地，前者之中的简单函数全体在后者之中稠密. 对于 f_∞ 和 $\varepsilon > 0$，取 $f_\varepsilon = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}, x_i \in X, A_i \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda, A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，使得 $\| f_\varepsilon - f_\infty \|_p < \varepsilon/2$，此时存在 λ_0 使得 f_ε 是 $\mathscr{B}_{\lambda_0}$ 可测的，从而

$$\begin{aligned}\| f_\lambda - f_\infty \|_p &\leqslant \| f_\lambda - f_\varepsilon \|_p + \| f_\varepsilon - f_\infty \|_p \\ &= \| E(f_\infty - f_\varepsilon | \mathscr{B}_\lambda) \|_p + \| f_\varepsilon - f_\infty \|_p \\ &\leqslant 2 \| f_\infty - f_\varepsilon \|_p < \varepsilon.\end{aligned}$$

$\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是 $L_p(\mu, X)$ 收敛的.

(iv)⇒(ii) 若 X 具有 RN 性质，$\{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是一致可积的，由鞅性质可知极限

$$F(A) = \lim_{\lambda\in\Lambda}\int_A f_\lambda d\mu, A \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda \tag{2.4}$$

存在. F 是在代数 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda$ 上的向量测度并且是可数可加的. 由向量测度的延拓定理，易验证 $F \ll \mu$ 从而 $\overline{F} \ll \mu$，$\overline{F}$ 是 F 从 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda$ 到 $\sigma(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda)$ 的延拓. 若 π 是 Ω 到 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda$ 的分划，则

$$\sum_{A\in\pi} \| F(A) \| = \sum_{A\in\pi} \lim_{\lambda\in\Lambda} \left\| \int_A f_\lambda d\mu \right\|$$

$$\leqslant \lim_{\lambda\in\Lambda}\sum_{A\in\pi}\int_A \|f_\lambda\|d\mu \leqslant \sup_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda\|_1 < \infty.$$

F 在 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda$ 上是有界变差的.从而 $\bar{F}$ 是有界变差的.

由 RN 性质,存在 $f\in L_1(\mu,X)$ 使得

$$\bar{F}(A)=\int_A f d\mu, A\in\sigma(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda),$$

特别地,若 $A\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda$,则

$$\int_A f d\mu = \bar{F}(A) = F(A) = \lim_{\lambda\in\Lambda}\int_A f_\lambda d\mu,$$

f 是$(f_\lambda,\mathscr{B}_\lambda,\lambda\in\Lambda)$ 的右闭元. 由(iii)⇒(i) 的证明知,$\{f_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 $L_1(\mu,X)$ 收敛的.

若 $p>1$ 并且$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda\|_p<\infty$,由 Hölder 不等式得出

$$\int_A\|f_\lambda\|d\mu=\int_\Omega\chi_A\|f_\lambda\|d\mu\leqslant\mu(A)^{1/q}\|f_\lambda\|_p<\infty.$$

$\{f_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是一致可积的. 上述证明表明存在 $f\in L_1(\mu,X)$ 使得 $\lim_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda-f\|_1=0$. 现在只须证明 $f\in L_p(\mu,X)$. 取子序列 λ_n,使得 $\lambda_n\leqslant\lambda_{n+1}$,$f_{\lambda_n}\to f$ μ-$a.e.$,根据 Fatou 引理

$$\int_\Omega\|f\|^p d\mu\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega\|f_{\lambda_n}\|^p d\mu\leqslant\sup_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda\|_p^p<\infty$$

即得之. 由(iii)⇒(i) 的证明知道$\lim_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda-f\|_p=0$.

(ii)⇒(iv)　若$\lim_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda-f\|_p=0$,则 $f\in L_p(\mu,X)$,由(i)⇒(ii) 的证明,$f_\lambda=E(f|\mathscr{B}_\lambda)$. 此时

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda\|_p=\sup_{\lambda\in\Lambda}\|E(f|\mathscr{B}_\lambda)\|_p\leqslant\|f\|_p<\infty.$$

对于 $p=1$,

$$\int_A\|f_\lambda\|d\mu\leqslant\int_A E(\|f\||\mathscr{B}_\lambda)d\mu=\int_A\|f\|d\mu$$

λ 是任意的,故积分具有一致绝对连续性,$\{f_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 一致可积.

引理 (极大引理)　设$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是 $L_1(\mu,X)$ 鞅,$f^*(\omega)=\sup_{n\geqslant 1}\|f_n(\omega)\|$(称 f^* 是此鞅的极大函数 maximal function),则

对于 $\forall\ \delta > 0$

$$\delta\mu(\omega, f^* > \delta) \leqslant \| f_n \|_1. \tag{2.5}$$

证明 记 $A_n = \{\omega, \sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \| f_k(\omega) \| \geqslant \delta\}$

$A^{(1)} = \{\omega, \| f_1(\omega) \| > \delta\}, \cdots,$

$A^{(k)} = \{\omega, \| f_1(\omega) \| \leqslant \delta, \cdots, \| f_{k-1}(\omega) \| \leqslant \delta, \| f_k(\omega) \| > \delta\}.$

则 $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A^{(k)}$ 并且 $A^{(i)} \cap A^{(j)} = \varnothing (i \neq j)$，从而

$$\begin{aligned}\delta\mu(A_n) &= \delta\sum_{k=1}^{n}\mu(A^{(k)}) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{A^{(k)}} \| f_k(\omega) \| d\mu \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{A^{(k)}} E(\| f_n \| \mid \mathscr{B}_k) d\mu \leqslant \| f_n \|_1.\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 即得到所要的结果.

定理 2 每个 $L_1(\mu, X)$ 收敛鞅 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ $a.e.$ 收敛.

证明 注意当 m 固定时，$(f_n - f_m, \mathscr{B}_n, n \geqslant m)$ 是鞅，由极大引理，对于 $\forall\ \delta > 0$，

$$\mu(\omega, \sup_{n\geqslant m} \| f_n(\omega) - f_m(\omega) \| > \delta) \leqslant \frac{1}{\delta} \sup_{n\geqslant m} \| f_n - f_m \|_1,$$

对于 $\delta > 0, \varepsilon > 0$，取 n_0 使当 $m, n \geqslant n_0$ 时，$\| f_n - f_m \|_1 < \varepsilon\delta$，则

$$\mu(\omega, \sup_{n\geqslant m} \| f_n(\omega) - f_m(\omega) \| > \delta) \leqslant \frac{1}{\delta} \cdot \varepsilon\delta = \varepsilon$$

易知 f_n 是 μ-$a.e.$ 收敛的.

定理 3(Chatterji) 设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 $L_1(\mu, X)$ 有界鞅，

$$F(A) = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu, \quad A \in \bigcup_{n\in N} \mathscr{B}_n. \tag{2.6}$$

若 $F = F_c + F_s$ 是 F 的 Lebesgue 分解，则 f_n $a.e.$ 收敛于一可积函数当且仅当 F_c 关于 μ 具有 RN 导数 f 并且此时

$$\lim_{n\to\infty} f_n = E(f \mid \sigma(\bigcup_{n\in N} \mathscr{B}_n)) \quad a.e. \tag{2.7}$$

证明 充分性 若 $f \in L_1(\mu, X)$ 是 F_c 关于 μ 的 RN 导数，即

$$F_c(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \sigma(\bigcup_{n\in N} \mathscr{B}_n)$$

记 $f'_n = E(f|\mathscr{B}_n)$，则 $(f'_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是正则鞅，从而 $f'_n \to E(f|\sigma(\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n))a.e.$，令 $h_n = f_n - f'_n$，则 $(h_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 也是鞅. 我们往证 $h_n \to 0\ a.e.$

由鞅性质，对于每个 $A \in \mathscr{B}_n$，

$$\int_A h_n d\mu = \int_A f_n d\mu - \int_A f'_n d\mu = \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu$$
$$= F(A) - F_c(A) = F_s(A).$$

由 $\{f_n\}$ 的 $L_1(\mu, X)$ 有界性，F 是有界变差的，从而 F_c, F_s 是有界变差的. 但 F_s 与 μ 互为奇异，故对 $\forall\, \delta > 0, 0 < \varepsilon < 1$，存在 $A \in \bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$，

$$\mu(\Omega\backslash A) + \|F_s\|(A) < \varepsilon\delta/2 \tag{2.8}$$

若 $A \in \mathscr{B}_{n_0}$，由极大引理的证明

$$\mu(\omega, \sup_{m\geqslant n\geqslant n_0} \|h_n(\omega)\| > \varepsilon)$$
$$= \mu(\{\omega, \sup_{m\geqslant n\geqslant n_0} \|h_n(\omega)\| > \varepsilon\} \cap A)$$
$$+ \mu(\{\omega, \sup_{m\geqslant n\geqslant n_0} \|h_n(\omega)\| > \varepsilon\}\backslash A)$$
$$< \frac{1}{\varepsilon}\int_A \|h_m(\omega)\| d\mu + \varepsilon\delta/2$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|F_s\|(A) + \varepsilon\delta/2 < \delta$$

令 $m \to \infty$ 得到 $\mu(\omega, \sup_{n\geqslant 1}\|h_n(\omega)\| > \varepsilon) < \delta$. ε, δ 是任意的，故 $h_n \to 0$ 从而 $f_n \to E(f|\sigma(\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n))a.e.$

必要性． 若 $f_n \to g\ a.e.$ 并且 $g \in L_1(\mu, X)$，则 g 关于 $\sigma(\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n)$ 可测，记 $f'_n = E(g|\mathscr{B}_n)$，$h_n = f_n - f'_n$，则 $(h_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 $L_1(\mu, X)$ 有界鞅. 令

$$H_1(A) = \lim_{n\to\infty}\int_A h_n d\mu, \quad A \in \bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n.$$

记 $H_1 = H_{11} + H_{12}$ 是 H_1 关于 μ 的 Lebesgue 分解. $H_{11} \ll \mu$，H_{12} 与 μ 互为奇异. 对于每个 $x^* \in X^*$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_A x^* h_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A x^*(f_n - f'_n)d\mu$$
$$= x^* H_{11}(A) + x^* H_{12}(A).$$

$x^* H_{11} \ll \mu$，记 $h_{x^*} = \dfrac{dx^* H_{11}}{d\mu}$，由充分性部分的证明，$x^* h_n \to h_{x^*}$，由 §1 定理 7，$f'_n \to g$. 从而 $f_n - f'_n \to 0\ a.e.$

所以 $h_{x^*} = 0\ a.e.$，从而 $H_{11} \equiv 0$，$H_1 = H_{12}$ 与 μ 奇异.

若令 $G_1(A) = \int_A g d\mu, A \in \bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$. 则当 n 足够大时，

$$F(A) = \int_A f_n d\mu = \int_A g d\mu + \int_A (f_n - g)d\mu$$
$$= \int_A g d\mu + \int_A (f_n - f'_n)d\mu = G_1(A) + H_1(A)$$

显然 $G_1 \ll \mu$，由 Lebesgue 分解的唯一性，$G_1 = F_c$，$H_1 = F_s$，并且 g 是 F_c 关于 μ 的 RN 导数. 此时

$$\lim_{n\to\infty} f_n = g = E(g|\sigma(\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n)) \quad a.e.$$

推论 若 X 具有 RN 性质，则 $L_1(\mu,X)$ 有界鞅$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ $a.e.$ 收敛.

证明 令

$$F(A) = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu, \quad A \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$$

若 $F = F_c + F_s$ 是 F 关于 μ 的 Lebesgue 分解. 由于 $L_1(\mu,X)$ 有界性，F 是有界变差的从而 F_c 是有界变差的，$F_c \ll \mu$. X 的 RN 性质保证了 F_c 关于 μ 具有 RN 导数 f，于是定理 3 保证了 $f_n \to E(f|E(\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n))\ a.e.$

定理 1、定理 2 分别称为鞅的平均收敛和点态收敛定理.

回忆一个无穷树$\{x_n\}$，我们称$\{x_n\}$是有界的，若$\sup_{n\geqslant 1}\|x_n\| < \infty$. 称$\{x_n\}$是 δ 树(δ-tree)，若对于任何 $n\geqslant 1$，$\min\{\|x_n - x_{2n}\|, \|x_n - x_{2n+1}\|\} \geqslant \delta > 0$.

定理 4

(i) 含有有界无穷 δ 树的 Banach 空间不具有 RN 性质.

(ii) c_0 不具有 RN 性质，从而任何包含与 c_0 同构的子空间的 Banach 空间不具有 RN 性质.

特别地，$c, C[a,b], l^\infty, L^\infty[a,b]$ 不具有 RN 性质.

证明 1° 考虑例 2 中定义的鞅$(f_k, \mathscr{B}_k, k \in N)$，若$\{x_n\}$是有界无穷 δ 树，则$\sup\limits_{n\geqslant 1} \| f_k \|_\infty \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1} \| x_n \| < \infty$，同时

$$\| f_k(\omega) - f_{k+1}(\omega) \| \geqslant \min\{ \| x_n - x_{2n} \|,$$
$$\| x_n - x_{2n+1} \| \} \geqslant \delta > 0$$

f_k 不是 μ-$a.e.$ 收敛的. 由定理 3 知道 X 不具有 RN 性质.

2° 例 4 中定义的鞅$(f_n, \mathscr{B}_k, k \geqslant 1)$是 c_0 值的，$(f_n, \mathscr{B}_k, k \geqslant 1)$是 $L_1(\mu, X)$ 有界但不是 μ-$a.e.$ 收敛的. 从而 c_0 不具有 RN 性质. 由 RN 性质的定义知道，当子空间不具有 RN 性质时，全空间不会具有 RN 性质.

其实，很容易构造出 c_0 中的有界无穷 δ 树，例如

$$x_1 = (1,0,\cdots), x_2 = (1,1,0,\cdots)$$
$$x_3 = (1,-1,0,\cdots), x_4 = (1,1,1,0,\cdots),$$
$$x_5 = (1,1,-1,0,\cdots), x_6 = (1,-1,1,0,\cdots),$$
$$x_7 = (1,-1,-1,0,\cdots), \cdots, \cdots.$$

便是 c_0 中的有界无穷 1 树.

在测度空间(Ω, Σ, μ)中，集合 $A \in \Sigma$ 称为一个原子(atom). 若 $\mu(A) > 0$ 并且对于任何 $E \in \Sigma, E \subset A$ 时，或者 $\mu(E) = 0$，或者 $\mu(E) = \mu(A)$. μ 称为是纯原子测度(pure atom measure)，若 Ω 是原子的可列并. μ 称为是无原子的(nonatom measure)，若 Σ 中不含任何原子. 对于一个测度 μ，必存在 $\Omega_0 \in \Sigma$ 使得 $\mu|_{\Omega_0 \cap \Sigma}$ 是纯原子的，$\mu|_{(\Omega \setminus \Omega_0) \cap \Sigma}$ 是无原子的，并且

$$\mu = \mu|_{\Omega_0 \cap \Sigma} + \mu|_{(\Omega \setminus \Omega_0) \cap \Sigma},$$

这一等式称为 μ 的原子分解. 容易验证一个 Σ 可测函数在 Σ 的原子上一定取常值. 现在我们对于纯原子测度有一个简单的事实.

定理 5 任一 Banach 空间 X 关于纯原子测度具有 RN 性质.

证明 容易知道,任一σ代数中原子的个数至多有可数多个.若(Ω,Σ,μ)是纯原子测度空间,其原子全体为$A_n(n\geqslant 1)$.若$F:\Sigma\to X$是μ连续的有界变差测度,定义函数

$$f(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(A_n)}{\mu(A_n)}\chi_{A_n}(\omega) \tag{2.9}$$

对于每个$A\in\Sigma$,A必为某些A_n的并集,则

$$\int_A f(\omega)d\mu=\sum_{A_n\subset A}\int_{A_n}\frac{F(A_n)}{\mu(A_n)}\chi_{A_n}d\mu=\sum_{A_n\subset A}F(A_n)=F(A).$$

f是F关于μ的RN导数.结论得证.

定理 6(Chatterji) 设X是Banach空间,下列诸条件当对于所有$L_1(\mu,X)$鞅$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$成立时是等价的:

(i) X关于μ具有RN性质;

(ii) 若$\sup\limits_{n\in N}\|f_n\|_1<\infty$,则$f_n$ μ-$a.e.$收敛;

(iii) 若$\sup\limits_{n\in N}\|f_n\|_1<\infty$,则$f_n$弱$\mu$-$a.e.$收敛;

(iv) 若对于某个$c>0$,$\sup\limits_{n\in N}\|f_n\|_\infty\leqslant c$,则$f_n$ μ-$a.e.$收敛;

(v) 若对于某个$c>0$,$\sup\limits_{n\in N}\|f_n\|_\infty\leqslant c$,则$f_n$弱$\mu$-$a.e.$收敛;

(vi) 若$\{f_n,n\geqslant 1\}$一致可积,则f_n $L_1(\mu,X)$范数收敛.

证明 不失一般性,均设$\sigma(\bigcup\limits_{n\in N}\mathscr{B}_n)=\Sigma$.

(i)⇒(ii) 即推论.(ii)⇒(iii) 显然.现证(iii)⇒(vi).

设$\{f_n,n\geqslant 1\}$一致可积,则$\sup\limits_{n\in N}\|\quad\|_1<\infty$,(iii)保证了有可测函数$f$,$x^*f_\lambda\to x^*f$ μ-$a.e.$ $(\forall x^*\in X^*)$.于是$\|x^*f_n-x^*f\|_1\to 0$,$x^*f\in L_1(\mu)$.由定理1,$x^*f_n=E(x^*f|\mathscr{B}_n)$.$x^*$是任意的,故$f_n=E(f|\mathscr{B}_n)$.这里$f$是Bochner可积的,因为若令$F(A)=\int_A fd\mu$,$A\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$,$\{f_n\}$的$L_1(\mu,X)$有界性说明$F$在$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$上是有界变差的,从而$F$在$\Sigma$上有界变差,故$f\in L_1(\mu,X)$.$f$是$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$的右闭元.由定理1的证明,$\{f_n\}$是$L_1(\mu,X)$收敛的.

(vi)⇒(i) 设 $F:\Sigma\to X$ 是有界变差测度，$F\ll\mu$. 考虑从 Ω 到 Σ 的逐步加细的分划序列 $\{\pi_n,n\geqslant 1\}$，使得 $\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(\pi_n))=\Sigma$.（为了我们的目的，总可设 Σ 满足此条件，见后面 Ⅳ. §1）. 定义

$$f_n=\sum_{A\in\pi_n}\frac{F(A)}{\mu(A)}\chi_A,\text{（约定}\frac{0}{0}=0\text{）},\tag{2.10}$$

我们已经知道 $(f_n,\sigma(\pi_n),n\geqslant 1)$ 是鞅. 直接验证可知 $\{f_n,n\geqslant 1\}L_1(\mu,X)$ 有界并且积分关于 μ 是一致绝对连续的，从而是一致可积的. (vi) 则保证了 f_n $L_1(\mu,X)$ 范数收敛于 f. 对于 $A\in\bigcup_{n\in N}\sigma(\pi_n)$，自然有

$$\int_A fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_A f_nd\mu.$$

当 $A\in\sigma(\pi_{n_0})$ 并且 $n\geqslant n_0$ 时，$F(A)=\int_A f_nd\mu$，从而在 $\bigcup_{n\in N}\sigma(\pi_n)$ 上，$F(A)=\int_A fd\mu$. 由延拓定理知道此式在整个 Σ 上成立. f 即是 F 关于 μ 的 RN 导数.

(iii)⇒(v) 显然，现证(v)⇒(iv). 若 f_n 弱 μ-$a.e.$ 收敛于可测函数 f. 类似于(iii)⇒(vi) 的证明可得出 $f\in L_1(\mu,X)$ 和 $f_n=E(f|\mathscr{B}_n)$. Levy 定理(§1 定理 7) 给出 $f_n\to f$ μ-$a.e.$

(iv)⇒(i) 容易知道，当(iv) 对于某个 c 成立时，(iv) 对于任意 c 均成立. 现在设 $F:\Sigma\to X$ 是有界变差 μ 连续测度. 此时 $\|F\|:\Sigma\to[0,\infty)$ 是可数可加 μ 连续实值测度，先假定对于 $k>0$，

$$\mu(\omega,\frac{d\|F\|}{d\mu}\leqslant k)=1\tag{2.11}$$

此时对于每个 $A\in\Sigma$，$\|F\|(A)\leqslant k\mu(A)$. 仍取(vi)⇒(i) 证明中的 π_n 并且象(2.10) 一样定义 f_n，则 $\|f_n\|_\infty\leqslant k(n\geqslant 1)$，(iv) 保证了 $f_n\to f$ μ-$a.e.$. 自然地，$\|f\|_\infty\leqslant k$，从而 $\|f_n-f\|_1\to 0$，由(i) 与(vi) 的等价性的证明知道 f 是 F 关于 μ 的 RN 导数.

若 F 不满足(2.11)，取 $A_k=\{\omega,\frac{d\|F\|}{d\mu}\leqslant k\}$，则 $A_k\subset A_{k+1}$，

$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$（注意$\frac{d\|F\|}{d\mu} \in L_1$）. 设 $F_k(A) = F(A \cap A_k)$，则

$$\|F_k\|(A) = \|F\|(A \cap A_k) \leqslant k\mu(A \cap A_k) \leqslant k\mu(A).$$

$(\forall A \in \Sigma)$. 由上述证明，存在 $f_k \in L_1(\mu, X)$，使得

$$F_k(A) = \int_A f_k d\mu, A \in \Sigma.$$

同时至多相差一个零测度集，我们有

$$f_k(\omega) = 0, \omega \in \Omega \backslash A_k$$

$$f_k(\omega) = f_{k'}(\omega), \omega \in A_{k'}, k \geqslant k'$$

从而

$$\int_\Omega \|f_k - f_{k'}\| d\mu = \int_{\Omega \backslash A_{k'}} \|f_k\| d\mu = \|F_k\|(\Omega \backslash A_{k'})$$

$$= \|F\|(A_k \cap (\Omega \backslash A_{k'})) \leqslant \|F\|(\Omega \backslash A_{k'}).$$

于是 $\lim_{k, k' \to \infty} \|f_k - f_{k'}\|_1 = 0$，$\{f_k\}$ 是 $L_1(\mu, X)$ 中的 Cauchy 列.

不妨设 $\|f_k - f\|_1 \to 0$，则 $f \in L_1(\mu, X)$，并且对于 $\forall A \in \Sigma$，

$$F(A) = \lim_{k \to \infty} F(A \cap A_k) = \lim_{k \to \infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu.$$

定理 7 设 X 是 Banach 空间，则

(i) X 具有 RN 性质当且仅当 X 的每个可分闭子空间具有 RN 性质.

(ii) 若 $Y \sim X$，则 X, Y 同时具有（或不具有）RN 性质.

(iii) 若 $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus X_n)_{l_p}$ $(1 < p < \infty)$，其中每个 X_n 具有 RN 性质，则 X 具有 RN 性质.（依定义这里 $X = \{x = (x_n), x_n \in X_n, \|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p)^{1/p} < \infty\}$.

(iv) 若 X 具有 RN 性质，则 $L_p(\mu, X)$ $(1 < p < \infty)$ 也具有 RN 性质.

证明 1° 必要性显然，现证充分性. 设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 $L_1(\mu, X)$ 有界鞅. 每个 f_n 具有几乎可分值. 设 $Q \in \Sigma$，$\mu(Q) = 0$，每

个 f_n 在 $\Omega\backslash Q$ 上有可分值，记

$$E = \overline{\mathrm{span}}\{f_n(\omega), \omega \in \Omega\backslash Q, n \geqslant 1\},$$

则 E 是 X 的可分子空间. 实际上允许在零测度集上不相同 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 可视为取值于 E 的鞅. E 具有 RN 性质时，f_n $a.e.$ 收敛. 回到空间 X，f_n 仍是 $a.e.$ 收敛的. 定理 6 说明 X 具有 RN 性质.

2° 若 X 具有 RN 性质，$T: X \to Y$ 是同构映射，T 是到上的并且对于每个 $x \in X$，$a\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant b\|x\|$，$a, b > 0$ 为常数. 此时对于每个 Y 值鞅 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$，$(T^{-1}f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 X 值鞅. $\sup\limits_{n \in N}\|f_n\|_1 < \infty$ 时，$\sup\limits_{n \in N}\|T^{-1}f_n\|_1 < \infty$，$T^{-1}f_n$ $a.e.$ 收敛时，f_n $a.e.$ 收敛. 由定理 6，Y 具有 RN 性质. 反过来的证明也一样.

3° 设每个 X_n 具有 RN 性质，$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 X 值鞅. 由定理 6，不妨假设 $\sup\limits_{n \geqslant 1}\|f_n\|_p \leqslant c$. 注意对于每个 $\omega \in \Omega$，$f_n(\omega) = (f_n^{(1)}(\omega), f_n^{(2)}(\omega), \cdots, \cdots)$ 并且对于每个固定的 $i \geqslant 1$，$(f_n^{(i)}, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 X_i 值鞅，$\sup\limits_{n \geqslant 1}\|f_n^{(i)}\|_p < \infty$，于是 $f_n^{(i)} \to f^{(i)}$ $a.e.$，记 $f(\omega) = (f^{(1)}(\omega), f^{(2)}(\omega), \cdots)$，我们证明对于几乎所有 $\omega \in \Omega$. $f(\omega) \in X$ 并且 $f \in L_p(\mu, X)$. 实际上对于 $\forall\, m \geqslant 1$，

$$(f_n^{(1)}(\omega), \cdots, f_n^{(m)}(\omega), 0, \cdots) \to (f^{(1)}(\omega), \cdots, f^{(m)}(\omega), 0, \cdots)$$

从而几乎处处有

$$\sum_{i=1}^{m}\|f^{(i)}(\omega)\|_{X_i}^{p} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\|f_n^{(i)}(\omega)\|_{X_i}^{p}$$

应用 Fatou 引理和控制收敛定理得到

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_\Omega \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\|f^{(i)}(\omega)\|_{X_i}^{p}d\mu \\
&\leqslant \lim_{m\to\infty}\int_\Omega \sum_{i=1}^{m}\|f^{(i)}(\omega)\|_{X_i}^{p}d\mu \\
&= \lim_{m\to\infty}\int_\Omega \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\|f_n^{(i)}(\omega)\|_{X_i}^{p}d\mu \\
&= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \sum_{i=1}^{m}\|f_n^{(i)}(\omega)\|_{X_i}^{p}d\mu \leqslant c.
\end{aligned}$$

现在，由于 $f_n^{(i)}$ 必 $L_p(\mu,X_i)$ 收敛于 $f^{(i)}$，由定理 1，$E(f^{(i)}|\mathscr{B}_n) = f_n^{(i)}$，从而 $E(f|\mathscr{B}_n) = f_n$. f 是 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 的右闭元. 再由定理 1 得出 $f_n L_p(\mu,X)$ 收敛. 定理 2 说明 f_n $a.e.$ 收敛. 从而 X 具有 RN 性质.

4° 设 X 具有 RN 性质，$(f_n,\mathscr{B}'_n,n\geqslant 1)$ 是以 (Ω',Σ',μ') 为测度空间的 $L_p(\mu,X)$ 值鞅并且

$$\sup_{n\in N}\|f_n\|_p = \left(\int_{\Omega'}\|f_n(\omega')\|_{L_p(\mu,X)}^p d\mu'\right)^{1/p}$$
$$= \left(\int_{\Omega'}\int_{\Omega}\|f_n(\omega',\omega)\|_X^p d\mu' d\mu\right)^{1/p} < \infty \qquad (2.12)$$

其中 $f_n(\omega') = f_n(\omega',\omega) \in X, \omega' \in \Omega', \omega \in \Omega$，由鞅性质

$$E(f_{n+1}(\omega')|\mathscr{B}'_n) = f_n(\omega').$$

因此对于几乎所有 $\omega\in\Omega$、$f_n(\omega',\omega)$ 是 X 值鞅.(2.12) 说明对于几乎所有 $\omega\in\Omega$，它是 $L_p(\mu',X)$ 有界的. X 具有 RN 性质，由定理 1，存在 $f(\omega',\omega)\in L_p(\mu',X)$ 使得

$$\int_{\Omega'}\|f_n(\omega',\omega) - f(\omega',\omega)\|^p d\mu' \to 0 \qquad (2.13)$$

另一方面，Chatterji 定理说明，对于几乎所有 $\omega'\in\Omega'$ 和 $\omega\in\Omega$，

$$\|f_n(\omega',\omega) - f(\omega',\omega)\|_X \to 0. \qquad (2.14)$$

必要时改变各个函数在一个零测度集上的值，由 $f_n(\omega',\omega)$ 关于 ω 的可测性，$f(\omega',\omega)$ 关于 μ 可测. 实际上(2.13)μ-$a.e.$ 成立，即

$$\int_{\Omega'}\|f_n(\omega',\omega)\|^p d\mu' \to \int_{\Omega'}\|f(\omega',\omega)\|^p d\mu', \mu\text{-}a.e.$$

由 Fatou 引理和(2.12)

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega'}\|f(\omega',\omega)\|^p d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega}\int_{\Omega'}\|f_n(\omega',\omega)\|^p d\mu' d\mu$$
$$\leqslant \sup_{n\in N}\|f_n\|_p < \infty.$$

即 $f(\omega') = f(\omega',\omega) \in L_p(\mu,X)$

最后，(2.12) 表明 $f_n(\omega')$ 是一致可积的，再由(2.14) 得出

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega'}\|f_n(\omega',\omega) - f(\omega',\omega)\|_X d\mu d\mu' \to 0$$

或 $\| f_n(\omega') - f(\omega') \|_1 \to 0$,从而

$$E(f(\omega') | \mathscr{B}'_n) = f_n(\omega').$$

由 $f(\omega') \in L_p(\mu, X)$ 和 Levy 定理得出 $f_n(\omega') \to f(\omega')$ μ'-$a.e.$,于是 $L_p(\mu, X)$ 具有 RN 性质}

§3 停时与鞅

定义 1 (设 Ω, Σ, μ) 是概率空间,$\{\mathscr{B}_n, n \geqslant 1\}$ 是 Σ 的子 σ 代数的递增序列,映射 $\tau: \Omega \to N \cup \{\infty\}$ 称为一个停时(stopping time),若对于任何 $n \geqslant 1$,$\{\omega, \tau(\omega) \leqslant n\} \in \mathscr{B}_n$. 当 $\mu(\tau = \infty) = 0$ 时,称 τ 为有限停时. 当 $\sup\limits_{\omega \in \Omega} \tau(\omega) < \infty$ 时,称 τ 为有界停时. 有界停时的全体记为 T.

有时称递增 σ 代数序列为一个随机基(stochastic base).

由于 $\{\mathscr{B}_n, n \geqslant 1\}$ 是递增的,定义中的 $\{\omega, \tau(\omega) \leqslant n\} \in \mathscr{B}_n$ 可以换为 $\{\omega, \tau(\omega) = n\} \in \mathscr{B}_n$. 此外,若规定 $\tau \leqslant \sigma$ 当且仅当 $\tau(\omega) \leqslant \sigma(\omega)$ $a.e.$,则"$\leqslant$"是 T 或全体停时集合上的半序,从而使之成为定向集.

定理 1 设 $(\mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是随机基,则

(i) $\tau(\omega) \equiv k$ 是停时.

(ii) τ, σ 是停时,则 $\tau \wedge \sigma, \tau \vee \sigma, \tau + \sigma$ 是停时.

(iii) τ_k 是停时($k \geqslant 1$),则 $\sup\limits_{k \geqslant 1} \tau_k, \inf\limits_{k \geqslant 1} \tau_k$ 是停时.

证明 1° $\{\tau = n\} = \begin{cases} \phi, n \neq k \\ \Omega, n = k \end{cases}$,故 $\{\tau = n\} \in \mathscr{B}_n, (n \geqslant 1)$.

2° 由下列诸式可知

$$\{\tau \wedge \sigma \leqslant n\} = \{\tau \leqslant n\} \cup \{\sigma \leqslant n\} \in \mathscr{B}_n,$$

$$\{\tau \vee \sigma \leqslant n\} = \{\tau \leqslant n\} \cap \{\sigma \leqslant n\} \in \mathscr{B}_n,$$

$$\{\tau + \sigma \leqslant n\} = \bigcup_{i=1}^{n-1} (\{\tau = i\} \cap \{\sigma = n - i\}) \in \mathscr{B}_n.$$

3° 同样地

$$\{\sup_{k\geqslant 1}\tau_k \leqslant n\} = \bigcap_{k\geqslant 1}\{\tau_k \leqslant n\} \in \mathscr{B}_n.$$

$$\{\inf_{k\geqslant 1}\tau_k \leqslant n\} = \bigcup_{k\geqslant 1}\{\tau_k \leqslant n\} \in \mathscr{B}_n.$$

定义 2　设 τ 是停时，称

$$\mathscr{B}_\tau = \{A, A \in \Sigma, A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{B}_n, n \geqslant 1\},$$

是与 τ 相应的 σ 代数.

直接验证可知 $\mathscr{B}_\tau$ 确为 σ 代数，函数 $\tau(\omega)$ 是 $\mathscr{B}_\tau$ 可测的.

定理 2　设 τ, σ 是停时

(i) $\tau \leqslant \sigma$，则 $\mathscr{B}_\tau \subset \mathscr{B}_\sigma$

(ii) $\{\tau = \sigma\}, \{\tau < \sigma\}, \{\tau \leqslant \sigma\}$ 均同时属于 $\mathscr{B}_\tau$ 和 $\mathscr{B}_\sigma$.

(iii) 若 $A \in \mathscr{B}_\tau$，则 $\tau_A = \tau\chi_A + \infty\chi_{A^c}$ 是停时.

证明　1° 对于每个 $A \in \mathscr{B}_\tau$ 和 $n \geqslant 1$，由定义 $A \cap \{\tau \leqslant n\} \in \mathscr{B}_n$. 此时 $A \cap \{\sigma \leqslant n\} = A \cap \{\sigma \leqslant n\} \cap \{\tau \leqslant n\} \in \mathscr{B}_n$，所以 $A \in \mathscr{B}_\sigma$，即 $\mathscr{B}_\tau \subset \mathscr{B}_\sigma$.

2°　$\{\tau = \sigma\}$ 作为一个集合，

$$\{\tau = \sigma\} \cap \{\tau = n\} = \{\sigma = n\} \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{B}_n.$$

$$\begin{aligned}\{\tau < \sigma\} \cap \{\tau = n\} &= \{\sigma > n\} \cap \{\tau = n\} \\ &= \{\sigma \leqslant n\}^c \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{B}_n.\end{aligned}$$

$$\{\tau < \sigma\} \cap \{\sigma = n\} = \{\tau < n\} \cap \{\sigma = n\} \in \mathscr{B}_n$$

$$\{\tau \leqslant \sigma\} = \{\tau < \sigma\} \cup \{\tau = \sigma\}.$$

第一式说明 $\{\tau = \sigma\} \in \mathscr{B}_\tau$. 将 $\{\tau = n\}$ 换为 $\{\sigma = n\}$ 则 $\{\tau = \sigma\} \in \mathscr{B}_\sigma$. 第二式说明 $\{\tau < \sigma\} \in \mathscr{B}_\tau$，第三式说明 $\{\tau < \sigma\} \in \mathscr{B}_\sigma$. 最后的式子说明 $\{\tau \leqslant \sigma\} \in \mathscr{B}_\tau \cap \mathscr{B}_\sigma$.

定理 3　设 $\{\mathscr{B}_n, n \geqslant 1\}$ 是随机基，$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是适应过程，$\tau \in T$，则 $f_\tau(\omega) = f_{\tau(\omega)}(\omega)$ 是关于 $\mathscr{B}_\tau$ 可测的函数. 若此时令 $\mathscr{B}_\infty = \sigma(\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n)$，$f_\infty$ 是 $\mathscr{B}_\infty$ 可测的任一函数，则上述 τ 可以是任一停时.

证明　事实上

$$f_\tau(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)\chi_{\{\tau=n\}} + f_\infty(\omega)\chi_{\{\tau=\infty\}}. \tag{3.1}$$

对于 X 中任一开集 B,

$$\{\omega, f_\tau(\omega) \in B\} \cap \{\tau = n\} = \{\omega, f_n(\omega) \in B\} \in \mathscr{B}_n$$

$$\{\omega, f_\tau(\omega) \in B\} \cap \{\tau = \infty\} = \{\omega, f_\infty(\omega) \in B\} \in \mathscr{B}_\infty$$

于是$\{\omega, f_\tau(\omega) \in B\} \in \mathscr{B}_\tau$,即 f_τ 关于 $\mathscr{B}_\tau$ 可测.

例 设B是X中的Borel集.$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$是适应序列,令$\tau(\omega) = \inf\{n, f_n(\omega) \in B\}$,$(\inf \varnothing = \infty)$,则$\tau$是停时,实际上

$$\{\tau = n\} = \{f_n \in B\} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \{f_i \overline{\in} B\} \in \mathscr{B}_n, (n \geqslant 1),$$

$$\{\tau = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \overline{\in} B\},$$

故得之.

定理 4 设$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$是 $L_1(\mu, X)$ 鞅,则

(i) 对于任何 $\tau, \sigma \in T$,当 $\sigma \leqslant \tau$ 时,$E(f_\tau | \mathscr{B}_\sigma) = f_\sigma$.

(ii) 若$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$还是正则鞅,则对于任何停时 $\sigma \leqslant \tau$ 上式成立.

证明 1°对于有界停时$\tau, \sigma \in T$,不妨取$m \geqslant \max\{\tau, \sigma\}$,对于每个 $A \in \mathscr{B}_\sigma$,由于 $A \in \mathscr{B}_\tau$,对于每个 $n \geqslant 1$, $A \cap \{\sigma = n\} \in \mathscr{B}_n$, $A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{B}_n$. 从而

$$\int_A f_\sigma d\mu = \sum_{n=1}^{m} \int_{A \cap \{\sigma = n\}} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{m} \int_{A \cap \{\sigma = n\}} f_m d\mu = \int_A f_n d\mu.$$

类似地$\int_A f_\tau d\mu = \int_A f_n d\mu$,故

$$\int_A f_\sigma d\mu = \int_A f_\tau d\mu. \qquad \forall A \in \mathscr{B}_\sigma$$

即 $E(f_\tau | \mathscr{B}_\sigma) = f_\sigma$.

2° 设 $f \in L_1(\mu, X)$ 并且 $E(f | \mathscr{B}_n) = f_n$,记 $f_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} f_n a.e.$ 对于任一停时 τ,若 $A \in \mathscr{B}_\tau$,

$$\int_A f_\tau d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap \{\tau = n\}} f_n d\mu + \int_{A \cap \{\tau = \infty\}} f_\infty d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap \{\tau = n\}} E(f | \mathscr{B}_n) d\mu + \int_{A \cap \{\tau = \infty\}} E(f | \sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n)) d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap \{\tau = n\}} f d\mu + \int_{A \cap \{\tau = \infty\}} f d\mu = \int_A f d\mu$$

故有 $E(f|\mathscr{B}_\tau) = f_\tau$. 注意由 Levy 定理，对于正则鞅 $f_n \to E(f|\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n))$ $a.e.$，所以上面第二个等号成立. 现在上式两端同时关于 $\mathscr{B}_\sigma$ 取条件期望得到

$$E(f_\tau|\mathscr{B}_\sigma) = E(E(f|\mathscr{B}_\tau)|\mathscr{B}_\sigma) = E(f|\mathscr{B}_\sigma) = f_\sigma.$$

在第一种情况有 $E\|f_\tau\| = E\|E(f_m|\mathscr{B}_\tau)\| \leqslant E\|f_m\| < \infty$. 在第二种情况，$E\|f_\tau\| = E\|E(f|\mathscr{B}_\tau)\| \leqslant E\|f\| < \infty$. 从而 $f_\tau \in L_1(\mu, X)$.

定理 5　设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅，则

(i)　$\sup\limits_{n\in N}\|f_n\|_1 < \infty$ 当且仅当 $\sup\limits_{\tau\in T}\|f_\tau\|_1 < \infty$.

(ii)　(选样性质 optional sampling property)　设 $\tau_n \in T$ 是单调增加有界停时序列，则 $(f_{\tau_n}, \mathscr{B}_{\tau_n}, n \geqslant 1)$ 是鞅. 若 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是正则的，$(f_{\tau_n}, \mathscr{B}_{\tau_n}, n \geqslant 1)$ 也是正则的.

(iii)　(停止性质 stopped property)　设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅，则对于任何停时 τ，$(f_{\tau\wedge n}, \mathscr{B}_{\tau\wedge n}, n \geqslant 1)$ 是鞅.

(iv)　适应可积序列 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅，当且仅当 $Ef_\tau =$ Const.

证明　1°　对于 $\forall\, \tau \in T$，取 $m \geqslant \tau$，则 $E(f_m|\mathscr{B}_\tau) = f_\tau$. 故 $\|f_\tau\|_1 \leqslant \|E(f_m|\mathscr{B}_\tau)\|_1 \leqslant \|f_n\|_1$. 此即(i).

2°　由定理 4 得到(ii). 若 $f_m = E(f|\mathscr{B}_m)(m \geqslant 1)$，$f \in L_1(\mu, X)$，则对于 $\tau_n \in T$，取 $m \geqslant \tau_n$，再对上式两端关于 $\mathscr{B}_{\tau_n}$ 取条件期望得到 $E(f_{\tau_{n+1}}|\mathscr{B}_{\tau_n}) = f_{\tau_n}$. 又若 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是正则的，则 $f_{\tau_n} = E(f_m|\mathscr{B}_{\tau_n}) = E(E(f|\mathscr{B}_m)|\mathscr{B}_{\tau_n}) = E(f|\mathscr{B}_{\tau_n})$.

3°　(iii) 是(ii) 的特例.

4°　必要性是显然的. 现设 $Ef_\tau = x$，并且 $\tau, \sigma \in T$，$\sigma \leqslant \tau$，若 $A \in \mathscr{B}_\sigma$，定义 $\mu = \sigma\chi_A + \tau\chi_{\Omega\setminus A}$，可以验证 $\mu \in T$. 于是

$$x = Ef_\mu = \int_A f_\sigma d\mu + \int_{\Omega\setminus A} f_\tau d\mu$$

$$= \int_A f_\sigma d\mu + Ef_\tau - \int_A f_\tau d\mu = \int_A f_\sigma d\mu - \int_A f_\tau d\mu.$$

故$\int_A f_\sigma d\mu = \int_A f_\tau d\mu$. 实际上,$A$ 可以是 $\mathscr{B}_\sigma$ 中任一集合. 即 $E(f_\tau|\mathscr{B}_\sigma) = f_\sigma$. 特别地取 $\tau = m,\sigma = n$ 即为鞅等式.

作为应用,我们证明关于鞅的所谓局部收敛定理. 为此对于两个集合 A、B,我们记 $A \subset B$ $a.e.$,若 $\mu(B\backslash A) = 0$. 当 $A \subset B$ $a.e.$ 并且 $B \subset A$ $a.e.$ 时记 $A = B$ $a.e.$.

定理 6 若Banach 空间 X 具有 RN 性质. $(f_n,\mathscr{B}_n,n \geqslant 1)$ 是鞅,记 $d^* = \sup\limits_{n\geqslant 1} \| f_n - f_{n-1} \|$,$(f_0 = 0)$. 当 $Ed^* < \infty$ 时,$\{f^* < \infty\} = \{f_n\text{收敛}\}a.e.$

证明 令

$$\tau = \inf\{n, \| f_n \| > \lambda\}, \quad \{inf\phi = \infty\} \tag{3.2}$$

则 τ 是停时. 由停止定理,$\{f_{\tau\wedge n},\mathscr{B}_{\tau\wedge n},n \geqslant 1\}$ 是鞅. 现在,

$$\begin{aligned}
\| f_{\tau\wedge n} \| &= \| f_n \| \chi_{(\tau>n)} + \| f_\tau \| \chi_{(\tau\leqslant n)} \\
&\leqslant \lambda\chi_{(\tau>n)} + (\| f_{\tau-1} \| + \| f_\tau - f_{\tau-1} \|)\chi_{(\tau\leqslant n)} \\
&\leqslant \lambda + d^*\chi_{(\tau\leqslant n)}, \qquad \tau < \infty \\
\| f_{\tau\wedge n} \| &= \| f_n \| \leqslant \lambda, \qquad \tau = \infty
\end{aligned}$$

总之 $E\| f_{\tau\wedge n} \| \leqslant \lambda + Ed^* < \infty$. 所以$(f_{\tau\wedge n},\mathscr{B}_{\tau\wedge n},n \geqslant 1)$ 是 $L_1(\mu,X)$ 有界鞅,X 的 RN 性质保证了 $f_{\tau\wedge n}$ $a.e.$ 收敛. 特别地在$\{\tau = \infty\}$ 上,$f_{\tau\wedge n} = f_n$,所以 f_n 在$\{\tau = \infty\} = \{f^* \leqslant \lambda\}$ 上 $a.e.$ 收敛. 由$\{f^* < \infty\} = \bigcup\limits_\lambda \{f^* \leqslant \lambda\}$ 知道 f_n 在$\{f^* < \infty\}$ 上 $a.e.$ 收敛. 相反的包含关系是显然的.

§4 实值下鞅的应用

本节首先讨论实值鞅的两个推广的类型:上鞅和下鞅(二者又统 称为半鞅),特别是正的下鞅. 然后利用所得结论给出取值于某些特殊空间的鞅收敛定理并以此验证这些空间的 RN 性质.

定义 1 实值适应序列 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 称为下鞅(submartingale)：若对于任何 $n \geqslant 1, E(f_{n+1}|\mathscr{B}_n) \geqslant f_n$，当相反的不等式成立时，称 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 为上鞅.

显然，即是下鞅又是上鞅的适应序列是鞅.

若 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是在 Banach 空间 X 中取值的鞅，则根据鞅性质

$$\| f_n \| = \| E(f_{n+1}|\mathscr{B}_n) \| \leqslant E(\| f_{n+1} \| \,|\mathscr{B}_n),$$

于是 $(\| f_n \|, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是正的实值下鞅.

设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是实值下鞅，$\varphi: R \to R$ 是增加凸函数，由 Jensen 不等式 $\varphi(f_n) \leqslant \varphi(E(f_{n+1}|\mathscr{B}_n)) \leqslant E(\varphi(f_{n+1})|\mathscr{B}_n)$，于是当 $E|\varphi(f_n)| < \infty$ 时，$(\varphi(f_n), \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是下鞅. 若 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是非负下鞅，取 $\varphi(t) = t^p (t \geqslant 0, p \geqslant 1)$，则 $(f_n^p, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是下鞅. 当 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是一个鞅时，对于 $1 \leqslant p < \infty$，$(|f_n|^p, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是下鞅. 此外，由于

$$E|f_n| = Ef_n^+ - Ef_n^- = 2Ef_n^+ - Ef_n = 2Ef_n^+ - Ef_1$$

故对下鞅，f_n L_1 有界当且仅当 $\sup\limits_{n \geqslant 1} Ef_n^+ < \infty$.

设 a、b 为两个实数，$a < b$，对于 n 个实数 $x_1, \cdots, x_n$，记

$$k_1 = \min\{k, 0 < k \leqslant n, x_k \leqslant a\},$$
$$k_2 = \min\{k, k_1 < k \leqslant n, x_k \geqslant b\},$$
$$\cdots, \cdots$$
$$k_{2j-1} = \min\{k, k_{2j-2} < k \leqslant n, x_k \leqslant a\},$$
$$k_{2j} = \min\{k, k_{2j-1} < k \leqslant n, x_k \geqslant b\},$$

若 k_{i_0} 是满足以上定义的最后一个下标，记此后的 $k_i = n + 1$. 使 k_{2h}（或 k_{2h+1}）有定义的最大非负整数 H_n 称为是 $x_1, \cdots, x_n$ 由下而上穿越区间 (a, b) 的次数. 当把 $x_1, \cdots, x_n$ 换为 n 个 ω 的函数 $f_1(\omega), \cdots, f_n(\omega)$ 时，$H_n = H_n(\omega)$ 也与 ω 有关. 当然每个 $k_i = k_i(\omega)$ 也与 ω 有关.

引理 1(Doob 上穿不等式) 设 $H_n(\omega)$ 是下鞅 $(f_i, \mathscr{B}_i, 1 \leqslant i$

$\leqslant n$) 由下而上穿越区间(a,b)的次数，则

$$EH_n(\omega) \leqslant \frac{1}{b-a}E(f_n - a)^+ \tag{4.1}$$

证明　定义

$$i_k = \begin{cases} 0, & \text{若 } k \leqslant k_1 \text{ 或者 } k_{2j-1} < k \leqslant k_{2j} \\ 1, & \text{若 } k_{2j} < k \leqslant k_{2j+1}. \end{cases}$$

当k_{2H_n+1}有定义时

$$\sum_{k=1}^{n-1} i_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = (x_{k_3} - x_{k_2}) + \cdots + (x_{2H_n+1} - x_{2H_n})$$
$$\leqslant (a-b)H_n.$$

当k_{2H_n}有定义(k_{2H_n+1}无定义)时，

$$\sum_{k=1}^{n-1} i_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = (x_{k_3} - x_{k_2}) + \cdots + (x_n - x_{2H_n})$$
$$\leqslant (a-b)H_n + (x_n - a).$$

总之，无论哪种情况

$$\sum_{k=1}^{n-1} i_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \leqslant (a-b)H_n + (x_n - a)^+$$

将$x_1,\cdots,x_n$换为$f_1(\omega),\cdots,f_n(\omega)$并且两端积分得到

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\{i_{k+1}=1\}} (f_{k+1} - f_k)d\mu \leqslant (a-b)EH_n + E(f_n - a)^+ \tag{4.2}$$

集合$\{i_{k+1} = 1\}$是关于$\mathscr{B}_k$可测的. 实际上

$$\{i_{k+1} = 1\} = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant [\frac{k}{2}]} (\{k_{2j}(\omega) < k+1\} \backslash \{k_{2j+1}(\omega) < k+1\})$$

k_{i+1}由$f_1,\cdots,f_i$确定，从而关于$\mathscr{B}_i$可测. 这说明(4.2)左端的积分有意义. 根据下鞅定义得出(4.2)左端非负，从而得出(4.1).

定理 1 (Doob)　L_1有界下鞅$a.e.$收敛于一个可积函数.

证明　设A是$f_n(\omega)$不收敛的ω的全体，往证$\mu(A) = 0$.

取a,b为任意有理数，$a < b$，定义

$$A_{ab} = \{\omega, \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) \leqslant a < b \leqslant \limsup_{n\to\infty} f_n(\omega)\}, \tag{4.3}$$

则 $A = \bigcup_{a,b} A_{ab}$. 若 $\omega \in A_{ab}$，由 H_n 的定义 $H_n(\omega) \uparrow H(\omega) = \infty$. 故 $A_{ab} \subset \{H(\omega) = \infty\}$. 根据 Fatou 引理

$$
\begin{aligned}
EH &\leqslant \sup_{n \in N} EH_n \leqslant \frac{1}{b-a} \sup_{n \in N} E(f_n - a)^+ \\
&\leqslant \frac{1}{b-a} (\sup_{n \in N} \| f_n \|_1 + |a|) < \infty,
\end{aligned}
$$

所以 $H \in L_1, \mu(H = \infty) = 0$. 从而 $\mu(A_{ab}) = 0, \mu(A) = 0$.

不妨设 $f_n \to f\ a.e.$，仍由 Fatou 引理得出

$$
E|f| \leqslant \lim_{n \to \infty} \inf E|f_n| \leqslant \sup_{n \in N} \| f_n \|_1 < \infty
$$

f 可积.

推论 1 对于下鞅 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$，$\{f_n\} L_1$ 收敛当且仅当 $\{f_n\}$ 一致可积. 若 f_n 是非负的，则它们还等价于存在 $f \in L_1, f_n \leqslant E(f | \mathscr{B}_n)\ (n \geqslant 1)$.

证明 由 Doob 定理，第一个断言显然成立. 对于第二个断言，当 $\{f_n\} L_1$ 收敛于 f 时，由鞅不等式. $f_n \leqslant E(f_{n+1} | \mathscr{B}_n)$ 容易推出，对于任何 $m \geqslant n, f_n \leqslant E(f_m | \mathscr{B}_n)$. 固定 n，令 $m \to \infty$ 容易得出以 L_1 范数，$E(f_m | \mathscr{B}_n) \to E(f | \mathscr{B}_n)$. 从而所说的不等式成立. 反过来若 f_n 非负，$f \in L_1$，则 $\{E(f | \mathscr{B}_n), n \geqslant 1\}$ 一致可积，从而 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 一致可积.

例 L_1 有界下鞅不必是一致可积的. 例如：设 ξ_i 是相互独立的同分布随机变量，$\xi_i \sim N(0,1)$ 是标准正态分布. 令

$$
S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, f_n = e^{S_n - \frac{1}{2}n}, \quad \mathscr{B}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n),
$$

则 f_n 非负并且

$$
E(f_{n+1} | \mathscr{B}_n) - f_n = e^{S_n - \frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} E(e^{\xi_{n+1}} | \mathscr{B}_n) - f_n = 0.
$$

实际上 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅并且 $Ef_n = (Ee^{\xi_1 - \frac{1}{2}})^n = 1$，$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 L_1 有界的从而 $a.e.$ 收敛. ξ_i 独立，由强大数定律

$$
\frac{S_n}{n} \to E\xi_1 = 0 \quad a.e.
$$

从而

$$f_n = e^{s_n - \frac{n}{2}} = e^{n(\frac{s_n}{n} - \frac{1}{2})} \to 0 \quad a.e.$$

记住 $Ef_n \equiv 1$，则 $\{f_n\}$ 不是一致可积的.

定理 2 (Doob 分解)　每个下鞅 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 可以写成 $f_n = g_n + A_n (n \geqslant 1)$，其中 $(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅，而 A_n 关于 $\mathscr{B}_{n-1}$ 可测并且

$$0 = A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots \leqslant A_n \leqslant A_{n+1} \leqslant \cdots,$$

这种分解是唯一的. 此时下鞅 L_1 收敛当且仅当 $(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 正则并且 $A_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} A_n \in L_1$.

称定理中的 $(A_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 为可料 (A_n 关于 $\mathscr{B}_{n-1}$ 可测) 增加过程 (predicrable-increasing process).

证明　1°　定义

$$A_1 = 0, A_n = \sum_{i=2}^{n} (E(f_i | \mathscr{B}_{i-1}) - f_{i-1}) \quad (n \geqslant 2),$$

$$g_n = f_n - A_n (n \geqslant 1).$$

则 A_n 关于 $\mathscr{B}_{n-1}$ 可测. 由下鞅性质，$A_2 \geqslant 0$. 从而

$$A_n = A_{n-1} + (E(f_n | \mathscr{B}_{n-1}) - f_{n-1}) \geqslant A_{n-1}$$

此时由 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 的可料性，

$$\begin{aligned} E(g_n | \mathscr{B}_{n-1}) &= E(f_n | \mathscr{B}_{n-1}) - A_n \\ &= (E(f_n | \mathscr{B}_{n-1}) - f_{n-1} - A_n) + f_{n-1} \\ &= -A_{n-1} + f_{n-1} = g_{n-1} \end{aligned}$$

$(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅.

设另有分解 $f_n = g_n' - A_n'$，g_n'，A_n' 的性质正如 g_n 和 A_n，则

$$f_{n+1} - f_n = g_{n+1} - g_n + A_{n+1} - A_n$$

两边关于 $\mathscr{B}_n$ 取条件期望，由 $\{A_n, n \geqslant 1\}$ 的可料性，

$$E(f_{n+1} - f_n | \mathscr{B}_n) = A_{n+1} - A_n.$$

同样的式子对于 $\{A_n', n \geqslant 1\}$ 成立. 从而 $A_{n+1} - A_n = A_{n+1}' - A_n'$，但 $A_1 = A_1' = 0$. 所以 $A_n = A_n' (n \geqslant 1)$. 由此得到 $g_n = f_n - A_n = f_n - A_n' = g_n' (n \geqslant 1)$.

若$(g_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是正则鞅，存在$g\in L_1, g_n=E(g|\mathscr{B}_n), n\geqslant 1$. 由 §1 Levy 定理知道 $\| g_n-g\|_1\to 0$. 若$A_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}A_n\ a.e.$ 并且 $A_\infty\in L_1$. 则 $0\leqslant A_n\leqslant A_\infty$. 由 Lebesgue 控制收敛定理，$\| A_n-A_\infty\|_1\to 0$，从而

$$\| f_n-(g+A_\infty)\|_1\leqslant \| g_n-g\|_1+\| A_n-A_\infty\|_1\to 0$$

反之若 f_n L_1 收敛于f，注意到A_n非负，故 $g_n\leqslant f_n$ 以及 $g_n^+\leqslant f_n^+$，从而$\sup\limits_{n\in N}Eg_n^+\leqslant\sup\limits_{n\in N}Ef_n^+\leqslant\sup\limits_{n\in N}\| f_n\|_1<\infty$，这意味着$\sup\limits_{n\in N}\| g_n\|_1<\infty$. 现在

$$A_n=f_n-g_n\leqslant f_n^+-g_n$$

由 Fatou 引理，

$$EA_\infty\leqslant\sup_{n\in N}EA_n\leqslant\sup_{n\in N}Ef_n^+-Eg_n=\sup_{n\in N}Ef_n^+-Eg_1<\infty$$

所以 $A_\infty\in L_1$ 并且

$$\| g_n-(f-A_\infty)\|_1\leqslant\| f_n-f\|_1+\| A_n-A_\infty\|_1\to 0$$

$\{g_n\}L_1$ 收敛. 由 §2 定理 1，$(g_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是正则的.

定理 3 设$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是下鞅，则

(i) 对于任何$\tau,\sigma\in T,\sigma\leqslant\tau, E(f_\tau|\mathscr{B}_\sigma)\geqslant f_\sigma$.

(ii)（选样性质）若 $\tau_n\in T,\{\tau_n\}$ 是一增加的，则$(f_{\tau_n},\mathscr{B}_{\tau_n},n\geqslant 1)$是下鞅.

(iii)（停止性质）对于任何停时$\tau,(f_{\tau\wedge n},\mathscr{B}_{\tau\wedge n},n\geqslant 1)$是下鞅.

(iv) 适应过程$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是下鞅当且仅当$\{Ef_\tau,\tau\in T\}$是递增的.

(v) 对于下鞅$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$，$\sup\limits_{n\in N}\| f_n\|_1<\infty$ 当且仅当 $\sup\limits_{\tau\in T}\| f_\tau\|_1<\infty$.

证明 1° 设 $n_0\geqslant\max\{\tau,\sigma\}$，则

$$E|f_\sigma|=\sum_{i=1}^{n_0}\int_{\{\sigma=i\}}|f_i(\omega)|d\mu\leqslant\sum_{i=1}^{n_0}\| f_i\|_1<\infty$$

即 $f_\sigma\in L_1$. 同样地 $f_\tau\in L_1$. 由定理 2，作分解 $f_n=g_n+A_n(n\geqslant 1)$，

显然对于任何停时 τ，$f_\tau = g_\tau + A_\tau$ 并且 $A_\tau \geqslant A_\sigma$，从而

$$E(f_\tau|\mathscr{B}_\sigma) = E(g_\tau|\mathscr{B}_\sigma) + E(A_\tau|\mathscr{B}_\sigma).$$

$\{g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1\}$ 是鞅，于是由 §3 定理 4(i)，$E(g_\tau|\mathscr{B}_\sigma) = g_\sigma$. 总之

$$E(f_\tau|\mathscr{B}_\sigma) \geqslant g_\sigma + A_\sigma = f_\sigma.$$

2° 由(i) 直接得到(ii)，(iii). 对于(iv)，必要性是明显的. 类似于 §3 定理 5(iv) 的证明方法应用于下鞅得到充分性. 至于(v)可由下鞅的 Doob 分解得到.

定理 4 设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是非负下鞅，记 $f_n^* = \sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |f_k(\omega)|$，$\| f \|_p = \sup\limits_{n\geqslant 1} \| f_n \|_p$ $1 \leqslant p \leqslant \infty$，则

$$\text{(i)}\quad \lambda\mu(f_n^* > \lambda) \leqslant \int_{\{f_n^* > \lambda\}} f_n d\mu, \tag{4.4}$$

$$\lambda\mu(f^* > \lambda) \leqslant \| f \|_1, \forall\, \lambda > 0 \tag{4.5}$$

(ii) 若 $1 < p < \infty$，$p^{-1} + q^{-1} = 1$，则

$$\| f^* \|_p \leqslant q \| f \|_p. \tag{4.6}$$

$$\text{(iii)}\quad \| f^* \|_1 \leqslant \frac{e}{e-1}(1 + \sup_{n\geqslant 1} E|f_n|\log^+ |f_n|), \tag{4.7}$$

其中 $\log^+ a = \log a, a \geqslant 1;\ = 0, 0 < a < 1.$

证明 1° 取 $\tau_\lambda = \inf\{n, f_n(\omega) > \lambda\}$，则

$$\begin{aligned}\lambda\mu\{\omega, \tau_\lambda \leqslant n\} &= \lambda \sum_{i=1}^n \mu\{\tau_\lambda = i\} \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{\{\tau_\lambda = i\}} f_i d\mu \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{\{\tau_\lambda = i\}} f_n d\mu = \int_{\{\tau_\lambda \leqslant n\}} f_n d\mu.\end{aligned}$$

实际上，$\{\tau_\lambda \leqslant n\} = \{f_n^* > \lambda\}$，故(4.4)成立. 令 $n \to \infty$ 便得到(4.5).

2° 为证明(ii)，让我们先应用 Fubini 定理得到一个等式. 设 $\Phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是连续增加函数. $\Phi(0) = 0$，则对于非负函数 h，

$$\begin{aligned}E\Phi(h) &= \int_\Omega \int_0^h d\Phi(\lambda) d\mu = \int_0^\infty \int_\Omega \chi_{\{h>\lambda\}} d\mu d\Phi(\lambda) \\ &= \int_0^\infty \mu(h > \lambda) d\Phi(\lambda),\end{aligned} \tag{4.8}$$

现在由 1° 的证明

$$\lambda E\chi_{\{f_n^* > \lambda\}} = \lambda\mu\{f_n^* > \lambda\} \leqslant Ef_n\chi_{\{f_n^* > \lambda\}}, \quad \lambda > 0, n \geqslant 1.$$

在(4.8)中以 $\Phi(t) = t^p$ 代入,则

$$\begin{aligned} Ef_n^{*p} &= \int_0^\infty \mu(f_n^* > \lambda) d\lambda^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} E\chi_{\{f_n^* > \lambda\}} d\lambda \\ &\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-2} Ef_n\chi_{\{f_n^* > \lambda\}} d\lambda = \frac{p}{p-1}\int_\Omega f_n \int_0^\infty \chi_{\{f_n^* > \lambda\}} d\lambda^{p-1} \\ &= q\int_\Omega f_n (f_n^*)^{p-1} d\mu \leqslant q \| f_n \|_p \| f_n^* \|_p^{p/q} \end{aligned}$$

后者应用了 Hölder 不等式,从而

$$\| f_n^* \|_p \leqslant q \| f_n \|_p.$$

令 $n \to \infty$ 得到(4.6).

3° 在(4.8)中取 $\Phi(t) = (t-1)^+$,则 $\Phi(t) = \int_0^t \chi_{\{s \geqslant 1\}} ds$,由(4.4)和(4.8)

$$\begin{aligned} E(f_n^* - 1) \leqslant E(f_n^* - 1)^+ &= \int_0^\infty \mu(f_n^* > \lambda) d\Phi(\lambda) \\ &\leqslant \int_0^\infty \frac{\chi_{\{\lambda \geqslant 1\}}}{\lambda} \int_{\{f_n^* > \lambda\}} f_n d\mu d\lambda \\ &= \int_\Omega f_n \int_1^{f_n^*} \frac{1}{\lambda} d\lambda d\mu = \int_\Omega f_n \log^+ f_n^* d\mu. \end{aligned}$$

注意对于 $a > 0, b > 0, a\log^+ b \leqslant a\log^+ a + be^{-1}$,故由上式得出

$$Ef_n^* \leqslant 1 + E|f_n|\log^+ |f_n| + e^{-1}Ef_n^*,$$

上此即得(4.7).

定义 2 对于下鞅$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$,其中 $f_n \in L_p, 1 \leqslant p < \infty$,称 $g \in L_p$ 是$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$的右闭元,若

$$\int_A f_n d\mu \leqslant \int_A g d\mu, A \in \mathscr{B}_n, n \geqslant 1 \tag{4.9}$$

定理 5 设$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$是非负下鞅,$f_n \in L_p, 1 < p < \infty$,则下面诸条件等价:

(i) $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 有右闭元 g.

(ii) $\| f \|_p < \infty$.

(iii) $f^* \in L_p$.

(iv) f_n L_p 收敛.

证明 (i)⇒(ii). 设 g 是右闭元,则 $0 \leqslant f_n \leqslant E(g|\mathscr{B}_n)$. 由 Jensen 不等式

$$0 \leqslant f_n^p \leqslant (E(g|\mathscr{B}_n))^p \leqslant E(g^p|\mathscr{B}_n),$$

从而

$$0 \leqslant Ef_n^p \leqslant E(E(g^p|\mathscr{B}_n)) = Eg^p.$$

即有 $\| f \|_p \leqslant \| g \|_p < \infty$.

(ii)⇒(iii) 由定理 4(ii) 得到.

(iii)⇒(iv) 当 $f^* \in L_p$ 时,由定理 1, f_n $a.e.$ 收敛于可积函数 f. 从而 f_n L_1 收敛于 f. 根据 Fatou 引理,

$$Ef^p \leqslant \sup_{n \geqslant 1} Ef_n^p \leqslant Ef^{*p} < \infty.$$

故 $f \in L_p$. 又

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_n - f|^p d\mu &\leqslant \int_{\{f^* \leqslant c\}} |f_n - f|^p d\mu \\ &\quad + 2^p \int_{\{f^* > c\}} |f_n|^p d\mu + 2^p \int_{\{f^* > c\}} |f|^p d\mu \\ &\leqslant \int_{\{f^* \leqslant c\}} |f_n - f|^p d\mu + 2^{p+1} \int_{\{f^* > c\}} f^{*p} d\mu\end{aligned}$$

先取 c 足够大,使第二项小于 $\varepsilon/2$,再由 Lebesgue 控制收敛定理使第一项当 n 足够大时小于 $\varepsilon/2$. 则知 $\| f_n - f \|_p \to 0$.

(iii)⇒(i) 若 $\| f_n - f \|_p \to 0$,则 $f \in L_p$. 对于 $\forall\ A \in \mathscr{B}_n$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu,$$

从而由下鞅性质,当 $m \geqslant n$ 时

$$\int_A f_n d\mu \leqslant \int_A f_m d\mu \to \int_A f d\mu.$$

故

$$\int_A f_n d\mu \leqslant \int_A f d\mu. \quad \forall\ A \in \mathscr{B}_n, n \geqslant 1$$

f 即 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 的右闭元.

定理 6 (Scalora) 设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是取值于自反空间 X 的

鞅，并且$\sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n\|_1<\infty$，则存在可测函数$f$，使得$f_n\to f$弱$a.e.$成立.

证明 f_n强可测，故不妨设$f_n(\Omega\backslash A_n)$可分. 其中$\mu(A_n)=0$ $(n\geqslant 1)$. 又知$(\|f_n\|,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是下鞅且$L_1$有界，由定理1知道$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(\omega)\|$ $a.e.$存在. 设$\|f_n(\omega)\|$在$\Omega\backslash A_\infty$上的极限处处存在，$\mu(A_\infty)=0$. 记$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\cup A_\infty$.

$$E=\overline{\text{span}}\{f_n(\omega),\omega\in\Omega\backslash A,n\geqslant 1\}$$

E是X的可分闭线性子空间，从而是自反空间，同时E^*可分.

对于每个$x^*\in E^*$，$(x^*f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是$L_1$有界实值鞅，

$$\sup_{n\in N}E|x^*f_n|\leqslant\|x^*\|\sup_{n\in N}\|f_n\|_1<\infty.$$

根据定理1，存在函数Z_{x^*}，$x^*f_n\to Z_{x^*}$ $a.e.$，不妨设例外集为A_{x^*}，$\mu(A_{x^*})=0$. E^*可分，不妨设$\{x_k^*,k\geqslant 1\}$在E^*中稠密. 对于每个x_k^*，除去例外集$A_{x_k^*}$，$x_k^*f_n\to Z_{x_k^*}$处处成立. 记$B=A\cup(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_{x_k^*})$，则$\mu(B)=0$. 我们断定$\{f_n\}$在$\Omega\backslash B$上弱收敛.

实际上，对于每个$\omega\in\Omega\backslash B$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(\omega)\|$存在，从而存在$c>0$，使得$\|f_n(\omega)\|\leqslant c$($c$与$\omega$有关)，定义

$$Q_n(x^*)=x^*f_n(\omega),\forall\, x^*\in E^*,$$

对于$\forall\,\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon/c$，当$x^*,y^*\in E^*$，$\|x^*-y^*\|<\delta$时，

$$|Q_n(x^*)-Q_n(y^*)|\leqslant\|x^*-y^*\|\,\|f_n(\omega)\|<\delta\cdot c=\varepsilon,$$

$\{Q_n\}$是等度绝对连续函数序列. 由于$\omega\,\overline{\in}\,A_{x_k^*}$，$k\geqslant 1$. 于是

$$|Q_n(x_k^*)-Q_m(x_k^*)|=|x_k^*f_n(\omega)-x_k^*f_m(\omega)|\to 0\quad(m,n\to\infty)$$

$\{Q_n\}$是在度量间E^*的稠密子集上收敛的连续函数列. 从而$\{Q_n\}$在整个空间E^*上收敛：

$$|Q_n(x^*)-Q_m(x^*)|=|x^*f_n(\omega)-x^*f_m(\omega)|\to 0$$

换句话说，$\{f_n(\omega),n\geqslant 1\}$是$w$ Cauchy序列.

自反空间是w序列完备的. 故存在$f(\omega)\in E$，$f(\omega)=w-$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)$. 作为函数 $f:\Omega\to E$，f 是 f_n 关于 E^* 的 w $a.e.$ 极限，f 是可测的（Ⅰ．§3 定理 5(ii)）. 又对于任何 $x^*\in X^*$，$x^*|_E\in E^*$，所以实际上，在空间 X 中 $f_n\to f$ w $a.e.$

由证明过程可知，只要 X w 序列完备并且 X^* 可分，结论仍然成立.

推论 2 定理 6 中的空间 X 换为 w 序列完备，其共轭空间 X^* 可分的 Banach 空间，结论仍然成立.

推论 3 定理 6 中的收敛性实际上是（强）$a.e.$ 收敛.

本推论由 Chatterji 定理得出. 由同一定理还得出：

推论 4 自反空间具有 RN 性质，共轭空间可分的弱序列完备空间具有 RN 性质.

定理 7 若 X 是可分共轭空间，$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是 X 值鞅并且 $\sup\limits_{n\in N}\|f_n\|_1<\infty$，则存在可测函数 f，使得 $f_n\to f$ $a.e.$

证明 此定理的证明与定理 6 相仿，以下仅指出需要修正之处.

1° 设 $X=Y^*$，X 可分，从而 Y 可分. 代替定理 5 中 E^* 的可数稠密集 $\{x_k^*\}$，Y 中存在可数调密集 $\{y_k\}$，定义

$$Q_n(y)=f_n(\omega)y,\quad \forall\ y\in Y.$$

类似地证明得到，至多除去一个零测度集 A，$\{Q_n\}$ 在整个空间 Y 上收敛，即 $f_n(\omega)$ 是几乎处处 w^* Cauchy 的.

2° 我们证明当 $\omega\in\Omega\backslash A$ 时，存在 $f(\omega)$，使得 $f_n(\omega)y\to f(\omega)y$. 实际上，固定 $\omega\in\Omega\backslash A$，对于 $\forall\ y\in Y$，定义 $l(y)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)y$，$l(y)$ 关于 y 是线性的，由于 $\{\|f_n(\omega)\|\}$ 有界，故

$$|l(y)|=\lim_{n\to\infty}|f_n(\omega)y|\leqslant\sup_{n\in N}\|f_n(\omega)\|\ \|y\|$$

于是 $l\in Y^*$，记 $l=f(\omega)\in X$，便得出所要的结论.

3° 容易知道 f 是可测的. 现在剩下需要证明上述的 w^* 收敛实际上是（强）$a.e.$ 收敛的. 为此只须修正 Chatterji 定理，即把其中的 w 收敛改为 w^* 收敛. 这样做的合理性可直接验证.

推论 5(Dunford-Pettis)　可分共轭空间具有 RN 性质.

定理 8 (Uhl)　(i) 若 X 的每个可分子空间同构于可分共轭空间的子空间,则 X 具有 RN 性质. (ii) 若 X 的每个可分子空间有可分共轭,则 X^* 具有 RN 性质.

证明　(i) 是上述推论的明显结论. 现证(ii). 若 Y 是 X^* 的可分子空间,只须证明 Y 同构于可分共轭空间的子空间. 设 $\{y_n, n \geqslant 1\}$ 是空间 Y 的单位球面 $S(Y)$ 中的可数稠密子集, $\{x_{ni}, i \geqslant 1\} \subset X$ 并且 $\|x_{ni}\| \leqslant 1, \lim\limits_{i\to\infty} y_n(x_{ni}) = \|y_n\| = 1$,则对于每个 $y \in Y$,

$$\|y\| = \sup\{y(x), x \in W, \|x\| \leqslant 1\},$$

其中 $W = \overline{\text{span}}\{x_{ni}, n \geqslant 1, i \geqslant 1\}$.

映射 $y \mapsto y|_W$ 是 Y 到 W^* 的等距同构. 由假设 W^* 可分. 由(i) 和 W^* 具有 RN 性质. 所以 Y 有 RN 性质. Y 的 X^* 的任一可分子空间,从而 X^* 具有 RN 性质.

推论 6　对于任何指标集 $\Gamma, l_1(\Gamma)$ 具有 RN 性质.

证明　$l_1(\Gamma)$ 的每个可分子空间本身是共轭空间 l_1 的子空间. 结论由定理 8(i) 得到.

Banach 空间 X 称为是弱紧生成的(weakly compactly generated,简记为 WCG):如果它是由某个弱紧集生成的.

定理 9 (Kuo)　设 X 是 Banach 空间,其共轭空间是某个 WCG 空间 Y 的子空间,则 X^* 具有 RN 性质.

特别地,每个 WCG 共轭空间具有 RN 性质.

证明　由定理 8(ii),只须证明对于 X 的每个可分闭子空间 Z, Z^* 是可分的. 若 Z 是这样的空间,取 Z 的单位球面中的稠密集 $\{z_n, n \geqslant 1\}$,设 $\{e_n, n \geqslant 1\}$ 是 l_1 的标准基. 定义线性算子 $T: l_1 \to Z$, $T(e_i) = z_i, i \geqslant 1$. T 是 l_1 到 Z 上的连续性算子. 由开映射定理知 T 是开映射,从而 $T^*: Z^* \to l_\infty$ 是同构. 因为 Z 是 X 的子空间,所以 $Z^* = QX^*$. $Qx^* = x^*|_Z$. 于是 $T^*Q: X^* \to l_\infty$ 是有界线性算子. 但 l_∞ 是内射 Banach 空间(l_∞ 是内射空间,若对于任何 Banach 空间 X

和 X 的任何子空间 Y,有界线性算子 $T:Y \to l_\infty$ 有到 X 的有界线性延拓). 现在 X^* 是 Y 的子空间,故可将 T^*Q 延拓为从 Y 到 l_∞ 的有界线性算子,仍记为 T^*Q. 由于连续线性算子把 w 紧集映射为 w 紧集,所以 $T^*Q(Y)$ 是 l_∞ 中的 w 紧集. 由于 l_∞ 中的 w 紧集是 w^* 紧集,并且是可变量化的,于是是 w 可分的从而是范数可分的,即 $T^*Q(Y)$ 是范数可分的. $T^*(Z^*) \subset T^*Q(Y)$,于是 $T^*(Z^*)$ 可分. $Z^* = (T^*)^{-1}(T^*(Z^*))$ 可分. 定理得证.

定理 10 (Chatterji)　若 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是在 Banach 空间 X 的弱紧集 K 中取值的鞅,则 f_n $a.e.$ 收敛.

证明　由 Krein-Smulian 定理,不妨设 K 是闭凸集或绝对闭凸集. 不失一般性,假设 K 是属于 X 的某个可分子空间的. 这保证了 X 的共轭空间中有 X 的可数确定集. 不妨设 $(x_k^*, k \geqslant 1)$,使得对于每个 $x \in X$,

$$\| x \| = \sup_{k \geqslant 1} |x_k^*(x)|.$$

由于 w 紧集是 w 闭集,特别是 w 序列闭集,因此 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 完全可以看成在一个 w 序列完备并且共轭空间可分的 Banach 空间中取值的鞅. 由推论 3,此种空间具有 RN 性质又弱紧集是有界集,从而 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 是 L_1 有界的,从而 f_n $a.e.$ 收敛.

引理 2　设 Banach 空间 X 上定义有有界线性算子序列 $T_n: X \to X_n$,其中 X_n 是 X 的闭子空间且具有 RN 性质. 若 T_n 具有性质: (i) $T_n T_{n+1} = T_{n+1} T_n = T_n$. (ii) 对于任何 $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = x$, (iii) 当 $\{y_n, n \geqslant 1\}$ 是 X 中的有界序列并且 $T_n y_{n+1} = y_n$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在, 则 X 具有 RN 性质.

证明　设 $F: \Sigma \to X$ 是有界变差 μ 连续向量测度. 由 (ii) 和 X_n 的 RN 性质. 对于每个 $A \in \Sigma$,

$$F(A) = \lim_{n\to\infty} T_n F(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \tag{4.10}$$

其中 $f_n(\omega) \in X_n$, T_n 是有界算子. 从而 $T_n F(A)$ 是有界变差 μ 连续

测度，故 $f_n \in L_1(\mu, X_n)$ 存在. 由(i)对于任何 $A \in \Sigma$,

$$\int_A f_n d\mu = T_n F(A) = T_n T_{n+1} F(A)$$

$$= T_n \int_A f_{n+1} d\mu = \int_A T_n f_{n+1} d\mu$$

于是 $f_n = T_n f_{n+1}$. μ-$a.e.$，为了说明 f_n 的有界性. 考虑实测度 $\| F \| : \Sigma \to R$. 记 $g = \dfrac{d\| F \|}{d\mu}$，则 $g \in L_1$. 取集合 $B_k, B_k \subset B_{k+1}$, $k \geqslant 1, \Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. g 在每个 B_k 上有界. 例如 $g(\omega) \leqslant M_k, \omega \in B_k$. 从而 $\| F \| (A \cap B_k) \leqslant M_k \mu(A \cap B_k)$. 此时必有 $\| f_n(\omega) \| \leqslant M_k$, $\omega \in B_k, n \geqslant 1$. 由(iii)，在 B_k 上，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$，$\mu$-$a.e.$，实际上，在整个 Ω 上，极限 μ-$a.e.$ 成立. f_n μ 可测，从而 f μ 可测，现在由控制收敛定理

$$F(A \cap B_k) = \lim_{n\to\infty} \int_{A \cap B_k} f_n d\mu = \int_{A \cap B_k} f d\mu$$

由 F 的有界变差性质知道 $f \in L_1(\mu, X)$ 并且

$$F(A) = \int_A f d\mu, A \in \Sigma.$$

F 关于 μ 有 RN 性质.

回忆 Banach 空间 X 的 Schauder 基 $\{x_n, n \geqslant 1\}$，称 $\{x_n, n \geqslant 1\}$ 是有界完备基(boundedly complete base)，若对于任何序列 $\{a_n, n \geqslant 1\} \subset R$，当 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \| < \infty$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ 是收敛的. 此时对于任何 $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$，令 $T_n x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$，则 $\{T_n\}$ 满足引理中叙述的条件. 于是作为推论下面定理成立.

定理 11 (Dunford, Morse)　具有有界完备基的 Banach 空间具有 RN 性质.

Ⅲ. 渐近鞅及其它鞅型序列

作为鞅概念的推广，除了实值的上鞅和下鞅之外，1964 年 Fisk 定义了拟鞅. 从 1974 年开始，Chacon，Austin，Baxter，Bellow，Sucheston，Edgar 等人引进并研究了实值和向量值的渐近鞅，一致渐近鞅以及其它鞅型序列. 本章将叙述这些鞅型序列的极大函数性质、分解性质、选样性质、停止性质，以及关于它们的点态收敛定理，讨论它们与 Banach 空间的某些几何性质的关系.

§1 渐 近 鞅

定义 1 可积适应序列$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$称为渐近鞅(amart，即 asymptotic martingale)：若存在 $x\in X$，使得$\lim\limits_{\tau\in T}Ef_\tau=x$，这里 T 是关于递增子 σ 代数族$(\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$的有界停时全体. 若$\sup\limits_{\tau\in T}\|Ef_\tau\|<\infty$，称$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是半渐近鞅(semiamart).

若$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是渐近鞅，对于每个 $\tau\in T$，定义向量测度，$\mu_\tau(A)=\int_A f_\tau d\mu, A\in\mathscr{B}_\tau$.

定理 1 设$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是渐近鞅，则

(i) $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是半渐近鞅.

(ii) 对于每个 $A\in\mathscr{B}_\infty\triangleq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$，极限 $\mu_\infty(A)=\lim\limits_{\tau\in T}\mu_\tau(A)$ 存在，μ_∞ 是 $\mathscr{B}_\infty$ 上的有限可加向量测度.

(iii) 上述极限在每个 $\mathscr{B}_\tau$ 上是一致的，即对于 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\tau_0\in T$ 使得当 $\tau\geqslant\tau_0$ 时，$\sup\limits_{A\in\mathscr{B}_\tau}\|\mu_\tau(A)-\mu_\infty(A)\|\leqslant\varepsilon$.

(iv) 若 $\sup\limits_{n\geqslant 1}E\|f_n\|<\infty$，则 $\sup\limits_{\tau\in T}|\mu_\tau|(\Omega)<\infty$，其中

$|\mu_\tau|(\Omega)$ 是 μ_τ 的半变差.

证明 1° 由极限$\lim\limits_{\tau\in T} Ef_\tau$的存在性,取 n_0 使 $\tau\in T,\tau\geqslant n_0$ 时 $\|Ef_\tau - Ef_{n_0}\|\leqslant 1$. 注意到 $f_\tau + f_{n_0} = f_{\tau\vee n_0} + f_{\tau\wedge n_0}(\forall\ \tau,n_0)$ 并且 $\tau\vee n_0\geqslant n_0$,故有

$$\begin{aligned}\|Ef_\tau\| &= \|Ef_{\tau\wedge n_0} + Ef_{\tau\vee n_0} - f_{n_0}\| \\ &\leqslant \|Ef_{\tau\wedge n_0}\| + 1 \leqslant \sum_{i=1}^{n_0} E\|f_i\| + 1 < \infty.\end{aligned}$$

2° 不妨设 $A\in\mathscr{B}_{n_0}$,对于 $\forall\ \varepsilon>0$,取 $\tau_0\geqslant n_0$,使 $\tau,\sigma\geqslant\tau_0$ 时

$$\|Ef_\tau - Ef_\sigma\| < \varepsilon \tag{1.1}$$

若 $n\geqslant\max(\tau,\sigma)$,定义

$$\tau' = \tau\chi_A + n\chi_{A^c},\quad \sigma' = \sigma\chi_A + n\chi_{A^c},$$

则 $\tau',\sigma'\in T,\tau'\geqslant\tau,\sigma'\geqslant\sigma$,从而

$$\|\mu_\tau(A) - \mu_\sigma(A)\| = \|Ef_{\tau'} - Ef_{\sigma'}\| < \varepsilon \tag{1.2}$$

即$\{\mu_\tau(A),\tau\in T\}$ 是 Cauchy 网从而是收敛网.

$\mu_\infty(A)$ 在 $\mathscr{B}_\infty$ 上的有限可加性是显然的.

3° 注意到(1.1),(1.2) 对于任何 $\tau,\sigma\geqslant\tau_0$ 成立,对(1.2) 取极限得到 $\|\mu_\tau(A) - \mu_\infty(A)\|\leqslant\varepsilon$,此式与 A 在 $\mathscr{B}_\tau$ 中的选取无关,故得之.

4° 设 $M = \sup\limits_{n\geqslant 1} E\|f_n\|$,由 1° 知道$\sup\limits_{\tau\in T}\|Ef_\tau\| = M' < \infty$. 欲证$\sup\limits_{\tau\in T}|\mu_\tau|(\Omega) = M'' < \infty$,由第 1 章 §1 定理 4,只须证明 $\sup\limits_{A\in\mathscr{B}_\tau}\|\mu_\tau(A)\|\leqslant M''$.

取 n_0 使当 $\tau\in T,\tau\geqslant n_0$ 时,$\|Ef_\tau - Ef_{n_0}\|\leqslant 1$,对于 $A\in\mathscr{B}_\tau$,取 $n\geqslant\tau$,定义 $\tau' = \tau\chi_A + n\chi_{A^c}$,则 $\tau'\geqslant n_0$ 并且

$$\mu_\tau(A) = \mu_{\tau'}(\Omega) - \mu_n(\Omega\backslash A) = Ef_{\tau'} - \int_{A^c} f_n d\mu.$$

从而 $\|\mu_\tau(A)\|\leqslant\|Ef_{\tau'}\| + E\|f_n\|\leqslant M + M'$. 若 $\sigma\in T,B\in\mathscr{B}_\sigma$,则 $B\cap\{\sigma>n_0\}\in\mathscr{B}_\sigma\subset\mathscr{B}_{\sigma\vee n_0}$ 并且

$$\mu_\sigma(B) = \mu_\sigma(B\cap\{\sigma\leqslant n_0\}) + \mu_\sigma(B\cap\{\sigma>n_0\}).$$

从而

$$\|\mu_\sigma(B)\| \leqslant \|\mu_\sigma(B\cap\{\sigma\leqslant n_0\})\| + \|\mu_\sigma(B\cap\{\sigma > n_0\}\|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n_0}|\mu_n|(\Omega) + M + M' < \infty.$$

定理 2 设$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是可积适应序列,则以下的条件互为等价的:

(i) $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是渐近鞅.

(ii) 存在向量测度$\mu_\infty:\mathscr{B}_\infty\to X$使得

$$\lim_{\tau\in T}|\mu_\tau-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)|(\Omega)=0.$$

(iii) $\lim\limits_{\substack{\sigma\leqslant\tau\\ \sigma,\tau\in T}}|\mu_\sigma-(\mu_\tau|\mathscr{B}_\sigma)|(\Omega)=0.$

其中$\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau$是$\mu_\infty$在$\mathscr{B}_\tau$上的限制,$\mu_\tau|\mathscr{B}_\sigma$是$\mu_\tau$在$\mathscr{B}_\sigma$上的限制.

证明 (i)⇒(ii) 对于渐近鞅$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$,记$\mu_\infty(A)=\lim\limits_{\tau\in T}\mu_\tau(A)$,$A\in\mathscr{B}_\tau$,定理1的3°说明$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ n_0$使得$\tau\geqslant n_0$时,

$$|\mu_\tau-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)|(\Omega)\leqslant\sup_{A\in\mathscr{B}_\tau}\|\mu_\tau(A)-\mu_\infty(A)\|\leqslant\varepsilon,$$

得出(ii).

(ii)⇒(iii) 设$\tau\geqslant\sigma$,则

$$|\mu_\sigma-(\mu_\tau|\mathscr{B}_\sigma)|(\Omega)\leqslant|\mu_\sigma-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\sigma)|(\Omega)$$
$$+|(\mu_\infty|\mathscr{B}_\sigma)-(\mu_\tau|\mathscr{B}_\sigma)|(\Omega)$$

由(ii),第一项极限为0.对于第二项,由于$\mathscr{B}_\sigma\subset\mathscr{B}_\tau$,故

$$|(\mu_\infty|\mathscr{B}_\sigma)-(\mu_\tau|\mathscr{B}_\sigma)|(\Omega)\leqslant\sup_{A\in\mathscr{B}_\sigma}\|\mu_\infty(A)-\mu_\tau(A)\|$$
$$\leqslant\sup_{A\in\mathscr{B}_\tau}\|\mu_\infty(A)-\mu_\tau(A)\|$$

其极限为0,得出(iii).

(iii)⇒(i) 对于$\forall\ \sigma,\tau\in T$,

$$\|Ef_\tau-Ef_\sigma\|=\|\mu_\tau(\Omega)-\mu_\sigma(\Omega)\|$$
$$\leqslant\|\mu_\tau(\Omega)-\mu_{\sigma\wedge\tau}(\Omega)\|+\|\mu_\sigma(\Omega)-\mu_{\sigma\wedge\tau}(\Omega)\|$$
$$\leqslant|\mu_\tau-\mu_{\sigma\wedge\tau}|(\Omega)+|\mu_\sigma-\mu_{\sigma\wedge\tau}|(\Omega)$$
$$=|(\mu_\tau|\mathscr{B}_{\sigma\wedge\tau})-\mu_{\sigma\wedge\tau}|(\Omega)+|(\mu_\sigma|\mathscr{B}_{\sigma\wedge\tau})-\mu_{\sigma\wedge\tau}|(\Omega)$$

由(iii),最后两项极限均为 0,故得到(i).

定义 2 适应序列 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 称为是 (B) 有界的 ((B)-bounded):若 $\sup\limits_{\tau\in T}E\|f_\tau\|<\infty$.

定理 3(极大引理) 若 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是任一可积适应序列,则对于任何 $\lambda>0$,极大函数 $f^*(\omega)=\sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n(\omega)\|$ 满足

$$\lambda\mu(f^*>\lambda)\leqslant\sup_{\tau\in T}E\|f_\tau\| \tag{1.3}$$

证明 不妨设右端是有限的,对于每个 $k\geqslant 1$,定义

$$\sigma=\inf\{i\leqslant k,|f_i(\omega)|>\lambda\},(\inf\phi=k+1).$$

记 $A_k=\{\omega,\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant k}|f_i(\omega)|>\lambda\}$,易知 $\sigma\in T$ 并且

$$\lambda\mu(A_k)\leqslant\int_{A_k}\|f_\sigma\|d\mu\leqslant E\|f_\sigma\|\leqslant\sup_{\tau\in T}E\|f_\tau\|$$

令 $k\to\infty$ 即得到所要的结论.

在讨论取值于一般 Banach 空间的渐近鞅的 $a.e.$ 收敛定理之前,让我们先看一下实值情况.容易验证,对于一个实值渐近鞅 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$,$(f_n^+,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 与 $(f_n^-,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 也是渐近鞅,从而 $(|f_n|,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是渐近鞅.实值上鞅或实值下鞅是渐近鞅,必须并且只须它们是 L_1 有界的.此外,若 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$,$(g_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是渐近鞅,则 $(f_n\vee g_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$,$(f_n\wedge g_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是渐近鞅.

定理 4 设 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是实值可积适应序列,g 是关于 $\sigma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n)$ 可测的函数并且每个 $g(\omega)$ 是 $\{f_n(\omega),n\geqslant 1\}$ 的聚点,则对于 $\forall\ \varepsilon>0,\delta>0$ 和 $m\in N$,存在 $\tau\in T$ 使得 $\tau\geqslant m$ 并且

$$\mu(\omega,|f_\tau(\omega)-g(\omega)|>\delta)\leqslant\varepsilon \tag{1.4}$$

证明 由于 g 关于 $\sigma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n)$ 可测,存在函数 g' 关于某个 $\mathscr{B}_{n_0}$ 可测,不妨设 $n_0\geqslant m$,使得

$$\mu(\omega,|g(\omega)-g'(\omega)|\geqslant\delta/2)<\varepsilon/2 \tag{1.5}$$

$g(\omega)$ 是聚点,故

$\{\omega, |g(\omega)-g'(\omega)|<\delta/2\}\subset\{\omega, \exists\ n\geqslant n_0, |f_n(\omega)-g'(\omega)|<\delta/2\}$.

对于每个 $n\geqslant 1$,定义

$$\tau_n=\begin{cases}\min\{k, \text{存在 } n_0\leqslant k<n, |f_k(\omega)-g'(\omega)|<\delta/2\}, & \\ n & \text{其它}.\end{cases}$$

由于 g' 关于 $\mathscr{B}_n$ 可测,$\tau_n\in T$. 注意$\{\tau_n=n\}\supset\{\tau_{n+1}=n+1\}$ 并且由 g 的定义,$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\tau_n=n\}=\varnothing$,从而$\lim_{n\to\infty}\mu(\tau_n=n)=0$. 现在取 n' 足够大,使 $\mu(\tau_{n'}=n')<\varepsilon/2$,并且记 $\tau_{n'}=\tau$,则

$$\{\omega, |f_\tau(\omega)-g'(\omega)|<\varepsilon/2\}=\{\omega, \tau<n'\} \tag{1.6}$$

从而(1.5),(1.6) 给出

$$\begin{aligned}\mu(\omega, |f_\tau(\omega)-g(\omega)|>\delta) &\leqslant \mu(\omega, |f_\tau(\omega)-g'(\omega)|\geqslant\delta/2)\\ &\quad+\mu(\omega, |g(\omega)-g'(\omega)|\geqslant\delta/2)\\ &\leqslant\mu(\omega, \tau=n')+\mu(\omega, |g(\omega)-g'(\omega)|\geqslant\delta/2)\\ &<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

定理 5 (Austin,Edgar,Tulcea) 在定理 4 的条件下,存在严格增加的有界停时序列 $\tau_n, \tau_n\geqslant n$,使得 $f_{\tau_n}\to g\quad a.e.$.

证明 由定理 4 可知,存在 $\tau_n\in T, \tau_{n+1}\geqslant\tau_n\geqslant n$, f_{τ_n} 测度收敛于 g,过渡到子序列可使 $a.e.$ 收敛.

对于实数网$\{x_\tau, \tau\in T\}$,其中 T 是定向集,我们将记

$$\limsup_{\tau\in T}x_\tau=\inf_{\sigma\in T}(\sup_{\sigma\leqslant\tau}x_\tau),$$
$$\liminf_{\tau\in T}x_\tau=\sup_{\sigma\in T}(\inf_{\sigma\leqslant\tau}x_\tau).$$

定理 6 设$(f_n, \mathscr{B}_n, n\geqslant 1)$是实值可积适应序列并且 $f^*\in L_1$,则下面两条件等价:

(i) $\lim_{\tau\in T}Ef_\tau$ 存在,

(ii) f_n $a.e.$ 收敛.

证明 (i)⇒(ii) 设 $\bar{f}=\limsup_{n\to\infty}f_n, \underline{f}=\liminf_{n\to\infty}f_n$,由定理 5,存在单调增加停时序列$\{\tau_n, n\geqslant 1\}$ 和$\{\sigma_n, n\geqslant 1\}$ 使得

$$f_{\tau_n}\to\bar{f},\quad f_{\sigma_n}\to\underline{f}\quad a.e.$$

但由 $|f_{\tau_n}(\omega) - f_{\sigma_n}(\omega)| \leqslant 2f^*$ 和 Lebesgue 控制收敛定理，

$$0 \leqslant \int_\Omega (\bar{f} - \underline{f}) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_{\tau_n}(\omega) - f_{\sigma_n}(\omega)) d\mu$$

$$\leqslant \limsup_{\tau,\sigma\in T} \int_\Omega (f_\tau - f_\sigma) d\mu = 0$$

于是 $\bar{f} = \underline{f}$ $a.e.$，即 f_n $a.e.$ 收敛.

(ii)⇒(i)　若 $f_n \to g$ $a.e.$，则 $\lim_{\tau\in T} f_\tau = g$ $a.e.$ 但 $|f_\tau(\omega)| \leqslant f^*$，由控制收敛定理得出 $\lim_{\tau\in T} Ef_\tau = Eg$.

定理 7　每个 L_1 有界实值渐近鞅是 $a.e.$ 收敛的.

证明　设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 L_1 有界渐近鞅，则 $(-a \vee f_n \wedge a, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 L_1 有界渐近鞅，并且 $\sup_{n\geqslant 1} |-a \vee f_n \wedge a| \leqslant a$. 由定理 6，此渐近鞅 $a.e.$ 收敛. 但由极大引理，当 a 足够大时，$\mu(\omega, f^* > a)$ 可任意小，于是 f_n $a.e.$ 收敛.

定理 8（推广的 Fatou 不等式，Chacon）　设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是实值 L_1 有界适应序列，则

$$\int_\Omega (\bar{f} - \underline{f}) d\mu \leqslant \limsup_{\sigma,\tau\in T} \int_\Omega (f_\tau - f_\sigma) d\mu \tag{1.7}$$

此外若 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 (B) 有界的，则 $\bar{f}, \underline{f}$ 是可积的.

证明　1°　先设 $f^* \in L_1$. 定理 6 的证明说明

$$\int_\Omega (\bar{f} - \underline{f}) d\mu \leqslant \lim \sup_{\sigma,\tau\in T} \int_\Omega (f_\tau - f_\sigma) d\mu$$

成立. 现在若 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 (B) 有界的，此时存在有界停时序列 $\{\tau_n, n \geqslant 1\}$ 使得 $f_{\tau_n} \to \bar{f}$ $a.e.$，由 Fatou 引理

$$E|\bar{f}| \leqslant \liminf_{n\to\infty} E|f_{\tau_n}| \leqslant \sup_{\tau\in T} E|f_\tau| < \infty$$

故 $\bar{f}$ 可积，同样地，$\underline{f}$ 也可积.

由极大引理，存在 $\Omega_k \in \sigma(\bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{B}_n)$ 使得 $\mu(\Omega_k) \leqslant \frac{1}{k} \sup_{\tau\in T} E|f_\tau|$，对于 $\forall\, \omega \in \Omega \backslash \Omega_k$，$f^*(\omega) \leqslant a$，记 $f_n^{(a)} = -a \vee f_n \wedge a$ $(a > 0)$，则 $(f_n^{(a)}, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是适应序列，从而

$$\int_\Omega (\bar{f}_a - \underline{f}_a) d\mu \leqslant \lim \sup_{\sigma,\tau\in T} \int_\Omega (f_\tau^{(a)} - f_\sigma^{(a)}) d\mu$$

$$\leqslant \limsup_{\sigma,\tau\in T}\int_\Omega (f_\tau - f_\sigma)d\mu.$$

令 $a\to\infty$，由 $\bar f,\underline f$ 的可积性得出(1.7)

2° 若$\sup\limits_{\tau\in T}E|f_\tau| = \infty$. 由于$\sup\limits_{n\geqslant 1}E|f_n| = M < \infty$，必有

$$\lim\sup_{\sigma,\tau\in T}\int_\Omega (f_\tau - f_\sigma)d\mu = \infty, \tag{1.8}$$

从而(1.7) 仍成立. 实际上，此时有$\sup\limits_{\tau\in T}Ef_\tau^- = \infty$. 从而对于每个 $\tau\in T$. 取 $n\geqslant \sup\{\tau(\omega),\omega\in\{f_\tau^+ = 0\}\}$，令 $\tau' = \tau\chi_{\{f_\tau^+>0\}} + n\chi_{\{f_\tau^+=0\}}$ 则 $\tau'\in T$ 并且

$$\int_\Omega (f_{\tau'} - f_n)d\mu \geqslant \int_\Omega f_\tau^+ d\mu - M$$

于是(1.8) 式成立.

现在让我们回到一般 Banach 空间值渐近鞅.

定理 9 (选择定理) 设$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是渐近鞅，$\{\tau_n,n\geqslant 1\}$是单调增加的有界停时序列，则$(f_{\tau_n},\mathscr{B}_{\tau_n},n\geqslant 1)$ 仍是渐近鞅.

证明 设 $g_n = f_{\tau_n},\mathscr{G} = \mathscr{B}_{\tau_n},T'$ 是关于$\mathscr{G}_n$ 的有界停时全体. 注意关于$\{\mathscr{G}_n\}$ 的停时 τ' 一定是关于$\{\mathscr{B}_n\}$ 的停时，因此关于$(g_n,\mathscr{G}_n,n\geqslant 1)$ 的网$\lim\limits_{\tau'\in T'}Eg_{\tau'}$ 是$\lim\limits_{\tau\in T}Ef_\tau$ 的子网. 故结论成立.

由定理 9 又可得到

定理 10 (停止定理) 设$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是渐近鞅，则对于任何停时 τ，停止序列$(f_{\tau\wedge n},\mathscr{B}_{\tau\wedge n},n\geqslant 1)$ 是渐近鞅.

定理 11 (Riesz 分解定理) 设 X 具有 RN 性质，$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是渐近鞅，并且$\liminf\limits_{n\to\infty}E\|f_n\| < \infty$，则 $f_n = g_n + h_n(n\geqslant 1)$，其中$(g_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是鞅，$(h_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是强势(strong potential)，即$\lim\limits_{\tau\in T}|\nu_\tau|(\Omega) = 0$，其中 $\nu_\tau(A) = \int_A h_\tau d\mu, A\in\mathscr{B}_\tau$. 此分解是唯一的.

证明 对于 $\forall A\in\mathscr{B}_\infty,\mu_\infty(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$ 存在. 令 $F_n = \mu_\infty|\mathscr{B}_n$，即对于每个 $A\in\mathscr{B}_n,F_n(A) = \lim\limits_{m\to\infty}\int_A f_m d\mu$. 由于

$\liminf\limits_{n\to\infty} E\|f_n\| < \infty$. 容易验证 $F_n:\mathscr{B}_n \to X$ 是有界变差向量测度. 由 Vitalli-Hahn-Saks 定理, F 是 μ 连续的. X 具有 RN 性质, 故存在 $g_n:\Omega \to X$ 使得

$$F_n(A) = \int_A g_n d\mu, \quad \forall\, A \in \mathscr{B}_n.$$

对于每个 $A \in \mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}_{n+1}$,

$$\int_A g_{n+1} d\mu = \lim_{m\to\infty}\int_A f_m d\mu = \int_A g_n d\mu \tag{1.9}$$

$(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅, 令 $h_n = f_n - g_n$ 则当 $A \in \mathscr{B}_n$ 时,

$$\lim_{m\to\infty}\int_A h_m d\mu = \lim_{m\to\infty}\int_A f_m d\mu - \lim_{m\to\infty}\int_A g_m d\mu = 0 \tag{1.10}$$

注意 $F_\tau(A) = \int_A g_\tau d\mu$, 则 $\mu_\tau(A) = F_\tau(A) + \nu_\tau(A), A \in \mathscr{B}_\tau$. 由渐近鞅性质, 根据定理 2

$$\lim_{\tau\in T} |\mu_\tau - (\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)|(\Omega) = 0 \tag{1.11}$$

但由 $F_n = \mu_\infty|\mathscr{B}_n$ 知 $F_\tau = \mu_\infty|\mathscr{B}_\tau$ 从而

$$\mu_\tau - (\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau) = \mu_\tau - F_\tau = \nu_\tau$$

(1.11) 变为 $\lim\limits_{\tau\in T}|\nu_\tau|(\Omega) = 0$, $(h_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是强势.

若 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 另有分解 $f_n = g'_n + h'_n$, 其中 $(g'_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅, $(h'_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 强势. 则 $g_n - g'_n = h'_n - h_n (n \geqslant 1)$, 由鞅性质知道, 当 $m \geqslant n$ 时

$$\begin{aligned} h'_n - h_n = g_n - g'_n &= E(g_{n+1} - g'_{n+1}|\mathscr{B}_n) \\ &= E(g_m - g'_m|\mathscr{B}_n) = E(h'_m - h_m|\mathscr{B}_n), \end{aligned}$$

此时对于 $\forall\, A \in B_n$,

$$\int_A (h'_n - h_n) d\mu = \int_A (h'_m - h_m) d\mu$$

令 $m \to \infty$ 得到

$$\int_A (h'_n - h_n) d\mu = \lim_{m\to\infty}\int_A (h'_m - h_m) d\mu = 0$$

h'_n, h_n 关于 $\mathscr{B}_n$ 可测, 从而 $h'_n = h_n$, 于是 $g_n = g'_n (n \geqslant 1)$.

例 1　设 $X = l_p(1 < p < \infty)$，$\{e_n\}$ 是 l_p 的标准基. (Ω, Σ, μ) 是(0,1] 上的 Lebesgue 测度空间. 令

$$e_1^1 = e_1, e_2^1 = e_2, e_2^2 = e_3, e_3^1 = e_4, \cdots,$$

$$A_1^1 = (0,1], A_2^1 = (0, \frac{1}{2}], A_2^2 = (\frac{1}{2}, 1], A_3^1 = (0, \frac{1}{4}], \cdots,$$

定义

$$f_n = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} e_n^i \chi_{A_n^i}, \mathscr{B}_n = \sigma(A_n^1, \cdots, A_n^{2^{n-1}}), n \geqslant 1.$$

注意此例中：

1° X 是自反空间，具有 RN 性质并且其共轭空间是可分的.

2° 由于 $\| f_n(\omega) \| = 1$，故 $E\| f_\tau \| = 1, \sup\limits_{\tau \in T} E \| f_\tau \| < \infty$.

3° $\lim\limits_{\tau \in T} E f_\tau = 0$. 实际上

$$\| E f_n \| = \| \sum_{i=1}^{2^{n-1}} e_n^i \mu(A_n^i) \| = (\sum_{i=1}^{2^{n-1}} (\frac{1}{2^n})^p)^{1/p}$$

$$= 2^{n(\frac{1}{p}-1)-\frac{1}{p}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

对于 $\tau \in T$，不妨设 $\tau \geqslant n$，记

$$f_\tau = \sum_j f_j \chi_{\{\tau = j\}} = \sum e_n^i \chi_{A_m^i} \tag{1.12}$$

其中 $\bigcup A_m^i = \Omega$，A_m^i 互不相交，将 A_m^i 分为 2^{n-1} 类，其中第 k 类是 A_n^k 的子集. 此时

$$\| E f_\tau \| = (\sum_i \mu(A_n^i)^p)^{1/p} = (\sum_{i=1}^{2^{n-1}} \sum_{A_m^i \subset A_n^i} \mu(A_m^i)^p)^{1/p}$$

注意当 $n_1, \cdots, n_k$ 是满足

$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n_k}}$$

的自然数时，

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)^p \geqslant \left(\frac{1}{2^{n_1}}\right)^p + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n_k}}\right)^p \quad (p > 1).$$

从而 $\| E f_\tau \| \leqslant \| E f_n \| (\tau \geqslant n)$ 并且得出 $\lim\limits_{\tau \in T} E f_\tau = 0$.

4°　对于每个 $\omega \in \Omega$，$f_n(\omega)$ 不是收敛的.

定理 12 (Chacon,Sucheston)　设 X 是具有 RN 性质的 Banach 空间,其共轭空间 X^* 是可分的,若$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是(B)有界的 X 值渐近鞅,则 f_n 弱 $a.e.$ 收敛.

证明　设$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是$(B)$有界渐近鞅,对于 $a>0$,定义 $\tau=\inf\{k,\|f_k\|>a\}$,$(\inf\phi=\infty)$. 并且记 $Y=\sup\limits_n\|f_{\tau\wedge n}\|$. 注意在$\{\tau=\infty\}$上,$Y<a$. 在$\{\tau<\infty\}$上,$\|f_{\tau\wedge n}\|\to\|f_\tau\|$ $a.e.$,从而由 Fatou 引理

$$\int_{\{\tau<\infty\}}\|f_\tau\|d\mu\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_{\{\tau<\infty\}}\|f_{\tau\wedge n}\|d\mu$$

$$\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega\|f_{\tau\wedge n}\|d\mu\leqslant\sup_{\tau\in T}E\|f_\tau\|<\infty.$$

根据 τ 的定义,在$\{\tau<\infty\}$上,$\|f_{\tau\wedge n}\|\leqslant\|f_\tau\|$,从而

$$\int_\Omega Yd\mu=\int_{\{\tau<\infty\}}Yd\mu+\int_{\{\tau=\infty\}}Yd\mu\leqslant\sup_{\tau\in T}E\|f_\tau\|+a<\infty$$

即 $Y\in L_1$. 我们已经知道,$(f_{\tau\wedge n},\mathscr{B}_{\tau\wedge n},n\geqslant 1)$ 是渐近鞅,从而对于每个 $x^*\in X^*$,$(x^*f_{\tau\wedge n},\mathscr{B}_{\tau\wedge n};n\geqslant 1)$ 是渐近鞅,并且

$$\sup_{n\geqslant 1}|x^*f_{\tau\wedge n}(\omega)|\leqslant\|x^*\|Y(\omega)\qquad(1.13)$$

由定理 6,$x^*f_{\tau\wedge n}$ $a.e.$ 收敛,不妨设 $x^*f_{\tau\wedge n}\to h_{x^*}$,$a.e.$ 由于 X^* 可分,由 Ⅱ. §4 Scolora 定理的证明,存在着与 x^* 无关的 0 测度集 A,使得当 $\omega\in\Omega\backslash A$ 时

$$x^*f_{\tau\wedge n}\to h_{x^*}\ (n\to\infty)\qquad(1.14)$$

由(1.13),对于 $\forall\ A\in\sigma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_A x^*f_{\tau\wedge n}d\mu=\int_A h_{x^*}d\mu\qquad(1.15)$$

另一方面,由于$(f_{\tau\wedge n},\mathscr{B}_{\tau\wedge n},n\geqslant 1)$ 是鞅,故对于 $\forall\ A\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$,

$$\mu_\infty(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_{\tau\wedge n}(A)=\lim_{n\to\infty}\int_A f_{\tau\wedge n}d\mu\qquad(1.16)$$

存在. 由 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_{\tau\wedge n}\|\leqslant Y$,$\mu_\infty:\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n\to X$ 是有界变差 μ 连续的,

μ_∞ 到 $\sigma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n)$ 上的延拓仍记为 μ_∞，由 X 的 RN 性质，存在 $g:\Omega\to X$，使得

$$\mu_\infty(A)=\int_A g d\mu,\quad A\in\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n).$$

对于 $\forall\ x^*\in X^*$，

$$\int_A x^* g d\mu = x^*\mu_\infty(A)=\lim_{n\to\infty}\int_A x^* f_{\tau\wedge n} d\mu=\int_A h_{x^*} d\mu,$$

于是 $h_{x^*}=x^* g, a.e.$，从而(1.14)变为 $x^* f_{\tau\wedge n}\to x^* g, a.e.$ 在 $\{\tau=\infty\}$ 上，$f_{\tau\wedge n}=f_n$，于是 f_n 在 $\{\tau=\infty\}$ 上 w-$a.e.$ 收敛. 但由极大引理，$\mu(\tau<\infty)=\mu(f^*>a)$ 的测度可任意小，故最终有 f_n w $a.e.$ 收敛.

下面例子表明当把(B)有界换为 $L_1(\mu,X)$ 有界时，定理12的结论不成立.

例 2 设 $X=l_2$，(Ω,Σ,μ) 是$(0,1]$上的Lebesgue测度空间. 若 e_n^i 是 l_2 中的标准基，当 $n\neq n'$ 或 $n=n'$ 但 $i\neq i'$ 时 $e_n^i\perp e_{n'}^{i'}$，令 $A_n^i=\left(\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right]$，$i=1,2,\cdots,2^n$，$n=1,2,\cdots$，定义

$$y_n^k=\sum_{i=1}^{2^n}\alpha_i e_n^i\chi_{A_n^i}, k=1,2,\cdots 2^n, n=1,2,\cdots,$$

其中 $\alpha_i=1$，若 $i\neq k$；$\alpha_i=n$，若 $i=k$.

若 y_n^k 按如下顺序排列起来得到的函数序列为 f_n：当 $n<n'$ 或者 $n=n'$ 但 $k<k'$，y_n^k 在 $y_{n'}^{k'}$ 前面，记 $\mathscr{B}_n=\sigma(f_k,k\leqslant n)$，则适应序列$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$满足

1° $\sup\limits_{n\geqslant 1}E\|f_n\|<\infty$. 实际上

$$E\|y_n^k\|\leqslant\sum_{i\neq k}\|e_n^i\|\mu(A_n^i)+n\|e_n^i\|\mu(A_n^i)$$
$$\leqslant 1+(n-1)\frac{1}{2^n}\leqslant 3/2.$$

2° $\lim\limits_{\tau\in T}Ef_\tau=0$. 实际上若记 $f_\tau=\sum\limits_i\alpha_i e_n^i\chi_{A_m^i}$，这里的和是

有限项. 当 $\mu(A_m^i) = \frac{1}{2^k}$ 时,$\alpha_i = 1$ 或 k 并且 e_n^i 互相直交,并且 $\sum_i \mu(A_m^i) = 1$,于是

$$\| Ef_\tau \|^2 = \| \sum_i \alpha_i e_n^i \mu(A_m^i) \|^2 = \sum_i \alpha_i^2 \mu(A_m^i)^2$$

$$\leqslant \max_i(\alpha_i^2 \mu(A_m^i)) \sum_i \mu(A_m^i) \leqslant \frac{k^2}{2^k},$$

其中 $k = \max\tau(\omega)$,故$\lim\limits_{\tau\in T} Ef_\tau = 0$.

3° $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 不是弱 μ-$a.e.$ 收敛的,因为对于每个 $\omega \in \Omega$,$\{f_n(\omega)\}$ 不是有界的.

此例也说明,一个 $L_1(\mu, X)$ 有界渐近鞅不必是(B) 有界的.

§2 一致渐近鞅与有限维空间

定义 1 可积适应序列$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 称为一致渐近鞅(uniform amart),若

$$\lim_{\substack{\tau\geqslant\sigma \\ \tau,\sigma\in T}} \| E(f_\tau | \mathscr{B}_\sigma) - f_\sigma \|_1 = 0, \tag{2.1}$$

称为一致势(uniform potential):若$\lim\limits_{\tau\in T} \| f_\tau \|_1 = 0$.

定理 1 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是一致渐近鞅当且仅当存在向量测度 $\mu_\infty : \mathscr{B}_\infty \to X$ 使得

$$\lim_{\tau\in T} \| \mu_\tau - (\mu_\infty | \mathscr{B}_\tau) \| (\Omega) = 0, \tag{2.2}$$

其中 $\mathscr{B}_\infty = \bigcup\limits_{n\in N} \mathscr{B}_n$,$\mu_\infty | \mathscr{B}_\tau$ 是 μ_∞ 在 $\mathscr{B}_\tau$ 上的限制.

证明 必要性 对于一致渐近鞅$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$,令 $\mu_\infty(A) = \lim\limits_{\tau\in T} \mu_\tau(A)$,$\forall A \in \mathscr{B}_\infty$,注意当 $\tau \geqslant \sigma$ 时,

$$\| E(f_\tau) | \mathscr{B}_\sigma) - f_\sigma \|_1 = \| \mu_\tau - \mu_\sigma \| (\Omega)$$

$$= \sup_\pi \sum_{A\in\pi} \| \mu_\tau(A) - \mu_\sigma(A) \|$$

其中 π 是从 Ω 到 $\mathscr{B}_\sigma$ 的任一有限分划,由一致渐近鞅的定义,对于 $\varepsilon > 0$,$\exists\, n_0$,使得当 $\tau \geqslant \sigma \geqslant n_0$ 时,对于每个 π,

$$\sum_{A\in\pi}\|\mu_\tau(A)-\mu_\sigma(A)\|<\varepsilon,$$

关于 $\tau\in T$ 取极限得到

$$\sum_{A\in\pi}\|\mu_\infty(A)-\mu_\sigma(A)\|\leqslant\varepsilon,\quad\forall A\in\mathscr{B}_\sigma.$$

由 π 的任意性得出 $\lim\limits_{\sigma\in T}\|\mu_\infty|\mathscr{B}_\sigma-\mu_\sigma\|(\Omega)=0.$

充分性　对于 $\tau\geqslant\sigma$,

$$\begin{aligned}\|E(f_\tau|\mathscr{B}_\sigma)-f_\sigma\|_1&=\|\mu_\tau-\mu_\sigma\|(\Omega)\\&\leqslant\|\mu_\tau-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)\|(\Omega)\end{aligned}$$

$$+\|(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\sigma)\|(\Omega)+\|(\mu_\infty|\mathscr{B}_\sigma)-\mu_\sigma\|(\Omega)$$

由(2.2),第一、三两项极限为 0,又对于每个 $A\in\mathscr{B}_\sigma\subset\mathscr{B}_\tau$

$$(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)(A)=\lim_{\substack{\tau'\in T\\ \tau'\geqslant\tau}}\mu_{\tau'}(A)=\lim_{\substack{\tau'\geqslant\sigma\\ \tau'\in T}}\mu_{\tau'}(A)=(\mu_\infty|\mathscr{B}_\sigma)(A).$$

从而

$$\begin{aligned}&\|(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\sigma)\|(\Omega)\\&\qquad=\sup_\pi\sum_{A\in\pi}\|(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)(A)-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\sigma)(A)\|=0.\end{aligned}$$

推论 1　每个一致势是一致渐近鞅.

证明　由 $\mu_\infty(A)=\lim\limits_{\tau\in T}\mu_\tau(A)=0,\forall A\in\mathscr{B}_\infty.$

$$\|\mu_\tau-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)\|(\Omega)=\|\mu_\tau\|(\Omega)=\|f_\tau\|_1$$

定理 1 说明推论成立.

推论 2　每个实值渐近鞅是一致渐近鞅.

由 §1 定理 2(ii) 以及 $\|\mu_\tau-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)\|(\Omega)=|\mu_\tau-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)|(\Omega)$,得之.

定理 2　设 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant1)$ 是 $L_1(\mu,X)$ 有界一致渐近鞅,则

(i) $(\|f_n\|,\mathscr{B}_n,n\geqslant1)$ 是实值渐近鞅.

(ii) $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant1)$ 是 (B) 有界的.

证明　1°　首先 $\|(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)\|(\Omega)$ 关于 τ 是单调增加的,又取 $n\geqslant\tau$,则

$$\|(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)\|(\Omega)\leqslant\|(\mu_\infty|\mathscr{B}_n)\|(\Omega)\leqslant\sup_{n\geqslant1}\|f_n\|_1<\infty$$

于是极限$\lim\limits_{\tau\in T}\|(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)\|(\Omega)$存在且有限. 由定理 1，对于$\forall\varepsilon>0$，取$n_0$使$\tau\geqslant n_0$时

$$\|\mu_\tau-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)\|(\Omega)<\varepsilon.$$

记$\bar{\mu}_\tau(A)=\int_A\|f_\tau\|d\mu=\|\mu_\tau\|(A)$，$\bar{\mu}_\infty(A)=\|\mu_\infty\|(A)$，则

$$|\bar{\mu}_\tau(A)-(\bar{\mu}_\infty|\mathscr{B}_\tau)(A)|=|\|\mu_\tau\|(A)-\|(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)\|(A)|$$
$$\leqslant\|\mu_\tau-(\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)\|(\Omega)<\varepsilon,\ \forall A\in\mathscr{B}_\tau$$

故
$$\lim_{\tau\in T}|\bar{\mu}_\tau-(\bar{\mu}_\infty|\mathscr{B}_\tau)|(\Omega)=0.\tag{2.3}$$

由 §2 定理 2(ii)，$(\|f_n\|,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是渐近鞅.

2° 由(2.3)，取$n_0\in N$使得当$\tau\geqslant n_0$时

$$|\bar{\mu}_\tau-(\bar{\mu}_\infty|\mathscr{B}_\tau)|(\Omega)\leqslant 1,$$

于是根据$|(\bar{\mu}_\infty|\mathscr{B}_\tau)|(\Omega)$关于$\tau$的递增性，

$$\sup_{\tau\geqslant n_0}\bar{\mu}_\tau(\Omega)\leqslant 1+\sup_{\tau\in T}|(\bar{\mu}_\infty|\mathscr{B}_\tau)|(\Omega)\leqslant 1+\sup_{n\in N}\|f_n\|_1.$$

最后对于任何τ，

$$E\|f_\tau\|\leqslant E\|f_{\tau\wedge n_0}\|+E\|f_{\tau\vee n_0}\|+E\|f_{n_0}\|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n_0}E\|f_i\|+1+\sup_{n\in N}\|f_n\|_1+E\|f_{n_0}\|<\infty.$$

推论 3 对于一致渐近鞅$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$，以下条件等价：

(i) $\{f_n,n\geqslant 1\}$是L_1有界的.

(ii) $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是$(B)$有界的.

(iii) $\mu_\infty:\mathscr{B}_\infty\to X$，$\mu_\infty(A)=\lim\limits_{\tau\in T}\mu_\tau(A)$，$A\in\mathscr{B}_\infty$是有界变差的.

证明 (i)$\Longleftrightarrow$(ii) 由定理 2 得知.

(i)$\Rightarrow$(iii) 设π是Ω到$\mathscr{B}_\infty$的任一有限分划，则

$$\sum_{A\in\pi}\|\mu_\infty(A)\|=\sum_{A\in\pi}\lim_{n\to\infty}\|\mu_n(A)\|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{A\in\pi}\|\mu_n(A)\|\leqslant\sup_{n\geqslant 1}\|f_n\|_1.$$

π是任意的，故$\|\mu_\infty\|(\Omega)\leqslant\sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n\|_1<\infty$.

(iii)⇒(ii)　当 μ_∞ 为有界变差时，$\lim\limits_{\tau\in T}\|\mu_\tau-\mu_\infty\|(\Omega)=0$. 取 n_0 使得当 $\tau\geqslant n_0$ 时，$\|\mu_\tau-\mu_\infty\|(\Omega)\leqslant 1$，则 $\|\mu_\tau\|(\Omega)\leqslant\|\mu_\infty\|(\Omega)+1$. 从而

$$\|\mu_\tau\|(\Omega)=\|\mu_\tau\|(\Omega\cap\{\tau\leqslant n_0\})+\|\mu_\tau\|(\Omega\cap\{\tau>n_0\})$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n_0}|\mu_i|(\Omega)+\|\mu_\infty\|(\Omega)+1<\infty$$

即 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是 (B) 有界的.

定理 3　对于任何可积适应序列 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$，当 $(f_\tau,\tau\in T)L_1(\mu,X)$ 收敛时，f_n $a.e.$ 收敛. 特别地每个一致势 $a.e.$ 收敛.

证明　$(f_\tau,\tau\in T)$ 是 $L_1(\mu,X)$ 中的 Cauchy 网，对于每个 $\varepsilon=\frac{1}{2^{2k}}$，存在 $n_k\in N$，$n_k\uparrow\infty$，使得当 $\sigma\in T$，$\sigma\geqslant n_k$ 时，

$$\|f_\tau-f_{n_k}\|_1<\frac{1}{2^{2k}}\tag{2.4}$$

记 $U_n^{(k)}=f_n-f_{n_k}(n\geqslant n_k)$，则 $U_\tau^{(k)}=f_\tau-f_{n_k}(\tau\geqslant n_k)$. (2.4) 表明 $(U_n^{(k)},\mathscr{B}_n,n\geqslant n_k)$ 是 (B) 有界的. 由极大引理，

$$\mu(\omega,\sup_{n\geqslant n_k}\|U_n^{(k)}(\omega)\|\geqslant\frac{1}{2^k})\leqslant 2^k\sup_{\tau\geqslant n_k}\|U_\tau^{(k)}\|_1\leqslant\frac{1}{2^k}$$

令 $A_k=\{\omega,\sup\limits_{n\geqslant n_k}\|U_n^{(k)}(\omega)\|\geqslant\frac{1}{2^k}\}$，$B_j=\bigcup\limits_{k\geqslant j}A_k(j\geqslant 1)$，则

$$\mu(B_j)\leqslant\sum_{k\geqslant j}\mu(A_k)\leqslant\sum_{k\geqslant j}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{j-1}}$$

当 $\omega\overline{\in}B_j$ 时，$\{f_n(\omega),n\geqslant 1\}$ 是 Cauchy 序列，从而是收敛序列. $\mu(B_j)$ 可任意小，于是 f_n，$a.e.$ 收敛.

定理 4 (Riesz 分解)　设 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是一致渐近鞅，则 $f_n=g_n+h_n(n\geqslant 1)$，其中 $(g_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是鞅，$(h_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是一致势. 此种分解是唯一的，此外 $\{f_n,n\geqslant 1\}L_1(\mu,X)$ 有界，则 $\{g_n,n\geqslant 1\}$ 也是.

证明　对于每个 $n\in N$，当 $i\geqslant j\geqslant n$ 时，

$$\|E(f_i|\mathscr{B}_n)-E(f_j|\mathscr{B}_n)\|_1$$

$$= \| E((E(f_i | B_j) - f_j) | \mathscr{B}_n) \|_1$$

$$\leqslant \| E(f_i | \mathscr{B}_j) - f_j \|_1 \to 0 (i, j \to \infty) \qquad (2.5)$$

于是 $(E(f_i | \mathscr{B}_n), i \geqslant n)$ 是 $L_1(\mu, X)$-Cauchy 序列. 记 $g_n = \lim_{i \to \infty} E(f_i | \mathscr{B}_n)$，显然 g_n 关于 $\mathscr{B}_n$ 可测并且 $g_n \in L_1(\mu, X)$. 当 i 足够大时，由 $L_1(\mu, X)$ 收敛性，

$$E(g_{n+1} | \mathscr{B}_n) = E(\lim_{i \to \infty} E(f_i | \mathscr{B}_{n+1}) | \mathscr{B}_n)$$

$$= \lim_{i \to \infty} E(f_i | \mathscr{B}_n) = g_n.$$

$(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅. 对于 $h_n = f_n - g_n$，显然 $h_\sigma = f_\sigma - g_\sigma$. 若 $\varepsilon > 0$，一方面由一致渐近鞅定义，先取 n_0 使得当 $\tau \geqslant \sigma \geqslant n_0$ 时，

$$\| E(f_\tau | \mathscr{B}_\sigma) - f_\sigma \| < \varepsilon/2.$$

另一方面，不难验证，在 $L_1(\mu, X)$ 范数意义下，

$$g_\sigma = \lim_{i \to \infty} E(f_i | \mathscr{B}_\sigma). \qquad (2.6)$$

取 $i \geqslant \sigma$ 足够大，以至于 $\| g_\sigma - E(f_i | \mathscr{B}_\sigma) \|_1 < \varepsilon/2$，则

$$E \| h_\sigma \| = E \| f_\sigma - g_\sigma \| \leqslant E \| f_\sigma - E(f_i | \mathscr{B}_\sigma) \|$$

$$+ E \| E(f_i | \mathscr{B}_\sigma) - g_\sigma \| < \varepsilon.$$

$(h_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是一致势.

若 $f_n = g'_n + h'_n (n \geqslant 1)$ 是另一分解，其中$(g'_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅，$(h'_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是一致势. 则由鞅性质，

$$\| g_n - g'_n \|_1 \leqslant \| g_{n+1} - g'_{n+1} \|_1 \leqslant \cdots \leqslant \| g^{n+k} - g'_{n+k} \|_1 \qquad (2.7)$$

另一方面，

$$\| g_{n+k} - g'_{n+k} \|_1 = \| h_{n+k} - h'_{i-k} \|_1 \to 0 (k \to \infty) \quad (2.8)$$

两式一起说明 $\| g_n - g'_n \|_1 = 0$，即 $g_n = g'_n \ a.e. \ (n \geqslant 1)$. 于是也有 $h_n = h'_n \ a.e.,(n \geqslant 1)$.

若$\sup_{n \geqslant 1} \| f_n \|_1 < \infty$，则由 $\| E(f_i | \mathscr{B}_n) \|_1 \leqslant \| f_i \|$ 知道

$$\sup_{n \geqslant 1} \| g_n \|_1 \leqslant \sup_{i \geqslant 1} \| f_i \|_1 < \infty$$

推论 4 设$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是一致渐近鞅，若 $\| f_n - f \|_1 \to$

0，则 $f_n \to f$ $a.e.$

证明 设 $f_n = g_n + h_n$ 是$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 的 Riesz 分解，则 $\| h_n \|_1 \to 0$ 并且 $h_n \to 0$ $a.e.$，从而 $\| g_n - f \|_1 \to 0$. 由第 Ⅱ 章 §2 定理 2，$g_n \to g$ $a.e.$，所以 $f_n \to f$ $a.e.$.

定理 5(Bellow) 若 X 具有 RN 性质，则每个 $L_1(\mu, X)$ 有界一致渐近鞅 $a.e.$ 收敛.

证明 对于 $L_1(\mu, X)$ 有界一致渐近鞅$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 作 Riesz 分解 $f_n = g_n + h_n$，其中$(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 $L_1(\mu, X)$ 有界鞅，X 具有 RN 性质，从而是 $a.e.$ 收敛的，$(h_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是一致势. 由定理 3，$h_n \to 0$ $a.e.$，从而 f_n $a.e.$ 收敛.

定理 6 设$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是可积适应序列并且 $f^* \in L_1$，则下面条件有(i)⇒(ii)：

(i) f_n $a.e.$ 收敛.

(ii) $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是一致渐近鞅.

若 X 具有 RN 性质，则又有(ii)⇒(i).

证明 1° 不妨设 $f_n \to f_\infty$ $a.e.$，于是 $\lim\limits_{\tau \in T} f_\tau = f_\infty$ $a.e.$，当 $f^* \in L_1$ 时，$\| f_\tau(\omega) \| \leqslant f^*(\omega)$. 于是由控制收敛定理，$\lim\limits_{\tau \in T} \| f_\tau - f_\infty \|_1 = 0$. 现在若 $\tau \geqslant \sigma$，$\tau, \sigma \in T$，则

$$\begin{aligned} \| E(f_\tau | \mathscr{B}_\sigma) - f_\sigma \|_1 &\leqslant \| f_\tau - f_\sigma \|_1 \\ &\leqslant \| f_\tau - f_\infty \|_1 + \| f_\sigma - f_\infty \|_1 \to 0 \end{aligned}$$

故为渐近鞅.

2° 设 X 具有 RN 性质，由 $f^* \in L_1$ 知道，f_n 是 $L_1(\mu, X)$ 有界的，定理 5 保证了 f_n $a.e.$ 收敛.

推论 5 设 X 是 Banach 空间，则 X 具有 RN 性质当且仅当对于任一测度空间(Ω, Σ, μ) 和随机基$\{\mathscr{B}_n, n \geqslant 1\}$，每个 $L_1(\mu, X)$ 有界一致渐近鞅$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ $a.e.$ 收敛.

定理 7（**选样定理**） 设$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是一致渐近鞅，$\{\tau_k, k \geqslant 1\}$ 是单调增加有界停时序列，$g_k = f_{\tau_k}$，$\mathscr{G}_k = \mathscr{B}_{\tau_k}$，则$(g_k, \mathscr{G}_k, k$

$\geqslant 1)$ 是一致渐近鞅，若 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是 $L_1(\mu,X)$ 有界的，则 $(g_k,\mathscr{G}_k,k\geqslant 1)$ 也是 $L_1(\mu,X)$ 有界的.

证明 对于 $\forall\ \varepsilon>0$，取 n_0 使得当 $\tau',\tau\in T,\tau'\geqslant\tau\geqslant n_0$ 时

$$\| E(f_{\tau'}|\mathscr{B}_\tau)-f_\tau\|_1<\varepsilon \tag{2.9}$$

设 $\tau_\infty=\sup\limits_{k\geqslant 1}\tau_k$，$\tau_\infty$ 是关于 $\{\mathscr{B}_n,n\geqslant 1\}$ 的停时，τ_∞ 可能不是有限的.

对于每个 $k\geqslant 1$.

$$\| f_{\tau_k\wedge n_0}(\omega)\|\leqslant\sup_{1\leqslant i\leqslant n_0}\| f_i(\omega)\|$$

并且

$$\lim_{k\to\infty}f_{\tau_k\wedge n_0}(\omega)=f_{\tau_\infty\wedge n_0}(\omega)\quad a.e. \tag{2.10}$$

由定理 6，$(f_{\tau_k\wedge n_0},\mathscr{G}_k,k\geqslant 1)$ 是一致渐近鞅.

由推论 3 得到 g_k 的 $L_1(\mu,X)$ 有界性.

定理 8(停止定理) 设 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是一致渐近鞅，τ 是关于 $\{\mathscr{B}_n,n\geqslant 1\}$ 的任一停时，则 $(f_{\tau\wedge n},\mathscr{B}_{\tau\wedge n},n\geqslant 1)$ 是一致渐近鞅.

此结论由定理 7 直接得出.

定义 2 可积适应序列 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 称为 p 拟鞅(p-quasi-martingale) $(1\leqslant p\leqslant\infty)$，若

$$\sum_{n=1}^{\infty}\| E(f_{n+1}|\mathscr{B}_n)-f_n\|_p<\infty, \tag{2.11}$$

当 $p=1$ 时简称为拟鞅(quasimartingale).

定理 9 每个 p 拟鞅是一致渐近鞅 $(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

证明 只须考虑 $p=1$ 的情况. 对于任何 $A\in\mathscr{B}_n$，

$$\left\|\int_A f_m d\mu-\int_A f_n d\mu\right\|\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}\left\|\int_A f_{i+1}d\mu-\int_A f_i d\mu\right\|$$

$$\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}\int_A\| E(f_{i+1}|\mathscr{B}_i)-f_i\| d\mu \tag{2.12}$$

故 $\mu_\infty(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$ 存在，$A\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$，其中 $\mu_i(A)=\int_A f_i d\mu$. 现在对于任何 $\tau\in T$，例如 $k\geqslant\tau\geqslant n_0$，利用(2.12)，当 $A\in\mathscr{B}_\tau$ 时

$$\|\mu_\tau(A)-\mu_k(A)\|$$

$$\leqslant \sum_{i=n_0}^{k} \| \mu_i(A \cap \{\tau = i\}) - \mu_k(A \cap (\tau = i)) \|$$

$$\leqslant \sum_{i=n_0}^{k} \sum_{j=i}^{k-1} \int_{A \cap \{\tau = i\}} \| E(f_{j+1} | \mathscr{B}_j) - f_j \| d\mu$$

$$\leqslant \sum_{j=n_0}^{k-1} \int_A \| E(f_{j+1} | \mathscr{B}_j) - f_j \| d\mu;$$

令 $k \to \infty$，则

$$\| \mu_\tau(A) - \mu_\infty(A) \| \leqslant \sum_{j=n_0}^{\infty} \int_A \| E(f_{j+1} | \mathscr{B}_j) - f_j \| d\mu$$

从而

$$\| \mu_\tau - (\mu_\infty | \mathscr{B}_\tau) \| (\Omega) \leqslant \sum_{j=n_0}^{\infty} \| E(f_{j+1} | \mathscr{B}_j) - f_j \|_1,$$

$$\lim_{\tau \in T} \| \mu_\tau - (\mu_\infty | \mathscr{B}_\tau) \| (\Omega) = 0 \tag{2.13}$$

例 一致渐近鞅不必是拟鞅. 只须考虑 $f_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

定理 10 (Doob 分解) 每个 p 拟鞅 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 有分解 $f_n = g_n + h_n$，其中 $(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅，$(h_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是可料 p 拟鞅. 若 $\sup_{n \geqslant 1} \| f_n \|_p < \infty$，则 $\sup_{n \geqslant 1} \| g_n \|_p < \infty$.

证明 令 $g_0 = h_0 = 0, \mathscr{B}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

$$dg_n = df_n - E(df_n | \mathscr{B}_{n-1}), \qquad g_n = \sum_{i=1}^{n} dg_i$$

$$dh_n = E(df_n | \mathscr{B}_{n-1}), \qquad h_n = \sum_{i=1}^{n} dh_i$$

容易知道，$(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是鞅，$(h_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是可料序列并且

$$\| h_n \|_p = \sum_{i=1}^{\infty} \| E(f_n | \mathscr{B}_{n-1}) - f_{n-1} \|_p < \infty \tag{2.14}$$

实际上

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| E(h_n | \mathscr{B}_{n-1}) - h_{n-1} \|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \| dh_n \|_p$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| E(f_n | \mathscr{B}_{n-1}) - f_{n-1} \|_p < \infty$$

$(h_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是 p 拟鞅. 又由 $df_n=dg_n+dh_n$ 知道 $f_n\doteq g_n+h_n\quad(n\geqslant 1)$. 于是

$$\sup_{n\geqslant 1}\|g_n\|_p\leqslant\sup_{n\geqslant 1}\|f_n\|_p+\sup_{n\geqslant 1}\|h_n\|_p<\infty$$

定理 11 (Riesz **分解**) 设 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是 p 拟鞅, 则 $f_n=g_n+h_n(n\geqslant 1)$, 其中 $(g_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是鞅, $(h_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 满足

$$\|h_n\|_p\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}\|E(f_{n+1}|\mathscr{B}_n)-f_n\|_p \tag{2.15}$$

特别地 $h_n\to 0\ a.e.$.

证明 对于每个 n, 当 $j\geqslant i\geqslant n$ 时

$$\begin{aligned}&\|E(f_j|\mathscr{B}_n)-E(f_i|\mathscr{B}_n)\|_p\\&\qquad\leqslant\|E(\sum_{k=i}^{j-1}(E(f_{k+1}|\mathscr{B}_n)-f_k)|\mathscr{B}_n)\|_p\\&\qquad\leqslant\sum_{k=i}^{j-1}\|E(f_{k+1}|\mathscr{B}_k)-f_k\|_p,\end{aligned}$$

于是 $\{E(f_i|\mathscr{B}_n),i\geqslant n\}$ 是 $L_p(\mu,X)$ 中的 Cauchy 序列. 不妨设 $g_n=\lim\limits_{i\to\infty}E(f_i|\mathscr{B}_n)$. 由于

$$\begin{aligned}E(g_{n+1}|\mathscr{B}_n)&=E(\lim_{i\to\infty}E(f_i|\mathscr{B}_{n+1})|\mathscr{B}_n)\\&=\lim_{i\to\infty}E(f_i|\mathscr{B}_n)=g_n,\end{aligned}$$

$(g_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是鞅. 令 $h_n=f_n-g_n$, 则

$$\begin{aligned}\|h_n\|_p&=\lim_{i\to\infty}\|f_n-E(f_i|\mathscr{B}_n)\|_p\\&\leqslant\lim_{i\to\infty}\sup\sum_{j=n}^{i-1}\|E(f_{j+1}|\mathscr{B}_j)-f_j\|_p\\&\leqslant\sum_{j=n}^{\infty}\|E(f_{j+1}|\mathscr{B}_j)-f_j\|_p\end{aligned} \tag{2.16}$$

注意 $h_\tau=f_\tau-g_\tau$, 于是对于 $\tau,\sigma\in T,\tau\geqslant\sigma$.

$$E(h_\tau|\mathscr{B}_\sigma)-h_\sigma=E(f_\tau|\mathscr{B}_\sigma)-f_\sigma \tag{2.17}$$

$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是拟鞅, 从而是一致渐近鞅, 所以 $(h_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是一致渐近鞅. (2.16) 说明 $\|h_n\|_p\to 0$. 对于 $\forall\ \varepsilon>0$, 取 n_0 使得当 $\tau\geqslant\sigma\geqslant n_0$ 时,

$$\| E(h_\tau|\mathscr{B}_\sigma) - h_\sigma \|_1 \leqslant \| E(f_\tau|\mathscr{B}_\sigma) - f_\sigma \|_1 < \varepsilon$$

特别地取 $\tau = n$ 并且在上式中令 $n \to \infty$，则 $\| E(h_n|\mathscr{B}_\sigma) \|_1 \leqslant \| h_n \|_1 \to 0$，于是 $\| h_\sigma \|_1 \leqslant \varepsilon$.

同样对于 p 拟鞅也有选样定理和停止定理，这里不拟叙述.

定理 12　设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) 对于任何测度空间和随机基，每个 $L_1(\mu, X)$ 有界渐近鞅是 (B) 有界的.

(iii) 对于任何测度空间和随机基，每个渐近鞅是一致渐近鞅.

(iv) 对于任何测度空间和随机基，每个 $L_1(\mu, X)$ 有界渐近鞅 $a.e.$ 收敛.

证明　(i)⇒(ii) 我们已经对于 $\dim X = 1$ 的情况证明了(ii). 见推论 2 与定理 2，到有限维空间的推广是容易的.

(ii)⇒(i)　§1 例 2 说明 l^2 中存在 $L_1(\mu, X)$ 有界渐近鞅不是 (B) 有界的. 但由 Dvoretzky-Rogers 定理，l^2 在任一无穷维空间 Y 中是有限可表现的.（详见 Ⅵ. §4）. 由此我们可以在 $L_1(\mu, Y)$ 中构造出一个与上述例子类似的渐近鞅.

(i)⇒(iv) 由推论 6 得之. (iv)⇒(i) 由 §1 例 1 和上面论述得之.

(i)⇒(iii)　设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是渐近鞅，由 §1 定理 2，

$$\lim_{\tau \in T} |\mu_\tau - (\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau)|(\Omega) = 0,$$

其中 $\mu_\infty(A) = \lim\limits_{\tau \in T} \mu_\tau(A), A \in \mathscr{B}_\infty$. 但由 Ⅰ. §1 定理 6，对于有限维空间可得出

$$\lim_{\tau \in T} \| \mu_\tau - (\mu_\infty|\mathscr{B}_\tau) \| (\Omega) = 0.$$

定理 1 说明 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是一致渐近鞅.

(iii)⇒(ii) 容易从定理 2 得到.

定理 13　设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) 对于任何测度空间和随机基，每个强势是一致势.

(iii) 对于任何测度空间和随机基，每个强势 $a.e.$ 收敛于 0.

(iv) 对于任何测度空间和随机基，每个 $L_p(\mu,X)$ 有界渐近鞅弱 $a.e.$ 收敛.

(v) 对于任何测度空间和随机基，每个 $L_p(\mu,X)$ 有界强势弱 $a.e.$ 收敛. 这里 $1 \leqslant p < \infty$.

(vi) 对于任何测度空间和随机基，每个 $L_1(\mu,X)$ 有界渐近鞅$(f_n,\mathscr{B}_n,n \geqslant 1)$，$(\| f_n \|,\mathscr{B}_n,n \geqslant 1)$ 是渐近鞅.

证明 (i)⇒(ii)⇒(iii) 由定理 14(iii) 和定理 3 得到. §1 例 1 说明(iii)⇒(i) 成立. (i)⇒(iv) 是定理 14(iv) 的结论，(iv)⇒(v) 显然. 最后 §1 例 2 和定理 14 证明中(ii)⇒(i) 的论述说明(v)⇒(i) 成立. (i)⇒(vi) 由定理 2 和定理 14(iii) 得出. (vi)⇒(i) 由定理 14(iii) 得出.

§3 鞅型序列的收敛定理

我们已叙述了作为对于鞅这种随机序列推广的拟鞅、一致渐近鞅和渐近鞅等概念，它们和下面定义中所说的概率渐近鞅，极限鞅，亚极限鞅，GFT 对策等统称鞅型序列. 这里我们将着重讨论它们的 $a.e.$ 收敛性质.

定义 设$(f_n,\mathscr{B}_n,n \geqslant 1)$ 是可积适应序列.

(i) 称$(f_n,\mathscr{B}_n,n \geqslant 1)$ 是概率渐近鞅(pramart)：若对于 $\forall\ \delta > 0$,

$$\lim_{\substack{\tau \geqslant \sigma \\ \tau,\sigma \geqslant T}} \mu(\| E(f_\tau | \mathscr{B}_\sigma) - f_\sigma \| \geqslant \delta) = 0 \tag{3.1}$$

(iii) 称$(f_n,\mathscr{B}_n,n \geqslant 1)$ 是极限鞅(martingale in the limit)：若

$$\lim_{\substack{m \geqslant n \\ n \to \infty}} \| E(f_m | \mathscr{B}_n) - f_n \| = 0 \quad a.e. \tag{3.2}$$

(iii) 称$(f_n,\mathscr{B}_n,n \geqslant 1)$ 是亚极限鞅(mil)：若对于 $\forall\ \varepsilon > 0$，存

在 n_0 使得对于每个 $n \geqslant n_0$,

$$\mu(\sup_{n_0 \leqslant p \leqslant n} \| E(f_n | \mathscr{B}_p) - f_p \| > \varepsilon) < \varepsilon \tag{3.3}$$

(iv) 称$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$是趋于公平的对策(GFT,i. e. game fairer with time):若对于任何 $\delta > 0$,

$$\lim_{\substack{m \geqslant n \\ n \to \infty}} \mu(\| E(f_m | \mathscr{B}_n) - f_n \| \geqslant \delta) = 0 \tag{3.4}$$

容易知道,一致渐近鞅必定是概率渐近鞅,一个极限鞅是亚极限鞅. 后者又是趋于公平的对策. 另一方面,若$\sup_{n \geqslant 1} \| f_n(\omega) \| \in L_1$,则概率渐近鞅是一致渐近鞅. 下面引理说明在概率渐近鞅与极限鞅之间也存在着一定的包含关系.

定理 1 设$\{\mathscr{B}_n, n \geqslant 1\}$是随机基,对于任何 $\tau, \sigma \in T, \tau \geqslant \sigma$, $f(\sigma, \tau)$ 关于 $\mathscr{B}_\sigma$ 可测并且对于 $\forall\, n \geqslant 1, f(\sigma, \tau)\chi_{\{\sigma = n\}} = f(n, \tau)\chi_{\{\sigma = n\}}$. 若$\{f(\sigma, \tau), \sigma \leqslant \tau\}_{\sigma \in T}$ 依测度收敛,则必 $a.e.$ 收敛.

证明 若$\{f(\sigma, \tau), \sigma \leqslant \tau\}_{\sigma \in T}$ 不是 $a.e.$ 收敛于 f_∞ 的,则存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\mu(\omega, \lim_{n \to \infty} \sup_{\tau \geqslant n} \| f(n, \tau) - f_\infty \| \geqslant \varepsilon) > \varepsilon.$$

对于 f_∞,取 f,f 关于某个 $\mathscr{B}_0$ 可测并且 $\mu(\omega, |f_\infty(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon/4) < \varepsilon/4$,从而

$$\mu(\omega, \lim_{n \to \infty} \sup_{\tau \geqslant n} \| f(n, \tau) - f \| \geqslant \frac{3\varepsilon}{4}) > \frac{3\varepsilon}{4}.$$

于是对于每个 $n_0 \in N$,

$$\mu(\omega, \exists\ n, \tau_n, n_0 \leqslant n \leqslant \tau_n, \| f(n, \tau_n) - f \| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) > \frac{3\varepsilon}{4},$$

取 k 充分大,使得

$$\mu(\omega, \exists\ n, \tau_n, n_0 \leqslant n \leqslant k, \| f(n, \tau_n) - f \| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

定义

$$A_n = \{\omega, \exists\ m, n \leqslant m \leqslant k, \| f(n, \tau_m) - f \| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\},$$

$$A = \bigcup_{n = n_0}^{k} A_n.$$

由引理的条件知 $A_n \in \mathscr{B}_n$ 并且 $\mu(A) > \frac{\varepsilon}{2}$. 令

$$\sigma = \begin{cases} \min\{n, n_0 \leqslant n \leqslant k, \omega \in A_n\}, & \omega \in A \\ k, & \omega \in A^c. \end{cases}$$

$$\tau = \begin{cases} \tau_k, \text{若 } k = \min\{m, \| f(n,\tau_m) - f \| > \frac{\varepsilon}{2}\} \\ \qquad\qquad \omega \in A_n \setminus (\bigcup_{i=n_0}^{n-1} A_i), n = n_0, \cdots, k. \\ k \qquad\qquad \omega \in A^c. \end{cases}$$

则 $\sigma, \tau \in T, \sigma \leqslant \tau$, 由引理中的条件

$$\begin{aligned} f(\sigma,\tau) - f &= \sum_{n=n_0}^{k} (f(n,\tau) - f)\chi_{\{\sigma=n\}} \\ &= \sum_{n=n_0}^{k}\sum_{m=n_0}^{k} (f(n,\tau_m) - f)\chi_{\{\sigma=n\}}\chi_{\{\tau=\tau_m\}} \end{aligned}$$

注意在每个集合 $\{\sigma = n\} \cap \{\tau = m\}$ 上, $\| f(n,\tau_m) - f \| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\mu(\omega, \| f(\sigma,\tau) - f \| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}) \geqslant \mu(A) > \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\mu(\omega, \| f(\sigma,\tau) - f_\infty \| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}) \geqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

与 $\{f(\sigma,\tau), \tau \geqslant \sigma\}_{\sigma \in T}$ 测度收敛于 f_∞ 矛盾.

推论 1 每个概率渐近鞅是极限鞅.

定理 2 每个概率渐近鞅满足选样定理和停止定理.

证明 设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是概率渐近鞅, $\{\tau_n, n \geqslant 1\}$ 是单调增加有界停时序列, $g_n = f_{\tau_n}, \mathscr{G}_n = \mathscr{B}_{\tau_n}, (n \geqslant 1)$. 对于 $\forall\ \varepsilon > 0$, 取 n_0 使得当 $\tau' \geqslant \tau \geqslant n_0$ 时,

$$\mu(\omega, \| E(f_{\tau'} | \mathscr{B}_\tau) - f_\tau \| > \varepsilon) < \varepsilon. \tag{3.5}$$

记 $\tau_\infty = \sup\limits_{n \geqslant 1} \tau_n$, 取 k_0 使得

$$\mu(\{n_0 \leqslant \tau_{k_0}\} \cap \{n_0 < \tau_\infty\}) < \varepsilon. \tag{3.6}$$

若 σ, σ' 是关于 $\{\mathscr{G}_n, n \geqslant 1\}$ 的停时, 并且 $k_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma'$, 则

$$\mu(\omega, \| E(g_{\sigma'} | \mathscr{G}_\sigma) - g_\sigma \| > \varepsilon)$$
$$\leqslant \varepsilon + \mu(\omega, \| E(f_{\tau_{\sigma'}} | \mathscr{B}_{\tau_\sigma}) - f_{\tau_\sigma} \| > \varepsilon, \tau_\sigma > n_0)$$
$$+ \mu(\omega, \| E(f_{\tau_{\sigma'}} | \mathscr{B}_{\tau_\sigma}) - f_{\tau_\sigma} \| > \varepsilon, \tau_\infty \leqslant n_0)$$
$$\leqslant 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{n_0} \mu(\omega, \| E(f_{\tau_{\sigma'}} | \mathscr{B}_{\tau_\sigma}) - f_{\tau_\sigma} \| > \varepsilon, \tau_\infty = n).$$

对于每个$\{\tau_\infty = n\}$，存在k_n使得

$$\mu(\{\tau_\infty = n\} \triangle \bigcap_{k \geqslant k_0} \{\tau_k = n\}) \leqslant \varepsilon n_0^{-1},$$

若取$\sigma' \geqslant \sigma \geqslant \max(k_0, k_1, \cdots, k_n)$，则在$\bigcap_{k \geqslant k_n} \{\tau_k = n\}$上，$\tau_\sigma = \tau_{\sigma'} = n$并且$E(f_{\tau_\sigma} | \mathscr{B}_{\tau_{\sigma'}}) - f_{\tau_\sigma} = 0$，从而

$$\mu(\omega, \| E(g_{\sigma'} | \mathscr{G}_\sigma) - g_\sigma \| > \varepsilon) \leqslant 3\varepsilon.$$

定理 3 (Millet, Sucheston)　设X是具有RN性质的Banach空间，$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$是概率渐近鞅，则当$\{f_n, n \geqslant 1\}$一致可积或$(B)$有界时，$f_n$ $a.e.$收敛.

证明　1°　设$\{f_n, n \geqslant 1\}$一致可积，此时必有

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m \geqslant n}} E \| E(f_m | \mathscr{B}_n) - f_n \| = 0. \tag{3.7}$$

由于当$i \geqslant j$时

$$E \| E(f_{n+i} | \mathscr{B}_n) - E(f_{n+j} | \mathscr{B}_n) \|$$
$$\leqslant E \| E(f_{n+i} | \mathscr{B}_{n+j}) - f_{n+j} \| \to 0 \quad (i, j \to \infty)$$

不妨设在$L_1(\mu, X)$中，$\lim_{i\to\infty} E(f_{n+i} | \mathscr{B}_n) = g_n$，从而

$$E(g_{n+1} | \mathscr{B}_n) \doteq E(\lim_{i\to\infty} E(f_{n+i} | \mathscr{B}_{n+1}) | \mathscr{B}_n)$$
$$= \lim_{i\to\infty} E(f_{n+i} | \mathscr{B}_n) = g_n.$$

$(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$是鞅. 令$h_n = f_n - g_n$，由(3.7)

$$\lim_{n\to\infty} E \| h_n \| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup_{i \geqslant 1} E \| f_n - E(f_{n+i} | \mathscr{B}_n) \| = 0, \tag{3.8}$$

此外

$$E(h_\tau | \mathscr{B}_\sigma) - h_\sigma = E(f_\tau | \mathscr{B}_\sigma) - f_\sigma,$$

故$(h_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$是概率渐近鞅，但由(3.8)，当$n \geqslant \sigma$时，$E \| E(h_n | \mathscr{B}_\sigma) \| \leqslant E \| h_n \| \to 0$，从而$\{E(h_n | \mathscr{B}_\sigma)\}_{n \geqslant \sigma}$依测度收敛

于 0，h_σ 依测度收敛于 0. 由引理，$h_n \to 0$ $a.e.$，从而 f_n $a.e.$ 收敛.

2° 若$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是(B) 有界的. 对于任何 $\lambda > 0$，定义

$$\tau = \inf\{n, \| f_n(\omega) \| > \lambda\},$$

由定理 2，$\{f_{\tau\wedge n}, \mathscr{B}_{\tau\wedge n}, n \geqslant 1\}$ 是概率渐近鞅，又由 Fatou 引理

$$\int_{\{\tau<\infty\}} \| f_\tau \| d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{\{\tau<\infty\}} \| f_{\tau\wedge n} \| d\mu$$

$$\leqslant \sup_{\tau\in T} \| f_\tau \|_1 < \infty.$$

从而

$$\int_\Omega (\sup_{n\in N} \| f_{\tau\wedge n} \|) d\mu \leqslant \lambda + \sup_{\tau\in T} \| f_\tau \|_1 < \infty,$$

即$\sup_{n\in N} \| f_{\tau\wedge n} \| \in L_1$. 此时$(f_{\tau\wedge n}, \mathscr{B}_{\tau\wedge n}, n \geqslant 1)$ 是一致渐近鞅，从而 $a.e.$ 收敛. 由 $\mu\{\tau < \infty\}$ 随着 λ 的增加可任意小，在$\{\tau = \infty\}$ 上，$f_n = f_{\tau\wedge n}$，最后有 f_n $a.e.$ 收敛.

定理 4 (Talagrand) 设 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是亚极限鞅，$\liminf_{n\to\infty} \| f_n \|_1 < \infty$，则存在唯一的分解 $f_n = g_n + h_n$，其中$(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 L_1 有界鞅，$(h_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是亚极限鞅并且 $h_n \to 0$ $a.e.$

一个采用集合论方法的非平凡证明见 Talagrand[1].

推论 2 Banach 空间 X 具有 RN 性质当且仅当每个 L_1 有界亚极限鞅 $a.e.$ 收敛.

定理 5 若可积适应序列$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 既是 $a.e.$ 收敛，又是 $L_1(\mu, X)$ 收敛的，则$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是亚极限鞅.

证明 设 f_n L_1 收敛于 g，令 $g_n = E(g | \mathscr{B}_n)$，由 Levy 定理，$g_n \to g$ $a.e.$，从而 $h_n = f_n - g_n \to 0$ $a.e.$，并且以 $L_1(\mu, X)$ 范数成立. 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，由 h_n $a.e.$ 收敛于 0，故存在 n_1 使得

$$\mu(\sup_{n\geqslant n_1} \| h_n \| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

又由 L_1 收敛性，存在 $n_0 > n_1$ 使得对于 $\forall\, n \geqslant n_0$，$\| h_n \|_1 \leqslant \varepsilon^2$，由极大不等式，

$$\mu(\sup_{p\leqslant n}\|E(h_n|\mathscr{B}_p)\|\geqslant\varepsilon)\leqslant\varepsilon,$$

从而

$$\mu(\sup_{n_0\leqslant p\leqslant n}\|E(h_n|\mathscr{B}_p)-h_p\|\geqslant 2\varepsilon)\leqslant 2\varepsilon.$$

这说明$(h_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是亚极限鞅，从而由$f_n=g_n+h_n$，$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是亚极限鞅.

定理 6 设 Banach 空间具有 RN 性质，$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是适应序列，并且$f^*\in L_1$，则以下条件等价：

(i) $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是一致渐近鞅.

(ii) $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是概率渐近鞅.

(iii) $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是极限鞅.

(iv) $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是亚极限鞅.

(v) f_n $a.e.$ 收敛.

证明 我们已经得到过(i)⇔(v)(§2 定理 6)，而(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)是至今已知的.(iv)⇒(v)即定理 4.

有例子表明亚极限鞅不必是极限鞅.

定理 7 设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i)$\dim X<\infty$.

(ii) 对于任何测度空间和随机基，每个渐近鞅是概率渐近鞅.

(iii) 对于任何测度空间和随机基，每个渐近鞅是极限鞅.

(iv) 对于任何测度空间和随机基，每个渐近鞅是亚极限鞅.

(v) 对于任何测度空间和随机基，每个渐近鞅是趋于公平的对策.

证明 实际上当 $\dim X<\infty$ 时，每个渐近鞅是一致渐近鞅(§2 定理 14)，于是(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v)成立. 为了证明(v)⇒(i)，我们给出一个例子.

若 $\dim X=\infty$，取$\{x_n\}\subset X$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|=\infty$.

取 n_1 是使 $\alpha_1=\sum\limits_{k=1}^{m}\|x_k\|>1$ 的最小自然数，记 $J_1=\{1,\cdots,$

$n_1\}$，令 $y_k = \dfrac{x_k}{2\alpha_1}, k \in J_1$，则 $\sum\limits_{k \in J_1} \| y_k \| = \dfrac{1}{2}$. 设 $A_1^{(1)} = [0, \| y_1 \|]$，

$A_1^{(k)} = [\sum\limits_{i=1}^{k-1} \| y_i \|, \sum\limits_{i=1}^{k} \| y_i \|), (k = 2, \cdots, n_1)$，定义

$$f_1(\omega) = \sum_{k \in J_1} \frac{y_k}{\| y_k \|} \chi_{A_1^{(K)}}.$$

取 n_2 是使 $\alpha_2 = \sum\limits_{k=n_1+1}^{n_2} \| x_k \| > 1$ 成立的最小自然数，记 $J_2 =$

$\{n_1 + 1, \cdots, n_2\}$，令 $y_k = \dfrac{x_k}{2\alpha_2}, k \in J_2$，则 $\sum\limits_{k \in J_2} \| y_k \| = \dfrac{1}{2}$. 设 $A_2^{(1)} =$

$[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} + \| y_{n_1+1} \|)$，$A_2^{(k)} = [\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{i=n_1+1}^{k-1} \| y_i \|, \dfrac{1}{2} +$

$\sum\limits_{i=n_1+1}^{k} \| y_i \|), (k = n_1 + 2, \cdots, n_2)$，定义

$$f_2(\omega) = \sum_{k \in J_2} \frac{y_k}{\| y_k \|} \chi_{A_2^{(k)}}.$$

用类似方法作出函数 $f_3, f_4, \cdots$，当 n 为奇数时，f_n 的作法如同 f_1，n 为偶数时其作法如同 $f_2, \cdots$，令 $\mathscr{B}_n = \sigma(f_1, \cdots, f_n)$，显然 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是可积适应序列.

$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是渐近鞅. 若 $\tau \in T$，实际上

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_\tau d\mu &= \sum_i \int_{\{\tau=i\}} f_i d\mu \\ &= \sum_i \sum_{k \in J_i} \int_{\{\tau=i\} \cap A_i^{(k)}} \frac{y_i}{\| y_i \|} d\mu \\ &= \sum_i \sum_{k \in J_i} \frac{\mu(\{\tau = i\} \cap A_i^{(k)})}{\| y_i \|} y_k. \end{aligned}$$

由 $\| y_k \| = \mu(A_i^{(k)}), k \in J_i$，所以 $0 \leqslant \mu(\{\tau = i\} \cap A_i^{(k)}) \leqslant \| y_k \|$. 在最后的式中每个 y_k 仅出现一次. 从而 $\min\tau \to \infty$ 时，$\int_0^1 f_\tau d\mu \to 0$.

但由于

$$\mu(\omega, \| E(f_{n+1} | \mathscr{B}_n) - f_n \| = 1) \geqslant \frac{1}{2},$$

$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 不是趋于公平对策.

§4 Pettis 可积鞅与渐近鞅

设(Ω, Σ, μ)是完备概率空间,X是 Banach 空间. 本节我们讨论强可测 Pettis 可积函数空间的鞅与渐近鞅. 尽管某些结论对于并非强可测的函数仍然成立. 我们仍然记这种类型的 Pettis 可积函数空间为$P(\mu, X)$. 在 Ⅰ. §5 中我们讨论过$P(\mu, X)$中的范数

$$\| f \|_P = \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} \int_\Omega | x^* f | d\mu. \tag{4.1}$$

设$\mathscr{B}$是Σ的子σ代数,$f \in P(\mu, X)$. 关于$\mathscr{B}$强可测并且P可积的函数g称为是f关于$\mathscr{B}$的条件期望,若对于每个$A \in \mathscr{B}$,$(P)\int_A g d\mu = (P)\int_A f d\mu$. 记$g = E(f | \mathscr{B})$. 容易知道,当$g$存在时,它在$w\ a.e.$相等的意义下(见 Ⅰ. §5)是唯一的,此外,对于每个$x^* \in X^*$,必有$x^* g = E(x^* f | \mathscr{B})$. 由此应用实值函数条件期望的性质得到

$$\begin{aligned} \| g \|_P &= \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} E | x^* g | d\mu = \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} E | E(x^* f | \mathscr{B}) | \\ &\leqslant \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} E | x^* f | = \| f \|_P. \end{aligned} \tag{4.2}$$

即$\| E(f | \mathscr{B}) \|_P \leqslant \| f \|_P$,这说明算子$E(\cdot | \mathscr{B})$是收缩的.

但一般说来,并非对于每个$f \in P(\mu, X)$ $E(f | \mathscr{B})$都存在. 换句话说,算子$E(\cdot | \mathscr{B})$不是在整个$P(\mu, X)$上有定义. 另一方面,如果f是Bochner 可积的,我们知道$E(f | \mathscr{B})$存在并且Bochner 可积. 从而$E(f | \mathscr{B}) \in P(\mu, X)$.

弱 RN 性质以及局部 Bochner 可积的概念,已在第 Ⅰ 章 §5 中定义. 一个测度F称为是σ有界变差的,若存在可列个互不相交集合$\{A_n\}$,$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,$A_n \cap A_m = \varnothing$,$m \neq n$,使得$F$在每个$A_n$上是

有界变差的. 容易证明,函数 f 局部 Bochner 可积等价于相应的测度 F σ 有界变差. 现在我们有如下结论.

命题 设 X 是具有弱 RN 性质的 Banach 空间,$f \in P(\mu, X)$,$F(A) = \int_A f d\mu, \forall A \in \Sigma$. $\mathscr{B}$ 是 Σ 的子 σ 代数. 则 $E(f|\mathscr{B})$ 存在当且仅当 F 在 $\mathscr{B}$ 上的限制 $F|_{\mathscr{B}}$ 是 σ 有界变差的.

证明 若 $E(f|\mathscr{B})$ 存在,则 $E(f|\mathscr{B}) \in P(\mu, X)$

$$(F|_{\mathscr{B}})(A) = \int_A f d\mu = \int_A E(f|\mathscr{B}) d\mu, \quad \forall A \in \mathscr{B}.$$

$E(f|\mathscr{B})$ 是局部 Bochner 可积的,故 $(F|_{\mathscr{B}})$ 是 σ 有界变差的.

反之,若 $F|_{\mathscr{B}}$ 是 σ 有界变差的,不妨设 $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,$F|_{\mathscr{B}}$ 在每个 A_n 上有界变差并且是 μ 连续的. 根据弱 RN 性质,存在 g_n 使得

$$(F|_{\mathscr{B}})(A \cap A_n) = \int_A g_n d\mu. \quad \forall A \in \mathscr{B}$$

g_n 是 Bochner 可积的,并且是关于 $\mathscr{B}$ 强可测的. 因此 g 不是别的,正是 $g\chi_{A_n}$,从而 $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ 是关于 $\mathscr{B}$ 强可测的和局部 Bochner 可积的. g 即是 f 关于 $\mathscr{B}$ 的条件期望.

定义 1 设 Λ 是某个定向集,$(\mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 是递增子 σ 代数网. 称适应过程 $(f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 是鞅:若

(i) f_λ 是 (P) 可积的,即 $f_\lambda \in P(\mu, X)$,$(\lambda \in \Lambda)$

(ii) 若 $\lambda_2 > \lambda_1$,则 $E(f_{\lambda_2}|\mathscr{B}_{\lambda_1}) = f_{\lambda_1}$.

定理 1 对于鞅 $(f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$,下面条件等价:

(i) 以 $P(\mu, X)$ 的范数,$\lim_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ 存在.

(ii) $(f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 是正则鞅,即存在 $f \in P(\mu, X)$,f 关于 $\sigma(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda)$ 可测,使得 $E(f|\mathscr{B}_\lambda) = f_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda)$.

(iii) 存在关于 $\sigma(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda)$ 可测的函数 $f \in P(\mu, X)$ 是 $(f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 的右闭元,即

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} (P)\int_A f_\lambda d\mu = (P)\int_A f d\mu \quad A \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda. \tag{4.3}$$

证明 (i)⇒(iii) 设在 $P(\mu,X)$ 范数意义下，$\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda = f$. f 强可测. 由鞅性质可得出(4.3). 同时(iii)⇒(ii) 也根据鞅性质得出.

现在仅证明(ii)⇒(i). 对于 $\forall\ \varepsilon > 0$，由 Bochner 可积函数在 $P(\mu,X)$ 中是稠密的，而简单函数在 Bochner 可积函数中稠密，故存在简单函数 g，使得 $\| f - g \|_P < \varepsilon/2$. 不妨设 g 关于 $\mathscr{B}_\lambda$ 可测，则当 $\lambda > \lambda_0$ 时，$E(g|\mathscr{B}_\lambda) = g$，

$$\begin{aligned}\| f_\lambda - f \|_P &\leqslant \| f_\lambda - g \|_P + \| g - f \|_P \\ &= \| E(f|\mathscr{B}_\lambda) - E(g|\mathscr{B}_\lambda) \|_P + \| g - f \|_P \\ &\leqslant 2 \| g - f \|_P < \varepsilon.\end{aligned}$$

在讨论鞅收敛定理之前，我们需要下面引理. 注意此引理蕴含空间的 RN 性质和弱 RN 性质.

引理 1(Uhl) 设 Σ_0 为 Σ 的子代数并且 $\Sigma = \sigma(\Sigma_0)$，$F$ 是 Σ_0 上的可数可加 X 值测度，则下面两条等价：

(1) 存在 $f \in P(\mu,X)$，$F(A) = (P)\int_A f d\mu$. $(\forall\ A \in \Sigma_0)$

(2) 同时成立：(*a*) F 有界，(*b*) F μ 连续，(*c*) 对于 $\forall\ \varepsilon > 0$，存在弱紧凸集 $K \subset X$，使得对于任何 $\delta > 0$，存在 $A_0 \in \Sigma_0$，$\mu(\Omega\backslash A_0) < \varepsilon$ 并且

$$F(A) \in \mu(A)K + \delta U \quad (\forall\ A \subset A_0, A \in \Sigma_0) \tag{4.4}$$

其中 U 是 X 的闭单位球.

证明 (2)⇒(1) 设 F 满足(*a*)，(*b*)，(*c*) 三条件，F 是 μ 连续的. 根据第 I 章 §3 定理 5，F 有到 Σ 上的延拓，仍记为 F. F 是可数可加 μ 连续的.

给定 $\varepsilon > 0$，由(*c*)，取弱紧凸集 K，并依次取 $\delta = \frac{1}{n^2}$，则有 $A_n \in \Sigma_0$，$\mu(\Omega\backslash A_n) < \varepsilon$.

$$F(A) \in \mu(A)K + n^{-2}U \quad (\forall\ A \subset A_n, A \in \Sigma_0, n \in N)$$

令 $A_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$，则根据测度论的结论

$$\mu(\Omega) - \varepsilon \leqslant \lim\sup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A_0),$$

即 $\mu(\Omega\backslash A_0) < \varepsilon$. 若 $A \subset A_0, A \in \Sigma$，则对于 $\forall\, n \in N, A \subset \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. 记 $S_n = A_n, S_{n+1} = A_{n+1}\backslash A_n, S_{n+2} = A_{n+2}\backslash A_n\backslash A_{n+1}, \cdots$，则 $\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=n}^{\infty} S_m$. S_n 互不相交，$A = \bigcup_{m=n}^{\infty}(A \cap S_m)$. F 可数可加，故有

$$F(A) = \sum_{m=n}^{\infty} F(A \cap S_m). \tag{4.5}$$

注意到 $A \cap S_m \subset A_m$，故存在序列 $H_{mj} \in \Sigma_0$，(不妨设 $H_{mj} \subset A_m$) 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\mu(A \cap S_m)\triangle H_{mj}) = 0$. 此时

$$\lim_{j\to\infty}\mu(H_{mj}) = \mu(A \cap S_m).$$

由 F 的 μ 连续性

$$\lim_{j\to\infty}F(H_{mj}) = F(A \cap S_m).$$

由 (c)，从 $H_{mj} \subset A_m$ 可得出存在 $x_{mj} \in K, y_{mj} \in U$，

$$F(H_{mj}) = \mu(H_{mj})x_{mj} + m^{-2}y_{mj} \quad (m \geqslant n, j \in N).$$

K 弱紧，由 Eberlein-Smulian 定理，必要时换为子序列，不妨设

$$w\text{-}\lim_{j\to\infty} x_{mj} = x_m \in K.$$

当 $m \geqslant n$ 时

$$\begin{aligned}&\| F(A \cap S_m) - \mu(A \cap S_m)x_m \| \\ &\leqslant \liminf_{j\to\infty} \| F(H_{mj}) - \mu(H_{mj})x_{mj} \| \\ &\leqslant \limsup_{j\to\infty} \| m^{-2}y_{mj} \| \leqslant m^{-2},\end{aligned}$$

故不妨设

$$F(A \cap S_m) = \mu(A \cap S_m)w_m + m^{-2}z_m,$$

其中 $w_m \in K, z_m \in U$. 此时

$$F(A) = \sum_{m=n}^{\infty} F(A \cap S_m) = \sum_{m=n}^{\infty}\mu(A \cap S_m)w_m + \sum_{m=n}^{\infty} m^{-2}z_m.$$

两个级数都是绝对收敛的，故得到

$$\| F(A) - \sum_{m=n}^{\infty}\mu(A \cap S_m)w_m \| = \| \sum_{m=n}^{\infty} m^{-2}z_m \| \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} m^{-2}.$$

由于

$$\sum_{m=n}^{\infty}\mu(A\cap S_m)w_m=\mu(A)\sum_{m=n}^{\infty}\frac{\mu(A\cap S_m)}{\mu(A)}w_m\quad(\frac{0}{0}=0)$$

$w_m\in K$,K 是闭凸集,并且 $\sum_{m=n}^{\infty}\frac{\mu(A\cap S_m)}{\mu(A)}=1$,故

$$y_n=\sum_{m=n}^{\infty}\mu(A\cap S_m)w_m\in K.$$

但

$$\lim_{n\to\infty}\|F(A)-\mu(A)y_n\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n}^{\infty}m^{-2}=0,$$

所以

$$\frac{F(A)}{\mu(A)}\in K\quad(\forall A\in\Sigma,A\subset A_0,\mu(A)>0).$$

K 具有 RN 性质(Ⅱ. §4 定理 10),故存在 Bochner 可积函数 f 使得 $F(A\cap A_0)=\int_{A\cap A_0}fd\mu,A\in\Sigma,A\subset A_0$. 换句话说,$F$ 是局部 Bochner 可积函数的不定积分. 从而 F 是 Pettis 可积函数(记为 g)的不定积分. 即(1) 成立.

(1)⇒(2) 设 $f\in P(\mu,X)$,则(a),(b)是成立的. 往证(c)成立. 记 $A_n=\{\omega,\|f\|\leqslant n\}$. 对于 $\forall\ \varepsilon>0$,取 $n\in N$,使 $\mu(\Omega\backslash A_n)<\varepsilon/2$,由 μ 连续性,当 n 充分大时,可使 $\|F(A)\|<\delta,\forall A\in\Omega\backslash A_n$,其中$\delta$是任意事先给定的正数. 注意$f$ 在 A_n 上是Bochner 可积的,从而 $f(A_n)$ 是范数紧集. $f(A_n)$ 的绝对闭凸壳记为 K,由 Mazur 定理 K 是范数紧集(从而 w 紧集). 对于任何 $A\in\Sigma,A\subset A_n$,由 Ⅰ. §4 定理 4 推论得出 $F(A)\in\mu(A)K$. 取 $A_0\in\Sigma_0$,使 $\mu(A_0\triangle A_n)<\varepsilon/2$,则 $\mu(\Omega\backslash A_0)<\varepsilon$. 当 $A\in\Sigma_0,A\subset A_0$ 时,

$$A=(A\cap A_n)\cup(A\cap(A_0\backslash A_n))$$

$A\cap A_n\subset A_n$,故 $F(A\cap A_n)\in\mu(A\cap A_n)K\subset\mu(A)K$.

$A\cap(A_0\backslash A_n)\subset\Omega\backslash A_n$,故 $\|F(A)-F(A\cap A_{n_0})\|=\|F(A\cap(A_0\backslash A_n))\|<\delta$,于是

$$F(A)\in\mu(A)K+\delta U.$$

定理 2 设$(f_\lambda,\mathscr{B}_\lambda,\lambda\in\Lambda)$是$P(\mu,X)$中的鞅，则$(f_\lambda,\lambda\in\Lambda)$依$P(\mu,X)$中范数收敛于某个$f\in P(\mu,X)$，当且仅当

(*a*) $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda\|_P<\infty$.

(*b*) 对于$\forall\ \varepsilon>0$，存在$\delta>0$和$\lambda_0\in\Lambda$，使得$\mu(A)<\delta$时，对于所有$\lambda\geqslant\lambda_0$，$\|f_\lambda\chi_A\|_P<\varepsilon$.

(*c*) 对于每个$\varepsilon>0$，存在w紧凸集$K\subset X$，使得$\forall\ \delta>0$，存在$\lambda_0\in\Lambda$和$A_0\in\mathscr{B}_{\lambda_0}$，其中$\mu(\Omega\backslash A_0)<\varepsilon$，并且

$$(P)\int_A f_\lambda d\mu\in\mu(A)K+\delta U.\quad(\forall\ A\subset A_0,A\in\mathscr{B}_\lambda,\lambda\geqslant\lambda_0)$$

证明 不妨假设$\sigma(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{B}_\lambda)=\Sigma$.

必要性 若$\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda-f\|_P=0$，$f\in P(\mu,X)$，由定理 1，$E(f|\mathscr{B}_\lambda)=f_\lambda$，$(\lambda\in\Lambda)$. 但$\|f_\lambda\|_P=\|E(f|\mathscr{B}_\lambda)\|_P\leqslant\|f\|_P$，故(*a*)成立. 注意到$\lim\limits_{\mu(A)=0}\|f\chi_A\|_P=0$并且

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\in\Lambda}\big|\,\|f_\lambda\chi_A\|_P-\|f\chi_A\|_P\big|&\leqslant\lim_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda\chi_A-f\chi_A\|_P\\&\leqslant\lim_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda-f\|_P=0,\end{aligned}$$

故(*b*)成立.

由$f\in P(\mu,X)$，根据引理 1(注意，将w紧集换为范数紧集成立)，存在范数紧凸集K，对于$\forall\ \delta>0$，存在$A_\delta\in\mathscr{B}_\infty$，

$$(P)\int_A fd\mu\in\mu(A)K+\delta U\quad(\forall\ A\subset A_\delta,A\in\mathscr{B}_\infty)$$

不妨设$A_\delta\in\mathscr{B}_{\lambda_0}$，当$\lambda\geqslant\lambda_0$时，若$A\in\mathscr{B}_\lambda$，$A\subset A_\delta$则由鞅性质

$$(P)\int_A fd\mu=(P)\int_A fd\mu\in\mu(A)K+\delta U.\qquad(4.6)$$

充分性 设$F(A)=\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}(P)\int_A f_\lambda d\mu\quad A\in\mathscr{B}_\infty$，

$$\|F(A)\|\leqslant\limsup_{\lambda\in\Lambda}\Big\|\int_A f_\lambda d\mu\Big\|=\limsup_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda\chi_A\|_P.$$

由(*b*)知F是μ连续的. 从而在$\mathscr{B}_\infty$上可数可加. 由(*a*)知F是有界的向量测度. 此外由(*c*)，对于$\forall\ \varepsilon>0$，存在w紧凸集$K\subset X$，使得$\forall\ \delta>0$，存在$\lambda_0\in\Lambda$和$A_0\in\mathscr{B}_{\lambda_0}\subset\mathscr{B}_\infty$，$\mu(\Omega\backslash A_0)<\varepsilon$并且

$$(P)\int_A f_\lambda d\mu \in \mu(A)K + \delta U \quad (A \subset A_0, A \in \mathscr{B}_\lambda, \lambda \geqslant \lambda_0),$$

利用鞅性质得到

$$(P)\int_A f d\mu \in \mu(A)K + \delta U.$$

这说明向量测度 F 满足引理 1 中条件，于是存在 $f \in P(\mu, X)$，

$$F(A) = \int_A f d\mu \quad (\forall\ A \in \mathscr{B}_\infty),$$

特别地

$$\int_A f d\mu = \lim_{\lambda \in \Lambda} \int_A f_\lambda d\mu \quad (\forall\ A \in \mathscr{B}_\infty)$$

由定理 1 知道 $\lim\limits_{\lambda \in \Lambda} \| f_\lambda - f \|_P = 0.$

注 若 Banach 空间 X 具有 RN 性质，则以上两定理中条件 (c) 自然成立.

定理 3 (Uhl) 设 $(f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 是 $P(\mu, X)$ 中的鞅，并且 $\lim\limits_{\lambda \in \Lambda} \| f_\lambda - f \|_P = 0, f \in P(\mu, X)$，则 f_λ μ 测度收敛于 f. 若 $\Lambda = N$，则 μ-$a.e.$ 收敛成立.

证明 实际上我们证明，对于 $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ A_0 \in \mathscr{B}_\infty, \mu(\Omega \backslash A_0) < \varepsilon$ 使得

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} \| f_\lambda \chi_{A_0} - f \chi_{A_0} \|_1 = 0.$$

例如设 $A_n = \{\omega, \| f \| \leqslant n\}$，则 $A_n \in \sigma(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda)$，并且 $A_n \uparrow \Omega$. 现在考虑实测度 $\nu(A) = \int_A \| f \| d\mu$，$\nu$ 是 σ 有限的. 故必有 A_0 使得 $\mu(\Omega \backslash A_0) < \varepsilon/2$ 并且 $\nu(A_0) < \infty$.

一般来说 $A_0 \in \sigma(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{B}_\lambda)$. 利用外测度的有关理论可以找到一列互不相交集合 $S_n \in \mathscr{B}_\infty$ 使得 $A_0 \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(S_n) < \infty$.

若取 $\mu(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty} S_m) < \varepsilon/2$，令 $E_1 = \bigcup\limits_{m=1}^{n} S_m$，则 $\nu(E_1) < \infty$. $E_1 \in \mathscr{B}_\infty$ 并且

$$\mu(\Omega\backslash E_1) = \mu(\Omega\backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m) + \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m \backslash E_1)$$

$$\leqslant \mu(\Omega\backslash A_0) + \mu(\bigcup_{m=n}^{\infty} S_m) < \varepsilon.$$

现在不妨设 $E_1 \in \mathscr{B}_{\lambda_0}$，显然 $(f_\lambda \chi_{E_1}, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \geqslant \lambda_0)$ 是鞅. 由于 $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \| f_\lambda \chi_{E_1} - f\chi_{E_1} \|_P = 0$，由定理 1，$f_\lambda \chi_{E_1} = E(f\chi_{E_1} | \mathscr{B}_\lambda)$. 但 $f\chi_{E_1} \in L_1(\mu, X)$. 从而 $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \| f_\lambda\chi_{E_1} - f\chi_{E_1} \|_1 = 0$. 由此得出，$f_\lambda\chi_{E_1}$ 依测度收敛于 $f\chi_{E_1}$. 但 $\mu(\Omega\backslash E_1)$ 可任意小，故 f_λ 测度收敛于 f.

若 $\lambda = N$，根据 Ⅱ. §2 定理 2，$f_\lambda\chi_{E_1}$ $a.e.$ 收敛于 $f\chi_{E_1}$. 从而 $f_\lambda \to f$ $a.e.$

在第 Ⅰ 章 §5 中我们已经提到过，Pettis 可积函数空间一般并非完备空间. 这一情况即使在 X 为 Hilbert 空间时仍可能发生.

例 $X = l^2$，$P(\mu, X)$ 可能不完备.

设 $\Omega = (0,1]$，Σ 为 Ω 上的 Borel σ 代数，μ 为 Lebesgue 测度，若 $\{e_{ij}\}$ 是 l^2 的标准基. 定义

$$y_i(\omega) = \begin{cases} e_{ij} & \omega \in \left(\dfrac{j-1}{2^i}, \dfrac{2j-1}{2^{i+1}}\right] \\ -e_{ij} & \omega \in \left(\dfrac{2j-1}{2^{i+1}}, \dfrac{j}{2^i}\right] \end{cases} \qquad (j = 1, \cdots, 2^i)$$

$$f_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} y_i(\omega), \mathscr{B}_n = \sigma(f_1, \cdots, f_n).$$

显然 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 $P(\mu, X)$ 中的鞅.

$$\| y_i \|_P = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \int_\Omega |x^* y_i| d\mu = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \sum_{j=1}^{2^i} |x^*(e_{ij})| 2^{-i}$$

$$\leqslant 2^{-i} \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \left(\sum_{j=1}^{2^i} |x^*(e_{ij})|^2 \right)^{1/2} (2^i)^{1/2}$$

$$\leqslant 2^{-i}(2^i)^{1/2} = 2^{-\frac{i}{2}}$$

实际上若 $x^* \in X^*$，$\| x^* \| = 1$，$x^* = \sum \alpha_i e_{ij}$，则 $1 = \| x^* \|^2 = \sum \| \alpha_i \|^2$ 故 $\sum\limits_{j=1}^{2^i} |x^*(e_{ij})|^2 = 1$. 另一方面，若 $m \geqslant n$，则

$$\| f_m - f_n \|_P \leqslant \sum_{i=n+1}^{m} \| y_i \|_P \leqslant \sum_{i=n+1}^{m} 2^{-\frac{i}{2}} \leqslant \frac{1}{(\sqrt{2})^n(\sqrt{2}-1)}.$$

$(f_n, n \geqslant 1)$ 是 $P(\mu,X)$ 中的 Cauchy 列.

如果存在 $f \in P(\mu,X)$ 使得 $\| f_n - f \|_P \to 0$. 由定理 3，必有 $f_n \to f$ $a.e.$ 但这是不可能的，因为对于 $f_n(\omega)$，其值是 n 个互不相同的单位正交向量之和. 故 $\| f_n(\omega) \| = \sqrt{n}$. 于是 $\| f_n(\omega) \| \to \infty$ 与定理 3 矛盾.

引理 2 设 X 为 Banach 空间. 以下两条等价:

(1) $\dim X < \infty$.

(2) 对于任一测度空间 (Ω, Σ, μ)，$P(\mu, X)$ 中的每个序列 $(f_n, n \geqslant 1)$，若 $\| f_n \|_P \to 0$，则 f_n 测度收敛于 0.

证明 (1)⇒(2) 若 $\dim X < \infty$，则当 $\| f_n \|_P \to 0$ 时，$\| f_n \|_1 \to 0 (n \to \infty)$. 于是(2)成立.

(2)⇒(1) 若 $\dim X = \infty$. 由 Dvoretzky-Rogers 定理，我们只须考虑 $X = l^2$ 的情况. 仍设 $y_i(\omega)$ 如上面例中一样，则 $\| y_i \|_P \leqslant 2^{-\frac{i}{2}} \to 0 (i \to \infty)$，但 $\mu\{\omega, \| y_i \| = 1\} = 1$，于是 $(y_i, i \geqslant 1)$ 不是测度收敛于 0 的.

定理 4 (Musial) 设 X 为 Banach 空间，下面条件等价:

(1) E 具有 w RN 性质.

(2) 对于每个完备概率空间 (Ω, Σ, μ) 和 $P(\mu, X)$ 中的 Pettis 一致可积变差有界鞅 $(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$，存在 $f \in P(\mu, X)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_P = 0$.

其中变差有界是指 $\mu_n(A) = \int_A f_n d\mu$ 在 $\mathscr{B}_n$ 上满足 $\sup\limits_{n\in N} \| \mu_n \| (\Omega) < \infty$，Pettis 一致可积是指

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{n\in N} \left\| \int_A f_n d\mu \right\| = 0 \tag{4.7}$$

证明 (1)⇒(2) 设 $F(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu, A \in \mathscr{B}_\infty$. 根据鞅性质，此极限是存在的，$(f_n, n \geqslant 1)$ 变差有界，故 F 是变差有界的.

由一致可积性 $F \ll \mu$. 对于每个 $x^* \in X^*$，$(x^* f_n, \mathscr{B}_n, n \geq 1)$ 是实值鞅并且有界变差一致可积. 从而 $x^* F$ 是可数可加的.

将 F 延拓到 $\sigma(\bigcup_{n\in N} \mathscr{B}_n)$ 上得到有界变差 μ 连续向量测度，仍记为 F. 根据 $w\ RN$ 性质，存在 $f \in P(\mu, X)$ 使得

$$F(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \sigma(\bigcup_{n\in N} \mathscr{B}_n)$$

特别地对于每个 $A \in \mathscr{B}_\infty$，

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

由定理 1 知，$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_P = 0$.

(2)⇒(1)　设 $F: \Sigma \to X$ 是有界变差 μ 连续向量测度，对于 Ω 的任意有限分划序列 π_n，定义

$$g_n = \sum_{A\in\pi_n} \frac{F(A)}{\mu(A)} \chi_A. \ (n \in N) \tag{4.8}$$

容易验证 $(g_n, \sigma(\pi_n), n \geq 1)$ 是鞅并且若 $\mu_n(A) = \int_A g_n d\mu, A \in \mathscr{B}_n$，

$$\| \mu_k \| (\Omega) = \int_\Omega \| g_n \| d\mu = \sum_{A\in\pi_n} \| F(A) \| \leqslant |F|(\Omega) < \infty.$$

$$\sup_{n\in N} \sup_{A\in\Sigma} \| \mu_n(A \cap B) \| = \sup_{n\in N} \sup_{A\in\Sigma} \left\| \int_{A\cap B} g_n d\mu \right\| \leqslant \| F \| (B).$$

故 $\lim_{\mu(B)\to 0} \sup_{n\in N} \sup_{A\in\Sigma} \| \mu_n(A \cap B) \| = 0$. $(g_n, n \geq 1)$ 是 Pettis 一致可积的. 由(2)，存在 $f \in P(\mu, X)$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \| g_n - f \|_P = 0$.

对于每个 $A \in \mathscr{B}_\infty$，

$$\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu = F(A).$$

由 Pettis 可积函数不定积分的 μ 连续性，对于每个 $A \in \sigma(\bigcup_{n\in N} \mathscr{B}_n)$，$F(A) = \int_A f d\mu$ 成立. F 是任意的，故 X 具有 $w\ RN$ 性质.

定理 5 (Edgar)　设 X 具有 RN 性质，$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geq 1)$ 是 $P(\mu, X)$ 中的鞅，若

(1) $\sup_{n\in N}\|f_n\|_P<\infty$,

(2) $(f_n,n\geq 1)$满足条件(E):存在互不相交集合序列$(A_n, n\geq 1)\subset\mathscr{B}_\infty$, $\mu(\Omega\setminus\bigcup_{n\in N}A_n)=0$, 使得在每个$A_m$上, $\sup_{n\in N}E\|f_n\chi_{A_m}\|<\infty$,

则$(f_n,n\geq 1)a.e.$收敛于一个(P)可积函数.

证明 注意到若$A_m\in\mathscr{B}_{n(m)}$,则

$$(f_n\chi_{A_m},\mathscr{B}_n|_{A_m},n\geq n(m))$$

是$L_1(\mu,X)$有界鞅.其中χ_{A_m}是A_m的特征函数.$\mathscr{B}_n|_{A_m}$是σ代数$\mathscr{B}_n\cap A_m$.空间X具有RN性质,故$f_n\chi_{A_m}$ $a.e.$收敛.其极限记为$f^{(m)}$.则由Fatou引理

$$\int_{A_m}\|f^{(m)}\|d\mu\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup E\|f_n\chi_{A_m}\|<\infty.$$

现在记$f=\sum_{m=1}^{\infty}f^{(m)}\chi_{A_m}$,显然$f$是局部Bochner可积的并且$f_n$ $a.e.$收敛于f.但对于每个$x^*\in X^*$,$(x^*f_n,\mathscr{B}_n,n\geq 1)$是$L_1$有界鞅.由此不难得到$x^*f\in L_1$.$f$是Dunford可积的.由第1章§5定理7知$f$ P可积.因为根据Ⅱ.§2定理6,具有RN性质的Banach空间不包含与c_0同构的子空间.

定义2 可积适应序列$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geq 1)$称为渐近鞅,若

$$x=\lim_{\tau\in T}(P)\int_\Omega f_\tau d\mu\in X \tag{4.9}$$

其中T是相应于$(\mathscr{B}_n,n\geq 1)$的有界停时全体.

容易验证,象Bochner可积渐近鞅情况一样,对于每个$A\in\mathscr{B}_\infty$,极限$\mu_\infty(A)=\lim_{\tau\in T}\mu_\tau(A)$存在.$\mu_\infty:\mathscr{B}_\infty\to X$是有限可加向量测度,并且在$\mathscr{B}_\tau$上,$\lim_{\tau\in T}\sup_{A\in\mathscr{B}_\tau}\|\mu_\tau(A)-\mu_\infty(A)\|\to 0$.

定理6 设X是具有w RN性质的Banach空间,$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geq 1)$是$P$可积渐近鞅,并且$(f_n,n\geq 1)$存在子序列满足条件$(E)$,则$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geq 1)$有分解

$$f_n = g_n + h_n \quad (n \geqslant 1)$$

其中$(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$是$P$可积鞅,满足条件$(E)$,同时

$$\lim_{\tau \in T} \| h_\tau \|_P = 0 \tag{4.10}$$

证明 设子序列$(f_{n_k}, k \geqslant 1)$满足条件(E),不失一般性可设$n_1 < n_2 < \cdots\cdots$,记$\mu_\infty(A) = \lim_{\tau \in T} \mu_\tau(A), A \in \mathscr{B}_\infty$,其中$\mu_\tau(A) = \int_A f_\tau d\mu$.特别地有$\mu_\infty(A) = \lim_{k \to \infty} \int_A f_{n_k} d\mu \quad A \in \mathscr{B}_\infty$.

对于每个$n \in N$,现在考虑$\mu_\infty | \mathscr{B}_n$:由于每个$\mu_{n_k} \ll \mu$,故$(\mu_\infty | \mathscr{B}_n) \ll \mu$.由条件$(E)$,存在$(A_m, m \geqslant 1) \subset \mathscr{B}_\infty$,在每个$A_m$上,$\sup_{k \in N} \| f_{n_k} \chi_{A_m} \| < \infty$.于是$\mu_\infty | \mathscr{B}_n$在$A_m$上是有界变差的.根据$X$的$wRN$性质,在$A_m$上存在$g_n^{(m)}$使得

$$\mu_\infty(A) = \int_A g_n^{(m)} d\mu \quad A \in \mathscr{B}_n \cap A_m.$$

令$g_n = \sum_{m=1}^{\infty} g_n^{(m)} \chi_{A_m}$.显然$g_n$是强可测的并且局部Bochner可积的.根据Ⅰ.§5定理6,$g_n \in P(\mu, X)$.$(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$是鞅,由于性质$(E)$

$$\sup_{n \in N} \int_{A_m} \| g_n \| d\mu < \infty, \quad (\forall\ m \in N)$$

现在定义$h_n = f_n - g_n (n \geqslant 1)$,对于每个$A \in \mathscr{B}_n$,固定$\sigma \in T$.

$$\begin{aligned} \left\| \int_A h_\sigma d\mu \right\| &= \left\| \int_A f_\sigma d\mu - \int_A g_\sigma d\mu \right\| \\ &= \left\| \lim_{\substack{k \to \infty \\ n_k \geqslant \sigma}} \int_A f_{n_k} d\mu - \int_A g_\sigma d\mu \right\| \\ &\leqslant \sup_{n_k \geqslant \sigma} \left\| \int_A f_{n_k} d\mu - \int_A g_\sigma d\mu \right\|, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sup_{A \in \mathscr{B}_\tau} \left\| \int_A h_\tau d\mu \right\| &\leqslant \sup_{n_k \geqslant \tau} \sup_{A \in \mathscr{B}_\tau} \left\| \int_A f_{n_k} d\mu - \int_A g_\tau d\mu \right\| \\ &= \sup_{n_k \geqslant \tau} \sup_{A \in \mathscr{B}_\tau} \| \mu_{n_k}(A) - \mu_\infty(A) \| \to 0 \quad (n_k \to \infty) \end{aligned}$$

即$\lim\limits_{\tau\in T}\|h_\tau\|_P = 0$.

若另有分解 $f_n = g_n' + h_n'$，g_n'，h_n' 具有象 g_n 与 h_n 类似的性质，则 $g_n - g_n' = h_n' - h_n (n \in N)$. 从而 $h_n' - h_n$ 也是鞅. 对于 $\forall A \in \mathscr{B}_\infty$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\|h_n' - h_n\|_P = 0$ 知

$$\int_A (h_n' - h_n) d\mu = \int_A (h_{n+k}' - h_{n+k}) d\mu \to 0. \quad (k \to \infty)$$

于是$\int_A h' d\mu = \int_A h_n d\mu$，从而

$$h_n' = h_n, \quad g_n' = g_n \quad a.e.$$

定理 7 若 X 具有 $w\, RN$ 性质，$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是 P 可积渐近鞅并且

(1) 存在子序列$(f_{n_k}, k \geqslant 1)$ 满足条件(E).

(2) $(f_n, n \geqslant 1)$ Pettis 一致可积.

则存在$f \in P(\mu, X)$ 使得$(f_n, n \geqslant 1)$ 以 P 范数并且 $a.e.$ 收敛于 f.

证明 由定理 3，只须证明$(f_n, n \geqslant 1)$ 以 P 范数收敛于 f. 根据定理 6，$(f_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 有分解 $f_n = g_n + h_n$，其中$(g_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 是满足条件(E) 的 $P(\mu, X)$ 鞅. $(h_n, \mathscr{B}_n, n \geqslant 1)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\|h_n\|_P = 0.$$

考虑极限测度 $\mu_\infty : \mathscr{B}_\infty \to X$

$$\mu_\infty(A) = \lim_{n\to\infty}\int_A g_n d\mu \quad A \in \mathscr{B}_\infty.$$

由条件(E)，存在$(A_m, m \geqslant 1)$，在每个 A_m 上，$\sup\limits_{n\in N} E\|g_n\chi_{A_m}\| < \infty$. 由$(f_n, n \geqslant 1)$ 的 P 一致可积性和$\sup\limits_{n\to\infty}\|h_n\|_P = 0$ 得到$(g_n, n \geqslant 1)$ 是 P 一致可积的. 于是根据定理 4，存在 $f^{(m)} \in P(\mu, X)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|g_n\chi_{A_m} - f^{(m)}\|_P = 0. \tag{4.11}$$

记 $f = \sum\limits_{m=1}^{\infty} f^{(m)}\chi_{A_m}$，每个 $f^{(m)}$ 是局部 Bochner 可积的，故 f 是局部 Bochner 可积的. 容易知道，f 是 Dunford 可积的. X 具有 $w\, RN$ 性质. 故不包含与 c_0 同构的子空间，所以 f P 可积.

现在对于$\forall A\in\mathscr{B}_\infty$，例如$A\in\mathscr{B}_{n_0}$，由性质$(E)$，存在$A_{m_0}$，使得$A\subset\bigcup_{i=1}^{m_0}A_{m_0}$，

$$\left\|\int_A g_n d\mu-\int_A f d\mu\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{m_0}\|g_n\chi_{A_i}-f^{(i)}\|_P\to 0$$

由定理1知，$\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n-f\|_P=0$.

Ⅳ. 凸集的几何理论

在第 Ⅱ 章中我们已建立了 Banach 空间的 RN 性质与鞅收敛性质之间的等价关系. 具有 RN 性质的 Banach 空间中的凸集有许多几何特征. 本章将首先介绍凸集的可凹性，可凹性和鞅收敛性的关系，暴露点和端点表现定理，Bishop-Phelps 定理，Edgar-Chouque 表现定理，然后叙述共轭空间中相应的结果以及 Banach 空间的树结构性质.

§1 可 凹 性

对于 Banach 空间中的凸集，同样可以定义它的 RN 性质和鞅收敛性质并且可以建立二者之间的等价关系.

定义 1 称 Banach 空间 X 的有界闭凸子集 K 具有 RN 性质：若对于任何有限测度空间 (Ω,Σ,μ) 和平均值域在 K 中的向量测度：$F:\Sigma\to X$，当 $F\ll\mu$ 时，存在 $f\in L(\mu,X)$ 使得

$$F(A)=\int_A f d\mu,\quad \forall\ A\in\Sigma.$$

这里 F 的平均值域是指集合 $Ave(F)\triangleq\left\{\frac{F(A)}{\mu(A)},\forall\ A\in\Sigma,\ \mu(A)>0\right\}$. X 的闭凸子集称为具有 RN 性质，若它的每个有界闭凸子集具有 RN 性质.

当然，X 本身具有 RN 性质的定义已包含在内. 这就出现了前后一致的问题. 一方面容易知道，第 Ⅰ 章中 X 具有 RN 性质的定义蕴含着这里的定义，因为每个平均值域 $Ave(F)$ 有界的向量测度是有界变差的. 另一方面，反过来的论断可以从下面定理 1 的结论和第 Ⅱ 章 §2 的 Chatterji 定理得到.

定义 2 Banach 空间 X 的有界闭凸子集 K 称为具有鞅收敛(MC)性质:若对于每个有限测度空间(Ω,Σ,μ)和任一取值于 K 的鞅$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$,都存在 $f\in L_1(\mu,X)$ $f_n\to f$ $a.e.$

定理 1 设 $K\subset X$ 是有界闭凸集,则 K 具有 RN 性质当且仅当 K 具有 MC 性质.

证明 先设 K 具有 RN 性质,(Ω,Σ,μ) 是任一测度空间,$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 是取值于 K 的鞅. 记 $F(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu,\forall A\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$. 将 F 延拓到 $\sigma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n)$ 上,仍记为 F. 因为 K 是有界闭凸集.当 $\mu(A)>0$ 时,$\dfrac{1}{\mu(A)}\int_A f_n d\mu\in\overline{co}f_n(E)\subset K$ 从而$\dfrac{F(A)}{\mu(A)}\in K$,即 F 的平均值域在 K 中. 由定义 1,存在 $f\in L_1(\mu,X)$,$F(A)=\int_A f d\mu$.$\forall A\in\sigma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n)$. 特别地,由鞅性质,对于 $A\in\mathscr{B}_n$,$\int_A f_n d\mu=\int_A f_{n+1}d\mu=\lim\limits_{m\to\infty}\int_A f_m d\mu=\int_A f d\mu$. 换句话说,$f_n=E(f|\mathscr{B}_n)$,$n\geqslant 1$. 由 Ⅱ. §1 Levy 定理知道,$f_n\to f$ $a.e.$

反过来,若 K 具有 MC 性质,$F:\Sigma\to X$ 是 μ 连续向量测度并且 $Ave(F)\subset K$. 设$\{\pi_n,n\geqslant 1\}$ 是 Ω 的逐步加细的分划序列,不失一般性设 $\sigma(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\sigma(\pi_n))=\Sigma$,其中 $\sigma(\pi_n)$ 是由分划 π_n 生成的 σ 代数. 定义

$$f_n=\sum_{A\in\pi_n}\frac{F(A)}{\mu(A)}\chi_A,(n\geqslant 1)\quad (\frac{0}{0}=0)$$

则$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是鞅,并且 $f_n(\omega)\in K$. 于是由 MC 性质,存在 $f\in L_1(\mu,X)$,$f_n\to f$ $a.e.$ 实际上 f_n 是一致可积的,从而

$$F(A)=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu=\int_A f d\mu,\forall A\in\Sigma.$$

所以 K 具有 RN 性质.

由第 Ⅱ 章 §4 定理 10 可得出下面推论.

推论 1 w 紧集具有 RN 性质.

让我们明确几个记号，对于任一集合 $K \subset X$，记 $co(K)$ 是 K 的凸壳，$\overline{co}(K)$ 是 K 的闭凸壳，$s\text{-}co(K) = \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, a_n \geqslant 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, x_n \in K\}$. 容易验证，

$$co(K) \subset s\text{-}co(K) \subset \overline{co}(K) \tag{1.1}$$

定义 3 一点 $x \in K$ 称为 K 的凹点(denting point)(s 凹点，c 凹点(s-denting point, c-denting point))：若对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，

$x \overline{\in} \overline{co}(K \backslash B_\varepsilon(x))$ ($x \overline{\in} s\text{-}co(K \backslash B_\varepsilon(x))$, $x \overline{\in} co(K \backslash B_\varepsilon(x))$)，其中 $B_\varepsilon(x) = \{y, \| y - x \| < \varepsilon\}$. 集合 $K \subset X$ 称为可凹集(dentable set)(s 可凹集，c 可凹集(s-dentable set, c-dentable set))，若对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，存在 $x_\varepsilon \in K$ 使得

$x_\varepsilon \overline{\in} \overline{co}(K \backslash B_\varepsilon(x_\varepsilon))$, ($x_\varepsilon \overline{\in} s\text{-}co(K \backslash B_\varepsilon(x_\varepsilon))$, $x_\varepsilon \overline{\in} co(K \backslash B_\varepsilon(x))$).

由定义直接得到，若 K 有一个凹点(s 凹点，c 凹点)。则 K 一定是可凹(s 可凹，c 可凹)的. 另一方面，由(1.1)，每个可凹集是 s 可凹集，每个 s 可凹集是 c 可凹集.

命题 设 X 是 Banach 空间，$K \subset X$ 是任一子集

(i) 若 $\overline{co}(K)$ 可凹，则 K 可凹.

(ii) 若 K 是有界闭凸集，K 的内部 K° 非空，K 不可凹，则 K° 不是 c 可凹的，从而更不是 s 可凹和可凹的.

(iii) 当 X 赋于等价范数时，子集的可凹性不改变.

证明 1° 设 $\overline{co}(K)$ 可凹，由定义，对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, x_\varepsilon \in \overline{co}(K)$ 但 $x_\varepsilon \overline{\in} \overline{co}(\overline{co}(K) \backslash B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon)) \triangleq Q$. 注意 $K \backslash Q$ 非空，否则 $K \subset Q$. 从而 $\overline{co}(K) \subset Q$，这与 $x_\varepsilon \in \overline{co}(K) \backslash Q$ 矛盾. 现在我们证明，对于 $\forall\, d \in K \backslash Q$，$d \overline{\in} \overline{co}(K \backslash B_\varepsilon(d))$. 实际上，首先有 $d \in B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon)$. 否则 $d \in K \backslash B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon) \subset \overline{co}(K \backslash B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon)) \subset Q$ 这与 $d \in K \backslash Q$ 矛盾. d 是 $K \backslash Q$ 中任一元，故 $K \backslash Q \subset B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon)$. 其次必有 $K \backslash B_\varepsilon(d) \subset Q$. 因为若 $y \in K \backslash B_\varepsilon(d)$ 但 $y \overline{\in} Q$，则一方面 $\| y - d \| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$，另一方面同时有 $y, d \in K \backslash Q \subset B_{\varepsilon/2}(x_\varepsilon)$. 故 $\| y - d \| \leqslant \| y - x_\varepsilon \| + \| x_\varepsilon$

$-d\| < \varepsilon$，矛盾. 至此，$\overline{co}(K\backslash B_\varepsilon(d)) \subset Q$. 既然 $d \overline{\in} Q$，故 $d \overline{\in} \overline{co}(K\backslash B_\varepsilon(d))$. K 可凹.

2° K 不可凹，故存在 $\varepsilon > 0$，使得 $\forall x \in K, x \in \overline{co}(K\backslash B_\varepsilon(x))$. 若 $x \in K^\circ$，则存在 $\delta > 0, B_\delta(x) \subset K$. 取 $x_1, \cdots, x_n \in K$，正数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ 使得 $\|x_i - x\| \geqslant \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$ 并且 $\|\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i - x\| \leqslant \min(\delta, \frac{\varepsilon}{2})$. 令 $y = x - \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$，则 $x + y \in B_\delta(x) \subset K^\circ$，从而必有 $\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}x_i \in K^\circ$，$(1 \leqslant i \leqslant n)$. 另一方面

$$\|\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}x_i-x\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_i-x\| - \frac{1}{2}\|y\| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(\frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}x_i) = x$，所以 $x \in co(K^\circ\backslash B_{\varepsilon/4}(x))$，$x \in K^\circ$ 是任意的，所以 K° 不是 c 可凹.

3° 设 $|\cdot|$ 与 $\|\cdot\|$ 是等价范数，对于 $\forall x \in X, a\|x\| \leqslant |x| \leqslant b\|x\|$，其中 $a, b > 0$，分别以 $B_\varepsilon(x)$ 和 $B_\varepsilon(\langle x \rangle)$ 表示在两种范数下以 x 为中心 ε 为半径的球，则由

$$\overline{co}(K\backslash B_{\varepsilon/b}(\langle x \rangle)) \supset \overline{co}(K\backslash B_\varepsilon(x)) \supset \overline{co}(K\backslash B_{\varepsilon/a}(\langle x \rangle))$$

得出所要的结论.

例 1 $C[0,1]$ 的闭单位球 D 是 s 可凹但不是可凹的.

为证明 D 是 s 可凹的，我们证明 $f_0(t) \equiv 1$ 是 D 的 s 凹点. 为此反设对于某个 $\varepsilon > 0, f_0 \in sco(D\backslash B_\varepsilon(f_0))$，则 $f_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n f_n$，其中 $f_n \in D$，$\|f_n - f_0\| \geqslant \varepsilon, a_n > 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = 1$. 为要此事成立，必须 $f_n(t) \equiv 1, n \geqslant 1$，即 $f_n = f_0 (n \geqslant 1)$，矛盾. 同样地，$f_0(t) \equiv -1$ 也是 D 的 s 凹点.

为证 D 不是可凹的，对于每个 $f \in D$ 和 $\varepsilon > 0$，考虑$[0,1]$的

分划$[0,\frac{1}{n})$,$[\frac{1}{n},\frac{2}{n})$,…,$[\frac{n-1}{n},1]$,令

$$f_i^{(n)}(t)=f(t),t\overline{\in}[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}),$$

取$t_i^{(n)}\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})$使得$|f_i^{(n)}(t_i^{(n)})-f(t_i^{(n)})|>\frac{1}{2}$.对于其余的$t\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})$使$f_i^{(n)}(t)$保持线性,于是$\|f_i^{(n)}-f\|\geqslant\frac{1}{2}(1\leqslant i\leqslant n)$.故$f_i^{(n)}\in D\backslash B_{1/2}(f)$.但$\|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f_i^{(n)}-f\|\leqslant\frac{2}{n}$,$n$是任意的,故$f\in\overline{co}(D\backslash B_{1/2}(f))$.$D$不是可凹的.

定理 2(Huff-Maynard-Kunen-Rosenthal) 设$K\subset X$是有界闭凸子集,若K不是可凹的,则

(i) 存在$\delta>0$和测度空间(Ω,Σ,μ)以及取值于K的∞拟鞅$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant1)$使得对于任何$\omega\in\Omega$,

$$\inf_{n\geqslant1}\|f_{n+1}(\omega)-f_n(\omega)\|\geqslant\delta.$$

(ii) 存在δ',$0<\delta'<\delta$和测度空间(Ω,Σ,μ)以及取值于K的鞅$(g_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant1)$使得对于任何$\omega\in\Omega$,

$$\inf_{n\geqslant1}\|g_{n+1}(\omega)-g_n(\omega)\|\geqslant\delta'.$$

特别地,K不具有RN性质.

证明 实际上,我们可事先确定$\Omega=[0,1]$,Σ为Ω上的Borel σ代数,μ为Lebesgue测度,然后构造拟鞅和鞅

1° 取$\varepsilon_n>0$,$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty$,由于$K$不是可凹的,故存在$\delta>0$使得任何$x\in K$,$x\in\overline{co}(K\backslash B_\delta(x))$.任意固定一点$x_1\in K$,令$f_1(\omega)\equiv x_1$,$\mathscr{B}_1=\{\varnothing,\Omega\}$.

取$x_{21},\cdots,x_{2m_2}\in K$,$\|x_{2j}-x_1\|\geqslant\delta$,$1\leqslant j\leqslant m_2$,使得

$$\|\sum_{j=1}^{m_2}a_{2j}x_{2j}-x_1\|<\varepsilon, \tag{1.2}$$

其中$a_{2j}>0$,$\sum_{j=1}^{m_2}a_{2j}=1$.令$\beta_{2j}=\sum_{i=1}^{j}a_{2i}$,$1\leqslant j\leqslant m_2$,定义

$$f_2(\omega) = \sum_{j=1}^{m_2} x_{2j}\chi_{[\beta_{2j-1},\beta_{2j})},$$
$$\mathscr{B}_2 = \sigma\{[\beta_{2j-1},\beta_{2j}), 1 \leqslant j \leqslant m_2\}, (\beta_{20} = 0).$$

则

$$\| f_2(\omega) - f_1(\omega) \| \geqslant \min \| x_{2j} - x_1 \| \geqslant \delta, \forall\ \omega \in \Omega \quad (1.3)$$

$$E(f_2|\mathscr{B}_1) = Ef_2 = \sum_{j=1}^{m_2} a_{2j}x_{2j}$$

从而由(1.2)

$$\| E(f_2|\mathscr{B}_1) - f_1 \|_\infty = \| \sum_{j=1}^{m_2} a_{2j}x_{2j} - x_1 \| < \varepsilon_1$$

为了定义 f_3，考虑区间$[\beta_{2j-1},\beta_{2j})$，在此区间上，$f_2(\omega) = x_{2j} \in K$. 取 $x_{31}^{(j)},\cdots,x_{3m_3^{(j)}}^{(j)} \in K$，$\| x_{3k}^{(j)} - x_{2j} \| \geqslant \delta, 1 \leqslant k \leqslant m_3^{(j)}$ 使得

$$\| \sum_{k=1}^{m_3^{(j)}} a_{3k}^{(j)}x_{3k}^{(j)} - x_{2j} \| \leqslant \varepsilon_2. \quad (1.4)$$

这里 $a_{3k}^{(j)} > 0, \sum_{k=1}^{m_3^{(j)}} a_{3k}^{(j)} = 1$，令 $\beta_{3k}^{(j)} = \beta_{2j-1} + (\beta_{2j} - \beta_{2j-1})\sum_{i=1}^{k} a_{3i}^{(j)}$，$1 \leqslant k \leqslant m_3^{(j)}$，定义 f_3 在$[\beta_{2j-1},\beta_{2j})$ 上的值为

$$\sum_{k=1}^{m_3^{(j)}} x_{3k}^{(j)}\chi_{[\beta_{3k-1}^{(j)},\beta_{3k}^{(j)})} \quad (1.5)$$

当 j 取遍 $1,2,\cdots,m_2$ 时，得到

$$f_3(\omega) = \sum_{j=1}^{m_2}\sum_{k=1}^{m_3^{(j)}} x_{3k}^{(j)}\chi_{[\beta_{3k-1}^{(j)},\beta_{3k}^{(j)})},$$
$$\mathscr{B}_3 = \sigma\{[\beta_{3k-1}^{(j)},\beta_{3k}^{(j)}), j = 1,\cdots,m_2, 1 \leqslant k \leqslant m_3^{(j)}\}.$$

直接验证可知，

$$\| f_3(\omega) - f_2(\omega) \| \geqslant \min_j \min_k \| x_{3k}^{(j)} - x_{2j} \| \geqslant \delta. \quad (1.6)$$

又当 $\omega \in [\beta_{2j-1},\beta_{2j})$ 时依定义

$$E(f_3|\mathscr{B}_2) = \frac{1}{\beta_{2j} - \beta_{2j-1}}\int_{\beta_{2j-1}}^{\beta_{2j}} f_3 d\mu = \sum_{k=1}^{m_3^{(j)}} a_{3k}^{(j)}x_{3k}^{(j)}$$

从而

$$\| E(f_3|\mathscr{B}_2) - f_2 \|_\infty \leqslant \sup_j \| \sum_{k=1}^{m_3^{(j)}} a_{3k}^{(j)} x_{3k}^{(j)} - x_{2j} \| \leqslant \varepsilon_2.$$

依此做下去，简而言之，在 f_n 取常值 x 的区间上，利用 K 的不可凹性，取一列向量使它们中的每一个离 x 的距离都大于 δ，而它的凸组合离 x 的距离小于 ε_n，然后将区间细分以定义函数 f_{n+1}，对于其它区间同样泡制，……，$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 即所要的 ∞ 拟鞅.

2° 我们将利用拟鞅的Riesz分解定理得到所要的鞅. 注意上面证明中的 ε_n 带有任意性，故不妨取 ε_n 和 δ' 使之满足 $\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j \leqslant \frac{1}{2}(\delta - \delta')$. 所得到的 ∞ 拟鞅仍记为 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$. 现在令

$$g_n = L_\infty - \lim_{k\to\infty} E(f_k|\mathscr{B}_n),$$

其极限的存在性可从 Ⅲ §2 Riesz 分解定理的证明类似地得到，并且 $(g_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 确是一个鞅. 现在只须证明 $g_n(\omega)\in K$ 并且对于 $\forall\ \omega\in\Omega, \inf_{n\geqslant 1}\| g_{n+1}(\omega) - g_n(\omega) \| \geqslant \delta'$. 实际上，由 f_n 的构造方法，对于每个 $\omega\in\Omega$，$E(f_k|\mathscr{B}_n)$ 都是 K 中元素的凸组合，K 为凸集，故 $E(f_k|\mathscr{B}_n)\in K$. 又 K 为闭集，故对于每个 ω，$g_n = \lim_{n\to\infty} E(f_k|\mathscr{B}_n)\in K$. 其次

$$\begin{aligned}
\| g_n - f_n \|_\infty &= \lim_{k\to\infty} \| E(f_k|\mathscr{B}_n) - f_n \|_\infty \\
&= \lim_{k\to\infty} \| E(\sum_{i=n}^{k-1} E(f_{i+1} - f_i|\mathscr{B}_i)|\mathscr{B}_n \|_\infty \\
&\leqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{i=n}^{k-1} \| E(f_{i+1} - f_i|\mathscr{B}_i) \|_\infty \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \varepsilon_i
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\| g_{n+1}(\omega) - g_n(\omega) \| &\geqslant \| f_{n+1}(\omega) - f_n(\omega) \| \\
&\quad - \| f_{n+1} - g_{n+1} \| - \| f_n - g_n \|_\infty \\
&\geqslant \delta - \sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i - \sum_{i=n}^{\infty} \varepsilon_i > \delta'.
\end{aligned}$$

定义 4 设 $K\subset X$ 是有界子集，$x^*\in X^*$，$x^*\neq 0$，记

$M(K,x^*)=\sup\{x^*(x),x\in K\}$. 对于 $\alpha>0$，令 $S(K,x^*,\alpha)=\{x\in K,x^*(x)\geqslant M(K,x^*)-\alpha\}$，称 $S(K,x^*,\alpha)$ 是 x^*，α 确定的 K 的切片(slice).

定理 3 有界集 $K\subset X$ 是可凹的当且仅当 K 有直径任意小的切片.

证明 若 K 是可凹的并且 $\varepsilon>0$，存在 $x\in K,x\overline{\in}\overline{co}(K\backslash B_\varepsilon(x))$. 由 Hahn-Banach 定理，存在 $x^*\in X^*$，$\|x^*\|=1$ 和 $r\in R$，

$$x^*(x)>r>\sup\{x^*(y),y\in\overline{co}(K\backslash B_\varepsilon(x))\}.$$

取 $\alpha=M(K,x^*)-r$，则 $S(K,x^*,\alpha)\subset B_\varepsilon(x)\cap K$. 实际上，对于 $\forall\ y\in S(K,x^*,\alpha)$，$y\in K$ 并且 $x^*(y)>M(K,x^*)-\alpha=r$. 所以 $y\overline{\in}\overline{co}(K\backslash B_\varepsilon(x))$. 得出 $y\in B_\varepsilon(x)$. 于是 $\mathrm{diam}S(K,x^*,\alpha)\leqslant 2\varepsilon$.

反之，若对于 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $x^*\in X^*,x^*\neq 0,\alpha>0$. 使得 $\mathrm{diam}S(K,x^*,\alpha)<\varepsilon$. 对于 $\forall\ x\in S(K,x^*,\alpha),x^*(x)>r=M(K,x^*)-\alpha$，于是

$$\overline{co}(K\backslash B_\varepsilon(x))\subset\overline{co}(K\backslash S(K,x^*,\alpha))\subset x^{*-1}(-\infty,r]$$

但 $x^*(x)>r$ 故 $x\overline{\in}\overline{co}(K\backslash B_\varepsilon(x)$.

引理 设 $F:\Sigma\rightarrow X$ 是关于测度空间(Ω,Σ,μ)的有界变差 μ 连续测度，若 F 有局部直径任意小的平均值域，即对于 $\forall\ \varepsilon>0$ 和 $A\in\Sigma$，若 $\mu(A)>0$ 则存在 $A'\in\Sigma,A'\subset A,\mu(A')>0$ 使得

$$\mathrm{diam}Ave(F|A')\triangleq\mathrm{diam}\{\frac{F(E)}{\mu(E)},E\in\Sigma,E\subset A',\mu(E)>0\}$$

则存在 $f\in L_1(\mu,X)$ 是 F 的 RN 导数.

证明 对于 $\varepsilon>0$，应用竭举引理，存在不相交集合序列 $E_n(\varepsilon)\in\Sigma,\mu(E_n(\varepsilon))>0,\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\mu(\Omega\backslash\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i(\varepsilon))=0$ 并且对于每个 n，

$$\begin{aligned}&\mathrm{diam}Ave(F|E_n(\varepsilon))\\&=\mathrm{diam}\{\frac{F(E)}{\mu(E)},E\subset\Sigma,E\in E_n(\varepsilon),\mu(E)>0\}<\varepsilon.\quad(1.7)\end{aligned}$$

定义

$$f_\varepsilon(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(E_n(\varepsilon))}{\mu(E_n(\varepsilon))}\chi_{E_n(\varepsilon)}, \quad \forall\ \omega \in \Omega$$

以及 $F_\varepsilon(E) = \int_E f_\varepsilon d\mu$. 则对于 Ω 的每个分划 π,

$$\begin{aligned}
\sum_{E\in\pi} \| F(E) - F_\varepsilon(E) \| &= \sum_{E\in\pi} \| F(E) - \int_E f_\varepsilon d\mu \| \\
&\leqslant \sum_{E\in\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \| F(E\cap E_n(\varepsilon)) - \int_{E\cap E_n(\varepsilon)} f_\varepsilon d\mu \| \\
&= \sum_{E\in\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \| \frac{F(E\cap E_n(\varepsilon))}{\mu(E\cap E_n(\varepsilon))} \\
&\qquad - \frac{F(E_n(\varepsilon))}{\mu(E_n(\varepsilon))} \| \mu(E\cap E_n(\varepsilon)) \\
&\leqslant \sum_{E\in\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon\mu(E\cap E_n(\varepsilon)) \leqslant \varepsilon\mu(\Omega).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

最后的式子应用了(1.6),于是

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon,\delta\to 0} \| f_\varepsilon - F_\sigma \| (\Omega) &\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \| F_\varepsilon - F \| (\Omega) \\
&\quad + \lim_{\delta\to 0} \| F_\sigma - F \| (\Omega) = 0,
\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{\varepsilon,\delta\to 0}\int_\Omega \| f_\varepsilon - f_\sigma \| d\mu = 0$,取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\{f_{\frac{1}{n}}, n \geqslant 1\}$ 是 $L_1(\mu, X)$ 中的 Cauchy 序列,从而存在 $f \in L_1(\mu, X)$,

$$f = L_1 - \lim_{n\to\infty} f_{\frac{1}{n}}.$$

由(1.7)知道必有

$$F(E) = \lim_{n\to\infty} F_{\frac{1}{n}}(E) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_{\frac{1}{n}} d\mu = \int_E f d\mu, \forall\ E \in \Sigma$$

定理 4 (Rieffel) 设(Ω, Σ, μ)是测度空间,$K \subset X$ 是有界闭凸集,$F: \Sigma \to X$ 是 μ 连续向量测度,$Ave(F) \subset K$,则以下条件等价:

(i) 存在 $f \in L_1(\mu, X)$ 使得 $F(A) = \int_A f d\mu, \forall\ A \in \Sigma$.

(ii) 对于 $\forall\ \varepsilon > 0$,存在 $\Omega_\varepsilon \subset \Sigma$ 使得 $\mu(\Omega\backslash\Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ 并且

$Ave(F|Q_\varepsilon)$ 是相对范数紧集.

(iii) 对于 $\forall\ \varepsilon > 0$, 存在 $\Omega_\varepsilon \in \Sigma$ 使得 $\mu(\Omega\backslash\Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ 并且 $Ave(F|\Omega_\varepsilon)$ 是相对 w 紧集.

(iv) F 具有局部 s 可凹平均值域,即对于 $\forall\ A \in \Sigma, \mu(A) > 0$ 存在 $A' \in \Sigma, A' \subset A, \mu(A') > 0$ 使得 $Ave(F|A')$ 是 s 可凹的.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii) 由于 $f \in L_1(\mu,X)$ 存在简单函数列 f_n 使得

$$\| f_n - f \| \to 0 \quad \mu\text{-}a.e., \| f_n - f \|_1 \to 0. (n \to \infty)$$

由 Egorov 定理,对于 $\forall\ \varepsilon > 0$,存在 $\Omega_\varepsilon \in \Sigma, \mu(\Omega\backslash\Omega_\varepsilon) < \varepsilon$,在 Ω_ε 上 f_n 一致收敛于 f,记 $F_n(A) = \int_A f_n d\mu$,当 $A \subset \Omega_\varepsilon$ 时,存在 n_0 使得 $n \geqslant n_0$ 时,

$$\left\| \frac{F_n(A)}{\mu(A)} - \frac{F(A)}{\mu(A)} \right\| \leqslant \frac{1}{\mu(A)}\int_A \| f_n - f \| d\mu$$
$$\leqslant \sup_{\omega\in\Omega_\varepsilon} \| f_n - f \| \leqslant \varepsilon. \tag{1.9}$$

但

$$Ave(F_n|\Omega_\varepsilon) = \{\frac{F_n(A)}{\mu(A)}, A \in \Sigma, \mu(A) > 0, A \subset \Omega_\varepsilon\}$$

是有限维空间中的有界集,故为相对紧集,(1,8) 保证了 $Ave(F|\Omega_\varepsilon)$ 是相对紧集.

(ii)$\Rightarrow$(iii) 是显然的.

(iii)$\Rightarrow$(iv) 当 $Ave(F|\Omega_\varepsilon)$ 为相对 w 紧集时,其范数闭凸壳也是相对 w 紧的,由推论 1 和定理 2 知,$Ave(F|\Omega_\varepsilon)$ 是可凹的从而是 s 可凹的,即 F 有局部 s 可凹平均值域.

(iv)$\Rightarrow$(i) 设 $Ave(F) \subset K$ 并且 F 具有局部 s 可凹平均值域. 记 $K' = Ave(F|A')$,其中 $Ave(F|A')$ 是 s 可凹的,于是对于 $\forall\ \varepsilon > 0$,存在 $x \in K'$ 使得 $x \overline{\in}\ s\text{-}co(K\backslash B_\varepsilon(x))$,例如 $x = \frac{F(A_0)}{\mu(A_0)}$,其中 $A_0 \in \Sigma, \mu(A_0) = 0, A_0 \subset A'$ 我们证明存在 $B_0 \subset A_0$ 使得对于 $\forall\ E \in \Sigma, E \subset B_0, \mu(E) > 0$ 时 $\left\| \frac{F(E)}{\mu(E)} - x \right\| \leqslant \varepsilon$. 若不然,$A_0$ 的任何子

集 $B(B \in \Sigma, \mu(B) > 0)$ 包含子集 B' 使得 $B' \in \Sigma, \mu(B') > 0$ 并且

$$\| x - \frac{F(B')}{\mu(B')} \| \geqslant \varepsilon. \tag{1.10}$$

应用竭举引理可知存在可列个互不相交集合 $B'_n, B'_n \subset A_0, \mu(B'_n) > 0$，在每个 B'_n 上，(1.10) 成立并且对于 $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_n, \mu(A_0 \backslash C) = 0$. 从而 $F(A_0 \backslash C) = 0$. 于是

$$x = \frac{F(A_0)}{\mu(A_0)} = \frac{F(C)}{\mu(C)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(B'_n)}{\mu(B'_n)} \cdot \frac{\mu(B'_n)}{\mu(C)},$$

因为 $\frac{F(B'_n)}{\mu(B'_n)} \in K$，(1.10) 说明 $x \in s\text{-}co(K \backslash B_\varepsilon(x))$，矛盾. ε 是任意的，这说明 F 有局部任意小直径的平均值域. 由引理知 F 关于 μ 具有 RN 导数，定理得证.

定义 5 Banach 空间中的集合称为是子集可凹 (subset dentable set)（子集 s 可凹，子集 c 可凹）的：若它的每个有界非空子集是可凹（s 可凹，c 可凹）的.

例 1 表明，对于一个有界闭凸子集，可凹性与 s 可凹性是不同的，但若转到子集可凹性，情况就不同了.

定理 5 设 K 是 Banach 空间 X 的有界闭凸子集，则下面条件等价：

(i) K 具有 RN 性质.

(ii) K 是子集可凹的.

(iii) K 是子集 s 可凹的.

(iv) K 是子集 c 可凹的.

(v) K 的每个闭凸子集是可凹的.

(vi) K 的每个可数子集是 c- 可凹的.

证明 (ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(vi) 是显然的. 当 (i) 成立时，K 具有鞅收敛性质，从而 K 的每个闭凸子集具有鞅收敛性. 定理 2 说明 (v) 成立，定理 4 说明反过来的结论也成立，故 (i)⟺(v). 当 (v)

成立时，对于K的每个子集$D,\overline{co}(D)$可凹，命题1说明D可凹，从而(ii)成立. 剩下(vi)⇒(v)，一个构造性的证明见Bourgin[1].

推论 2 Banach空间X具有RN性质当且仅当X关于$[0,1]$上的Lebesgue测度具有RN性质.

证明 注意定理2中构造的鞅和拟鞅都是定义在$[0,1]$上的Lebesgue测度空间上的，因此若X关于此测度具有RN性质，则X的每个闭凸子集具有可凹性. 但定理5说明可凹性是与测度空间的选择无关的，从而X关于任一测度空间具有RN性质.

推论 3 Banach空间X具有RN性质当且仅当对于任何可测空间(Ω,Σ)上的有界变差X值测度F，存在$f\in L_1(\Omega,\Sigma,\|F\|,X)$使得

$$F(A)=\int_A fd\|F\|,\forall A\in\Sigma \tag{1.11}$$

证明 必要性是显然的. 为了充分性，注意到当F为有界变差向量测度时，$\|F\|$是实值有限测度. $(\Omega,\Sigma,\|F\|)$是有限测度空间，推论中的条件表明$\frac{dF}{d\|F\|}$存在，从而对于任何有限测度(Ω,Σ,μ)，只要$F\leqslant\mu$使有$\|F\|\leqslant\mu$，于是$\frac{dF}{d\mu}=\frac{dF}{d\|F\|}\cdot\frac{d\|F\|}{d\mu}$ $a.e.$存在.

§2 暴露点与端点表现

有两个经典的关于局部凸拓扑线性空间中凸集的定理，它们在分析数学中有着广泛的应用.

Krein-Milman **定理** 设K是局部凸Hausdorff拓扑向量空间中的非空紧凸集，则K的端点集合$exK\neq\varnothing$并且$K=\overline{co}(exK)$.

Choquet **定理** 设K是局部凸Hausdorff拓扑向量空间X中

的可度量化非空紧凸集，$x \in K$，则存在以 K 的 Borel 子集为 σ 代数的正则概率测度 μ 使得 $\mu(exK)=1$ 并且

$$\int_K x^* d\mu(\omega) = x^*(x), \forall\, x^* \in X^*.$$

本节将就 Banach 空间情况，首先介绍第一个定理的推广形式. 然后叙述第二个定理经过 Edgar 改造了的形式，它依赖于凸集的 RN 性质.

定义 1 设 K 是 Banach 空间 X 中的有界闭集. $x \in K$ 称为 K 的端点(extreme point)，若 x 不能写成 K 中任何两个不同点 y 与 z 的凸组合 $\alpha y + (1-\alpha)z, 0<\alpha<1$. 称一个闭凸集是具有 Krein-Milman(KM) 性质的，若它的每个有界闭凸子集至少包含一个端点.

定义 2 设 K 是 Banach 空间 X 中的有界闭凸子集，$x \in K$，称 x 是 K 的暴露点(exposed point)：若存在 $x^* \in X^*$，$\|x^*\|=1$，使得对于 $\forall\, y \in K, y \neq x$，则 $x^*(y) < x^*(x)$. 此时称 x^* 是在 x 点的暴露泛函(exposed functional). 若此外还有 $x^*(y_n) \to x^*(x)$ 时 $y_n \to x$，则称 x 为强暴露点(strongly exposed point)，x^* 为 x 点的强暴露泛函. 记 K 的暴露点的全体为 $expK$，强暴露点的全体为 $strexpK$，记强暴露 K 的某个点的线性泛函全体为 $SE(K)$.

例 1 设 $K=B(c_0)$(c_0 的闭单位球)，则 $exK=\varnothing$.

实际上任何 $x=(x_n) \in K, x_n \to 0$，故 $\exists\, n_0$ 使及 $|x_{n_0}|<\frac{1}{2}$ 取

$$y=(x_1,\cdots,x_{n_0-1},x_{n_0}-\frac{1}{2},x_{n_0+1},\cdots)$$

$$z=(x_1,\cdots,x_{n_0-1},x_{n_0}+\frac{1}{2},x_{n_0+1},\cdots)$$

则 $y,z \in K, x=\frac{1}{2}(y+z)$，$x$ 不是端点.

例 2 设 $K=B(L_1[0,1])$，则 $exK=\varnothing$.

实际上对于 $\forall\, f \in K, 0 \leqslant \int_0^1 |f(t)|dt \leqslant 1$，由于 $\int_0^t |f(s)|ds$ 是

t 的连续函数. 故存在 $t_0, 0 \leqslant t_0 \leqslant 1, \int_0^{t_0} |f(s)| ds = \frac{1}{2}\int_0^1 |f(s)| ds$ 取

$$f_1(t) = 2f(t)\chi_{[0,t_0]}, f_2(t) = 2f(t)\chi_{[t_0,1]},$$

则 $\| f_1 \| \leqslant 1, \| f_2 \| \leqslant 1, f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. 从而 $exK = \varnothing$.

例 3 设 $K = B(C[0,1])$. 其中 $C[0,1]$ 是实空间. 则 $exK = \{\chi_{[0,1]}, -\chi_{[0,1]}\}$, 从而 $\overline{co}(exK) \neq K$. 这一结论可用定义证明之.

例 4 设 K 是平面上单位园周 Γ 与点 $(1, -1)$ 张成的凸集, 则 $(1,0)$ 是端点但不是暴露点.

例 5 设 $\{e_n, n \geqslant 1\}$ 是 l_2 中的标准基, $K = \overline{co}\{e_n, n \geqslant 1\}$. 由 l_2 的自反性和 K 的有界闭凸性, K 是 w 紧集. 我们可证明 o 是暴露点但不是强暴露点.

实际上取 $x^* = (-1, 0, 0, \cdots) \in l_2^*$, 则对于任何 $x \in co\{e_n, n \geqslant 1\}$, 不妨设 $x = (\alpha_1, \cdots, \alpha_2, 0, \cdots)$ 其中 $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$ 则 $x^*(x) = -\alpha_1 < 0 = x^*(0)$. 实际上除非 $x = 0$ 都有 $x^*(x) < x^*(0)$. 0 是暴露点. 另一方面, 若 x^* 是在 0 点的暴露泛函, 则 $M = \sup\{x^*(x), x \in K\} = 0, S(K, x^*, \varepsilon) = \{x \in K, x^*(x) > -\varepsilon\}$, $\operatorname{diam} S(K, x^*, \varepsilon) = \sqrt{2}$. 例如对于 $e_i, e_j (i, j > 1, i \neq j)$ 则实际验证知道 $e_i, e_j \in S(K, x^*, \varepsilon)$, $\operatorname{diam} S(K, x^*, \varepsilon) \geqslant \| e_i - e_j \|_2 = \sqrt{2}$, $\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{diam} S(K, x^*, \varepsilon) \neq 0$, 0 不是强暴露点.

命题 设 $K \subset X$ 是有界集, 则

(i) K 的每个暴露点是 K 的 s 凹点.

(ii) K 的每个强暴露点是凹点.

证明 1° 设 x_0 是 K 的暴露点, $x^* \in X^*$, $\| x^* \| = 1$ 是在 x_0 的暴露泛函, 若有 $\varepsilon > 0$ 使得 $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ 其中 $x_n \in K \backslash B_\varepsilon(x_0)$, $\alpha_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$, 注意由暴露点定义

$$x^*(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x^*(x_n),x^*(x_0)\geqslant x^*(x_n), \qquad (2.1)$$

为使(2.1)成立必有 $x^*(x_0)=x^*(x_n)$，从而 $x_n=x_0$，矛盾.

2° 若 x_0 是 K 的强暴露点，则对于 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\alpha>0$ 使得当 $y\in K\backslash B_\varepsilon(x_0)$ 时，$x^*(y)<x^*(x_0)-\alpha$，从而

$$\sup\{x^*(y),y\in K\backslash B_\varepsilon(x_0)\}<x^*(x_0)-\alpha,$$

$$\sup\{x^*(y),y\in\overline{co}(K\backslash B_\varepsilon(x_0))\}<x^*(x_0)-\alpha,$$

故 $x_0\overline{\in}\ \overline{co}(K\backslash B_\varepsilon(x_0))$，$x_0$ 为凹点.

引理 1 (Kunen, Rosenthal) 设 $K\subset X$ 是有界闭凸集，具有 RN 性质. $x^*\in X^*$，$\|x^*\|=1$，$M=\sup\{x^*(x),x\in K\}$，若 $\varepsilon>0$，$\alpha>\eta>0$，则存在 $x_0\in S(K,x^*,\eta)$ 使得

$$x_0\overline{\in}\ \overline{co}((K\backslash B_\varepsilon(x_0))\cup(B_1(x_0)\cap\{x\in X,x^*(x)<M-\alpha\}) \qquad (2.2)$$

证明 记右端的集合为 W. 若结论不成立，则对于任何 $x_0\in S(K,x^*,\eta)$，$x_0\in W$. 存在 $x_1,\cdots,x_m$ 使得 $\|x_0-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\|<\varepsilon'$ (ε' 是任意事先给定正数)，其中 $\alpha_i>0$，$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1$，而对于 x_i，$i=1,\cdots,m$，要么，$x_i\in K$ 并且 $\|x_i-x_0\|\geqslant\varepsilon$，要么 $\|x_i-x_0\|\leqslant 1$ 并且 $x^*(x_i)<M-\alpha$. 注意在后一情况有

$$\alpha-\eta\leqslant x^*(x_0)-x^*(x_i)\leqslant\|x^*\|\,\|x_0-x_i\|=\|x_0-x_i\|,$$

总之，对于 $\forall\ x_i$，$\|x_0-x_i\|\geqslant\min(\varepsilon,\alpha\text{-}\eta)$.

若 (ε_i) 是一列正数并且 $\delta_0=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i<x^*(x_0)-M+\eta$. 现在应用类似于 §1 定理 2 的方法构造 ∞ 拟鞅 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$. 先取 $f_1\equiv x_0$，对于 $n\geqslant 2$，考虑 f_n 所取的值 x_i，当 $x_i\in S(K,x^*,\eta)$ 时，重复上面过程得出 $x_{i_1},\cdots,x_{in_i}$ 并且细分 x_i 所在的区间，象(1.5)式一样定义 f_{n+1}. 当 $x_i\overline{\in}S(K,x^*,\eta)$ 时，就不再细分 x_i 所在的区间并且仍令 $f_{n+1}=x_i$. 总之 $(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 具有如下性质：

(i) $f_1(\omega) = x_0$,

(ii) $\| E(f_{n+1} | \mathscr{B}_n) - f_n \|_\infty \leqslant \varepsilon_n, n \geqslant 1$

(iii) 若 $x^*(f_n(\omega)) \geqslant M - \eta$,则

$$\| f_{n+1}(\omega) - f_n(\omega) \| \geqslant \min(\varepsilon, \alpha - \eta) > 0,$$

(iv) 若 $x^*(f_n(\omega)) < M - \eta$,则 $f_{n+1}(\omega) = f_n(\omega)$.

(f_n) 取值于 $S(K, x^*, \eta) \subset K$,并且在它刚要离开 $S(K, x^*, \eta)$ 时停止.由于 K 是具有 RN 性质的有界闭凸集,故存在 $f \in L_1(\mu, X)$,$f_n \to f$ $a.e.$ 由此,对于充分大的 n,(iii) 不成立,从而由(iv)

$$\int_\Omega x^*(f(\omega))d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega x^*(f_n(\omega))d\mu \leqslant M - \eta \quad (2.3)$$

另一方面,根据拟鞅性质(ii)

$$\| Ef_n - x_0 \| = \| E(\sum_{i=1}^{n-1}(E(f_{i+1} | \mathscr{B}_i) - f_i) \|_\infty$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \| E(f_{i+1} | \mathscr{B}_i) - f_i \|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i,$$

从而 $\| Ef - x_0 \| = \lim_{n\to\infty} \| Ef_n - x_0 \| \leqslant \delta_0$ 并且

$$\int_\Omega x^*(f(\omega))d\mu \geqslant x^*(x_0) - \delta_0 > M - \eta,$$

矛盾说明 $x_0 \in W$ 不成立,引理得证.

引理 2 设 $x^*, y^* \in X^*$, $\| x^* \| = \| y^* \| = 1, \varepsilon > 0$. 若对于 $\forall x \in X$, $\| x \| \leqslant 1$, $x^*(x) = 0$ 时,$\| y^*(x) \| \leqslant \varepsilon$,则要么 $\| x^* - y^* \| \leqslant 2\varepsilon$,要么 $\| x^* + y^* \| \leqslant 2\varepsilon$.

证明 考虑 $y^*|_M$,其中 $M = \{x \in X, x^*(x) = 0\}$,将 $y^*|_M$ 保范延拓为 $z^* \in X^*$,此时 $\| z^* \| = \| y^*|_M \| \leqslant \varepsilon$ 并且当 $x^*(x) = 0$ 时 $y^*(x) - z^*(x) = 0$,从而存在 α 使得 $y^* - z^* = \alpha x^*$. 现在

$$|1 - |\alpha|| = | \| y^* \| - \| y^* - z^* \| | \leqslant \| z^* \| \leqslant \varepsilon,$$

若 $\alpha \geqslant 0$,则

$$\| x^* - y^* \| = \| (1-\alpha)x^* - z^* \| \leqslant |1-\alpha| + \| z^* \| \leqslant 2\varepsilon,$$

若 $\alpha < 0$,则

$\| x^* + y^* \| = \| (1+\alpha)x^* + z^* \| \leqslant |1+\alpha| + \| 2^* \| \leqslant 2\varepsilon.$

定理 1 (Bishop-Kunen-Rosenthal) 设 $K \subset X$ 是非空有界闭凸子集，K 具有 RN 性质，则 $SE(K)$ 是 X^* 的单位球面 $S_P(X^*)$ 的范数稠密 G_δ 子集.

证明 对于 $\forall\ \beta > 0$，令

$$A_\beta = \{x^* \in X^*, \| x^* \| = 1, \text{存在 } \alpha > 0, \mathrm{diam} S(K, x^*, \alpha) < \beta\}. \tag{2.4}$$

我们将证明 A_β 是 $S_P(X^*)$ 的稠子集，由 A_β 是 $S_P(X^*)$ 中的开集并且 $SE(K) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}}$，Baire 纲定理将导致本定理的结论.

不妨设 K 包含一个以上的点(否则结论是平凡的)，$x^* \in S(X^*)$，$\delta, \beta > 0$. 不失一般性设 x^* 至少有两个不同值. 我们证明必有 $y^* \in A_\beta$，使得 $\| y^* - x^* \| < \delta$.

取 $\varepsilon, \eta, \alpha$ 满足 $2\varepsilon < \beta, 2\alpha < \delta$ 以及

$$\eta + \varepsilon + 6\delta < \sup x^*(K) - \inf x^*(K). \tag{2.5}$$

取 x_0 如引理 1，由 Hahn-Banach 定理，存在 $y^* \in X^*$. $\| y^* \| = 1$ 使得 $\sup y^*(W) < y^*(x_0)$. 此时存在 $r > 0$ 使得 $x_0 \in S(K, y^*, r)$ 并且 $W \cap S(K, y^*, r) = \varnothing$. 由此推出

$$\forall\ x \in S(K, y^*, r), \| x - x_0 \| < \varepsilon \tag{2.6}$$

所以 $y^* \in A_\beta$.

往证 $\| y^* - x^* \| < \delta$，因为 y^* 隔离 x_0 与 $B_1(x_0) \cap \{x \in X, x^*(x) < M - \alpha\}$，所以 y^* 隔离 0 与 $B_1(0) \cap (\{x \in X, x^*(x) < M - \alpha\} - x_0) = B_1(0) \cap \{x \in X, x^*(x) < M - \alpha - x^*(x_0)\} \supset B_1(0) \cap \{x \in X, x^*(x) < -\alpha\}$. 因此当 $x \in B_1(0) \cap \{x \in X, x^*(x) < -\alpha\}$ 时，$y^*(x) < y^*(0) = 0$.

反过来，当 $y^*(x) = 0$ 时必有 $x^*(x) \geqslant -\alpha$，总之当 $\| x \| \leqslant 1$，$y^*(x) = 0$ 时 $|x^*(x)| \leqslant \alpha$. 由引理 2，要么 $\| x^* - y^* \| \leqslant 2\alpha$，要么 $\| x^* - y^* \| \leqslant 2\alpha$.

注意 $\sup y^*(K) = \sup y^*(S(K, y^*, r))$ 并且 $\| y^* \| = 1$，由

(2.6)

$$y^*(x_0)\geqslant \sup y^*(K)-\varepsilon. \tag{2.7}$$

若 $\|x^*+y^*\|\leqslant 2\alpha$，这意味着 $|\sup[-y^*(K)]-M|<2\alpha$，$|x^*(x_0)+y^*(x_0)|\leqslant 2\alpha$ 从而 $|\inf y^*(k)-y^*(x_0)|\leqslant 4\alpha+M-x^*(x_0)\leqslant \eta+4\alpha$. 由此得出

$$\sup y^*(K)-\varepsilon\leqslant y^*(x_0)\leqslant \inf y^*(K)+4\alpha+\eta \tag{2.8}$$

由于 $\|x^*+y^*\|\leqslant 2\alpha$，最终可得出

$$\sup x^*(K)-\inf x^*(K)\leqslant 6\alpha+\varepsilon+\eta,$$

这与(2.5)矛盾. 于是最终有 $\|x^*-y^*\|\leqslant 2\alpha<\delta$.

定理 2 设 K 是 Banach 空间的有界闭凸集，则以下等价：

(i) K 具有 RN 性质.

(ii) 对于 K 的每个闭凸子集 K'，$\text{strexp } K'\neq\varnothing$.

(iii) 对于 K 的每个闭凸子集 K'，

$$K'=\overline{co}(\text{strexp } K') \tag{2.9}$$

(iv) 对于 K 的每个闭凸子集 K'，$SE(K')$ 在 $S(X^*)$ 中稠密.

证明 (iii)⇒(ii) 显然成立，(ii)⇒(i) 由命题(ii)和 §1 定理 5 得到. (i)⇒(iv) 即定理 1，剩下只须证明(iv)⇒(iii).

不妨就 K 来证明. 若 $K\neq\overline{co}(\text{strexp } K)\triangleq W$，由 Hahn-Banach 定理，存在 $x^*\in X^*$，$\|x^*\|=1$ 和 $r\in R$，使得 $x^*(W)<r<\sup x^*(K)$. 取 $\alpha=\sup x^*(K)-\alpha$，则 $W\cap S(K,x^*,\alpha)=\varnothing$. 由(iv)，$SE(K)$ 在 $S(X^*)$ 中稠密，故存在 $y^*\in SE(K)$，$\|y^*\|=1$，$\|x^*-y^*\|\leqslant\frac{\alpha}{4M}$，其中 $M=\sup\{\|x\|,x\in K\}$. 当 $y\in S(K,y^*,\frac{\alpha}{2})$ 时

$$x^*(y)>y^*(y)-|x^*(y)-y^*(y)|>\sup y^*(K)-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{4M}M$$

$$>\sup x^*(K)-\frac{\alpha M}{4M}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha M}{4M}=\sup x^*(K)-\alpha.$$

所以 $y\in S(K,x^*,\alpha)$，即 $S(K,y^*,\frac{\alpha}{2})\subset S(K,x^*,\alpha)$. 若 $x_0\in K$ 是

相应于 y^* 的强暴露点，则 $x_0\in W$，从而 $W\cap S(K,y^*,\frac{\alpha}{2})\neq\varnothing$，矛盾.

记 dent K 是集合 K 的凹点全体，由命题(ii)和定理 2 知道下面结论成立.

推论 (Phelps) 设 X 是 Banach 空间，$K\subset X$ 是有界非空闭凸子集，K 具有 RN 性质，则

$$K=\overline{co}(\text{dent } K). \tag{2.10}$$

若将 $SE(K)$ 换为支撑 K 的泛函集合 $\text{supp}(K)=\{x^*\in X^*\setminus\{0\},\exists\ x\in K$ 使得 $x^*(x)=\sup\{f(y),y\in K\}\}$，则情况很不一样，它导致一个不依赖于空间几何性质的结论. 为证明 Bishop-Phelps 的这一定理，我们先做一些准备.

引理 3 设 C 是 X 的闭凸子集，$x^*\in X^*$ 并且 x^* 在 C 上有界，$M>0$，则对于每个 $z\in C$，存在 $x_0\in C$ 使得 $x_0-z\in K(x^*,M)\triangleq\{x\in X,\|x\|<Mx^*(x)\}$ 并且 $C\cap(x_0+K(x^*,M))=\{x_0\}$.

证明 注意 $K(x^*,M)$ 是闭凸锥. 记 $x\geqslant y$ 当且仅当 $x-y\in K(x^*,M)$，"$\geqslant$"是 C 上的半序. 对于 $z\in C$，令 $\mathscr{Z}=\{x\in C,x\geqslant z\}$，若 W 是 $\mathscr{Z}$ 中的全序子集，例如 $W=\{w_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$，则 $\{x^*(w_\lambda),\lambda\in\Lambda\}$ 是单调有界实数构成的网，于是

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}x^*(w_\lambda)=\alpha=\sup_{\lambda\in\Lambda}x^*(w_\lambda).$$

由 $K(x^*,M)$ 和半序的定义，当 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$ 时，$w_{\lambda_1}\leqslant w_{\lambda_2}$，从而 $w_{\lambda_2}-w_{\lambda_1}\in K(x^*,M)$，所以 $\|w_{\lambda_1}-w_{\lambda_2}\|\leqslant M(x^*(w_{\lambda_2})-x^*(w_{\lambda_1}))\to 0$. $\{w_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 Cauchy 网，于是 $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}w_\lambda=w\in C$. 后者是因为 X 的完备性. 显然 $w\geqslant z$，故 $w\in\mathscr{Z}$，w 为 $\mathscr{Z}$ 的上界. Zorn 引理保证了 $\mathscr{Z}$ 中有极大元 x_0. 由 $x_0\geqslant z$ 知 $x_0-z\in K(x^*,M)$. 由 $x_0\in C$ 知 $x_0\in C\cap(x_0+K(x^*,M))$. 若另有 y 满足同样的条件，则 $y-x_0\in K(x^*,M)$，$y\geqslant x_0\geqslant z$ 从而 $y\in\mathscr{Z}$，但 x_0 为极大元，故必有 $y=x_0$.

引理 4 设 $x^*,y^*\in X^*$，$\|x^*\|=\|y^*\|=1$，$0<\varepsilon<1$，$M>1+\frac{2}{\varepsilon}$. 若对于 $\forall\ x\in K(x^*,M)$，$x^*(x)\geqslant 0$，则 $\|x^*-y^*\|\leqslant\varepsilon$.

证明 设 $x\in X$, $\|x\|=1$ 使得 $Mx^*(x)>1+\frac{2}{\varepsilon}$. 若 $y\in X$, $\|y\|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}$ 并且 $x^*(y)=0$, 则 $\|x\pm y\|\leqslant 1+\frac{\varepsilon}{2}<Mx^*(x\pm y)$, 即 $x\pm y\in K(x^*,M)$. 又对于 $\forall\ x\in K(x^*,M)$, $x^*(x)\geqslant 0$, 故知 $y^*(x\pm y)\geqslant 0$. 于是 $|y^*(y)|\leqslant y^*(x)\leqslant\|y^*\|\ \|x\|=1$. 若 $\|y\|\leqslant 1$, $|y^*(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, 由引理 2, $\min(\|x^*+y^*\|,\|x^*-y^*\|)\leqslant\varepsilon$. 但 $M>1$, 故存在 $z\in X$, $\|z\|=1$, 使得 $x^*(z)>\max(\varepsilon,\frac{1}{M})$, 于是 $\|z\|=1<Mx^*(z)$, $z\in K(x^*,M)$, $y^*(z)\geqslant 0$, 从而 $\varepsilon<x^*(z)\leqslant x^*(z)+y^*(z)\leqslant\|x^*+y^*\|$, 最后必有 $\|x^*-y^*\|\leqslant\varepsilon$.

定理 3 (Bishop-Phelps) 设 C 是 Banach 空间 X 的有界闭凸子集, 则 $\mathrm{supp}(C)$ 是 X^* 中的范数稠密集.

证明 不失一般性, 设 $0\in C$ 并且 $x^*\in X^*$, $\|x^*\|\leqslant 1$. 我们证明对于 $\forall\ \varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, 存在 $y^*\in\mathrm{supp}(C)$ 使得 $\|x^*-y^*\|\leqslant\varepsilon$. 为此取 $M>1+\frac{2}{\varepsilon}$, 取 $x_0\in X$ 使 $Mx^*(\frac{x_0}{\|x_0\|})>1+2\varepsilon$. 容易验证.

$B_{\varepsilon/M}(\frac{x_0}{\|x_0\|})\subset K(x^*,M)$, $K(x^*,M)$ 如引理 3. 从而后者是具有非空内部的闭凸锥. 取 $z=0$ 应用引理 3, 则存在 $y_0\in C$ 使得 $C\cap(y_0+K(x^*,M))=\{y_0\}$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在 $y^*\in X^*$ 使得

$$
\begin{aligned}
\sup y^*(C)=y^*(y_0)&\leqslant\inf_{x\in K(x^*,M)}y^*(y_0+x)\\
&=y^*(y_0)+\inf_{x\in K(x^*,M)}y^*(x),
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

y^* 是支撑 C 的泛函, $y^*\in\mathrm{supp}(C)$ 并且 y^* 在 $K(x^*,M)$ 上非负, 由引理 4, $\|x^*-y^*\|\leqslant\varepsilon$.

定理 4 (Lindenstrauss) 设 K 是 Banach 空间 X 中的有界闭凸子集. 若 K 具有 RN 性质, 则 K 具有 KM 性质并且 $K=\overline{co}(exK)$

证明 由 §1 定理 5, K 以及它的每个子集具有直径任意小

的切片. 取 $K_0=K$，应用归纳法，若 K_n 已定义，现在定义 K_{n+1}. 不妨设 $S(K_n, x_n^*, \alpha)$是 K_n 的直径小于 $2^{-(n+1)}$的切片，应用定理 2 证明中使用的方法以及 Bishop-Phelps 定理，存在 $x_{n+1}^* \in X^*$，$x_{n+1}^* \in$ $\mathrm{supp}(K_n)$ 并且 $S(K_n, x_{n+1}^*, \frac{\alpha}{2}) \subset S(K_n, x_n^*, \alpha)$. 现在令 $K_{n+1}=\{x \in K_n, x_{n+1}^*(x)=\sup x_{n+1}^*(K_n)\}$. 注意 K_{n+1}是非空有界闭凸集并且容易验证当 $x, y \in K_n$，$tx+(1-t)y \in K_{n+1}(0<t<1)$时，必有 $x, y \in K_{n+1}$，此外 $\mathrm{diam} K_{n+1} \leqslant 2^{-(n+1)}$. 此时有唯一的点$\{x_0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$，我们验证 $x_0 \in exK$. 实际上若 $x_0=tx+(1-t)y$，其中 $x, y \in K=K_0$，$0<t<1$. 因为 $x_0 \in K_1$，由上面所说的性质 $x, y \in K_1$，重复这一过程知道对于$\forall\ n \geqslant 1$，$x, y \in K_n$，所以最终有 $x=y=x_0$.

以上证明对于 K 的每个非空有界闭凸集也成立，故 X 具有 KM 性质. 为了证明 $K=\overline{co}(exK) \triangleq W$，反设 $K \neq W$，则由 Bishop-Phelps 定理，存在 $x^* \in X^*$ 和 $y_0 \in K$ 使得

$$\sup x^*(W)<\sup x^*(K)=x^*(y_0).$$

集合 $K'=\{x \in K, x^*(x)=x^*(y_0)\} \subset K$ 是有界闭凸子集并且由上面证明知道 $exK' \neq \varnothing$，由 $exK' \subset exK$ 得出$\overline{co}(\mathrm{ex}K') \subset \overline{co}(exK)$ $=W$，从而 $x^*(y_0) \leqslant \sup x^*(W)$，矛盾.

定理 3 的逆是否成立，即 KM 性质是否蕴含 RN 性质对于一般 Banach 空间这是一个令人瞩目的未解问题. 目前在略带附加条件的情况下已得到肯定的答案. 例如若 X 是一个共轭空间或者 X 本身是一个 Banach 格，则 KM 性质蕴含 RN 性质. 前一个结论我们将在下节叙述，至于第二个结论其证明可参见 Bourgin[1].

推论 $C(\Omega)$(Ω 为非有限紧 Hausdorff 空间)不具有 RN 性质. 当 μ 不是纯原子测度时，$L_1(\mu)$不具有 RN 性质.

证明 对于所说的 Ω，一定存在一个点 ω_0，ω_0 不是孤立点. 考虑集合$\{f \in C(\Omega), f(\omega_0)=0, \|f\| \leqslant 1\}$，类似于例 1 证明 c_0 的闭单位球不具有端点一样可证明，此子集不具有端点，从而 $C(\Omega)$ 不具有 RN 性质. 对于空间 $L_1(\mu)$，将 μ 作分解 $\mu=\mu_1+\mu_2$，其中

μ_1 是纯原子测度，μ_2 是无原子测度，考虑 $L_1(\mu)$ 的子集 $\{f \in L_1(\mu), \int_\Omega |f| d\mu_1 = 0, \int_\Omega |f| d\mu_2 \leqslant 1\}$，象例 2 一样可证明此集合不具有端点，从而 $L_1(\mu)$ 不具有 RN 性质.

现在让我们转到 Edgar-Choquet 表现定理.

定理 5 (Edgar)　设 K 是 Banach 空间 X 的可分有界闭凸子集，K 具有 RN 性质，则对于每个 $x_0 \in K$，存在概率测度 P_{x_0}，P_{x_0} 在 K 的万有可测子集上定义并且 $P_{x_0}(exK) = 1$，对于 $\forall\, x^* \in X^*$，

$$\int_{exK} x^*(x) dP_{x_0}(x) = x^*(x_0) \tag{2.12}$$

为了证明这一定理，需要进一步的测度论的知识.

设 (D,τ) 是 Hausdorff 拓扑空间，$\mathscr{B}(D)$ 是由 D 的 Borel 子集构成的 σ 代数，$\mathscr{B}(D)$ 上的概率测度 μ 称为是胎紧(tight)的，若对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，存在 τ 紧集 K 使得 $\mu(X \backslash K) < \varepsilon$. $\mathscr{B}(D)$ 上胎紧概率测度的全体记为 $P_t(D,\tau)$ 或 $P_t(D)$. 此外以 $\mathscr{U}_\mu$ 记 $\mathscr{B}(D)$ 的 μ 完备化并且记

$$\mathscr{U}_t = \bigcap \{\mathscr{U}_\mu, \forall\, \mu \in P_t(D)\}, \tag{2.13}$$

称 $\mathscr{U}_t$ 是 $\mathscr{B}(D)$ 的胎紧测度的万有 σ 代数，其中的每个集合称为是万有可测集. 若记

$$\mathscr{U}(\mathscr{B}(D)) = \bigcap \{\mathscr{U}_\mu, \mu \text{ 是 } \mathscr{B}(D) \text{ 上的概率测度}\}, \tag{2.14}$$

则 $\mathscr{U}_t(\mathscr{B}(D)) \supset \mathscr{U}(\mathscr{B}(D))$. 后者完全可能是前者的真子集. 事实上，对于每个 Borel σ 代数都可以产生一个万有 σ 代数 —— 包含 $\mathscr{B}(D)$ 的最小万有 σ 代数. 另一方面当 D 是完备可分度量空间时，相反的包含关系成立，从而 $\mathscr{U}(\mathscr{B}(D)) = \mathscr{U}_t(\mathscr{B}(D))$，因为这时 D 上的每个概率测度是胎紧的.

完备可分度量空间又称为 Polish 空间. 度量空间的子集称为 Souslin 集，若它是某个 Polish 空间的连续象. 由点集拓扑的一般理论知道，Polish 空间的子集同胚于一个 Polish 空间的必充条件是该子集是 G_δ 集，于是上述结论可述为可分度量空间的 Souslin 子集是万有可测的，此时 $\mathscr{U}(\mathscr{B}(D)) = \mathscr{U}_t(\mathscr{B}(D))$.

命题 1　设 K 是 Banach 空间 X 的可分闭凸子集，则 exK 是 K 中的万有可测集.

证明　设 $\triangle=\{(x,x),x\in K\}\subset K\times K$，$K$ 是 Polish 空间从而 $K\times K$ 也是并且 $\triangle$ 是 $K\times K$ 的闭子集，$D=K\times(K\backslash\triangle)$ 是 $K\times K$ 的开子集. 由上面所述，D 同胚于 Polish 空间. 定义 $\varphi:D\to K$，$\varphi(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)$，$\varphi$ 连续从而 $\varphi(D)$ 是 K 的 Souslin 子集，但 $\varphi(D)=K\backslash exK$，从 $\varphi(D)$ 万有可测推出 exK 万有可测.

我们将 Kuratowski-Ryll-Nardzewski 选择定理的一个推论作为一个命题列出来而不加证明，详细证明可参见 Diestel[2].

命题 2　设 D 是 Polish 空间，(Ω,Σ) 是可测空间，$h:D\to\Omega$ 满足

(i) 对于 $\forall\ \omega\in\Omega$，$h^{-1}(\{\omega\})$ 是 D 中的非空闭集.

(ii) 对于 D 中的每个开集 V，$h(V)\in\Sigma$.

则存在 $\Sigma\to\mathscr{B}(D)$ 可测的映射 $f:\Omega\to D$ 使得 $h(f(\omega))=\omega$.

凸集 K 上的实函数 ψ 称为是凸函数，若对于 $\forall\ x,y\in K$ 和 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，

$$\psi(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda\psi(x)+(1-\lambda)\psi(y),\tag{2.15}$$

ψ 称为是严格凸的，若对于任何 $x\neq y$，严格不等号成立. 若 K 是 Banach 空间 X 中的可分凸子集，则 $\overline{\mathrm{Span}K}$ 有可数决定集 $\{x_n^*,n\geqslant 1\}\subset(\overline{\mathrm{span}K})^*$，此时

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n^2(x)}{2^n\|f_n\|^2}\tag{2.16}$$

是 K 上的严格凸有界连续函数.

现在我们考虑测度 μ 的分裂. 设 (Ω,Σ,μ) 是有限测度空间，若存在子集 $R\subset\Omega$ 使得 $\forall\ A\in\Sigma$，$A\cap R\neq\varnothing$，$A\cap R^c\neq\varnothing$，定义

$$\Sigma'=\{(A\cap R)\cup(B\cap R^c),\forall\ A,B\in\Sigma\}\tag{2.17}$$

则 Σ' 是 σ 代数并且 $\Sigma\subset\Sigma'$. 在 Σ' 上令

$$\mu'((A\cap R)\cup(B\cap R^c))=\frac{1}{2}(\mu(A)+\mu(B)).\tag{2.18}$$

若 $A_1,\cdots,A_n\in\Sigma'$ 两两不相交，$x_1,\cdots,x_n\in X$，则

$$\int_R\Big(\sum_{i=1}^n x_i\chi_{A_i}\Big)d\mu'=\sum_{i=1}^n x_i\mu'(A_i\cap R)=\frac{1}{2}\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^n x_i\chi_{A_i}\Big)d\mu,$$

同样地，

$$\int_{R^c}\Big(\sum_{i=1}^n x_i\chi_{A_i}\Big)d\mu'=\sum_{i=1}^n x_i\mu'(A_i\cap R^c)=\frac{1}{2}\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^n x_i\chi_{A_i}\Big)d\mu.$$

推广到一般可积函数 f，则

$$\int_R f d\mu'=\frac{1}{2}\int_\Omega f d\mu,\quad \int_{R^c} f d\mu'=\frac{1}{2}\int_\Omega f d\mu \tag{2.19}$$

命题 3 设 K 是 Banach 空间 X 的可分有界闭凸子集，则存在 $\mathscr{U}(\mathscr{B}(K))$ 到 $\mathscr{B}(K)$ 的可测函数 $\varphi:K\to K\times K$ 使得 $\varphi(x)=(\varphi_0(x),\varphi_1(x))$，

$$\frac{1}{2}(\varphi_0(x)+\varphi_1(x))=x \tag{2.20}$$

并且 $\varphi_0(x)=x$ 当且仅当 $x\in exK$.

证明 仍如命题1的证明一样定义 $\triangle$ 和 D. 已经知道 $h(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)$ 是 $D\to K\backslash exK$ 的连续到上映射，从而对于 $\forall\, x\in K\backslash exK$，$h^{-1}(\{x\})$ 是 D 中的闭集. 若 V 是 D 中的开集，则 V 同胚于 Polish 空间，于是 $h(V)=\{x,h^{-1}(\{x\})\cap V=\varnothing\}$ 是 Souslin 子集，从而是万有可测的. 由命题(ii)，存在 $\mathscr{U}(\mathscr{B}(K\backslash exK))$ 到 $\mathscr{B}(D)$ 的可测函数 $\varphi':K\backslash exK\to D$ 使得对于 $\forall\, x\in K\backslash exK$，$h(\varphi'(x))=x$. 记

$$\varphi'(x)=(\varphi_0'(x),\varphi_1'(x)),\ \forall\, x\in K\backslash exK$$

并且令 $\varphi_0(x)=\varphi_0'(x),x\in K\backslash exK;=x,x\in exK$，同样地，$\varphi_1(x)=\varphi_1'(x),x\in K\backslash exK;=x,x\in exK$. 则 $\varphi(x)=(\varphi_0(x),\varphi_1(x))$ 是 $\mathscr{U}(\mathscr{B}(K))$ 到 $\mathscr{B}(K)$ 的可测函数并且对于 $x\in K\backslash exK$，

$$x=h(\varphi(x))=h(\varphi'(x))=\frac{1}{2}(\varphi_0(x)+\varphi_1(x)).$$

对于 $x\in exK$，$x=\frac{1}{2}(\varphi_0(k)+\varphi_1(x))$ 并且 $\varphi_0(x)=\varphi_1(x))=x$

当且仅当 $x \in exK$，于是命题成立.

定理 5 的证明 设 $\varphi,\varphi_0,\varphi_1$ 如命题 3，Λ 是全体可数序数的集合，$\Omega = \{0,1\}^{\Lambda}$，$\Omega$ 中的每个元可以看成 Ω 上的函数 $\omega(\lambda)$，对于每个 $\lambda \in \Lambda$，$\omega(\lambda)$ 仅可能取 0，1 两个值. 记 $A_\lambda = \{\omega \in \Omega, \omega(\lambda) = 0\}$，由全体 $\{A_\lambda, \lambda \leqslant \Lambda\}$（即全体 Borel 集）生成的万有 σ 代数记为 Σ. 对于每个可数序数 α，由全体 $\{A_\lambda, \lambda \leqslant \alpha\}$ 生成的万有 σ 代数记为 Σ_α，此外记 $\Sigma_0 = \{\varnothing, \Omega\}$，则当 $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ 时，$\Sigma_0 \subset \Sigma_\beta \subset \Sigma_\alpha \subset \Sigma$. 记 μ_λ 是在 $\{0\}$，$\{1\}$ 上各取 $\dfrac{1}{2}$ 的概率测度，令 $\mu = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda$，$\mu$ 是 Σ 上的无原子概率测度. 现在让我们应用超限归纳法构造一个 K 值鞅.

对于 $x_0 \in K$，令 $f_0(\omega) \equiv x_0$ 并且令

$$f_1(\omega) = \varphi_0(f_0(\omega))\chi_{A_1} + \varphi_1(f_0(\omega))\chi_{A_1^c}.$$

若 $A = \varnothing$ 或 $A = \Omega$，则 $\mu(A \cap A_1) = \dfrac{1}{2}\mu(A) = \mu(A \cap A_1^c)$. 所以 $\mu|_{\Sigma_1}$ 是 $\mu|_{\Sigma_0}$ 的分裂测度. 由命题 3 前面的说明

$$\begin{aligned}
\int_A f_1(\omega)d\mu &= \int_A \varphi_0(x_0)\chi_{A_1}d\mu + \int_A \varphi_1(x_0)\chi_{A_1^c}d\mu \\
&= \int_{A\cap A_1} \varphi_0(x_0)d\mu + \int_{A\cap A_1^c} \varphi_1(x_0)d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_A \varphi_0(x_0)d\mu + \frac{1}{2}\int_A \varphi_1(x_0)d\mu \\
&= \int_A x_0 d\mu = \int_A f_0(\omega)d\mu,
\end{aligned}$$

于是 $E(f_1|\Sigma_0) = f_0, a.e.$

现在假设 λ 是一个有限序数并且对于所有 $\beta \leqslant \lambda$，f_β 均已定义，当 $\beta < \lambda$ 时，$E(f_\lambda|\Sigma_\beta) = f_\beta$，我们定义 $f_{\lambda+1}$：令

$$f_{\lambda+1}(\omega) = \varphi_0(f_\lambda(\omega))\chi_{A_{\lambda+1}} + \varphi_1(f_\lambda(\omega))\chi_{A_{\lambda+1}^c} \tag{2.21}$$

则当 $\beta < \alpha$ 时，对于每个 A_β，

$$\mu(A_\beta \cap A_{\lambda+1}) = \frac{1}{2}\mu(A_\beta) = \mu(A_\beta \cap A_{\lambda+1}^c).$$

Σ_β 是由 A_β 生成的万有 σ 代数，所以上式对每个 $A \in \Sigma_\beta$ 都成立，即

$$\mu(A \cap A_{\lambda+1}) = \frac{1}{2}\mu(A) = \mu(A \cap A_{\lambda+1}^c),$$

换句话说，$\mu|\Sigma_{\lambda+1}$ 是 $\mu|\Sigma_\lambda$ 的分裂测度. 从而对于 $A \in \Sigma_\lambda$,

$$\begin{aligned}\int_A f_{\lambda+1} d\mu &= \int_A \varphi_0(f_\lambda(\omega))\chi_{A_{\lambda+1}} d\mu + \int_A \varphi_1(f_\lambda(x))\chi_{A_{\lambda+1}^c} d\mu \\ &= \int_{A\cap A_{\lambda+1}} \varphi_0(f_\lambda(\omega))d\mu + \int_{A\cap A_{\lambda+1}^c} \varphi_1(f_\lambda(\omega))d\mu \\ &= \frac{1}{2}\int_A \varphi_0(f_\lambda(\omega))d\mu + \frac{1}{2}\int_A \varphi_1(f_\lambda(\omega))d\mu \\ &= \int_A f_\lambda(\omega)d\mu,\end{aligned}$$

即 $E(f_{\lambda+1}|\Sigma_\lambda) = f_\lambda, a.e.$

若 λ 是一个极限序数，对于任何 $\alpha < \lambda$，f_λ 均已定义并且当 $\beta < \alpha$ 时，$E(f_\alpha|\Sigma_\beta) = f_\beta$，我们定义 f_λ. 不妨设 α_n 是一列序数 $\alpha_n < \lambda$，$\alpha_n \to \lambda$. 注意 $(f_{\alpha_n}, \Sigma_{\alpha_n}, n \geqslant 1)$ 是一个鞅，f_{α_n} 取值于 K，从而是一致有界的，K 具有 RN 性质，从而有鞅收敛性质. 于是必有 Σ_λ 可测函数 f_λ 使得 $f_{\alpha_n} \to f_\lambda \quad a.e.$ 由鞅性质 f_λ 实际上与 α_n 的选取无关. 我们往证对于任何 $\beta < \alpha$，$E(f_\lambda|\Sigma_\beta) = f_\beta, a.e.$

实际上，对于 $\beta < \alpha_n$，$E(f_{\alpha_n}|\Sigma_\beta) = f_\beta, a.e.$ 若 $A \in \Sigma_\beta$，由有界收敛定理

$$\int_A f_\lambda d\mu = \lim_{\alpha_n > \beta}\int_A f_{\alpha_n} d\mu = \int_A f_\beta d\mu,$$

故所说的结论成立. 以上对于 $\forall \lambda \in \Lambda$，$f_\lambda$ 均已被定义并且 $(f_\lambda, \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ 是 K 值鞅.

现在设 $\psi: K \to R$ 是 K 上定义的严格凸有界连续函数，有界收敛定理以及 f_λ 的序列式定义保证了

$$\xi(\lambda) = \int_\Omega \psi(f_\lambda(\omega))d\mu$$

对于任何 $\lambda \in \Lambda$ 存在. 由 ψ 的凸性，$(\psi(f_\lambda(\omega)), \mathscr{B}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是实值下鞅，所以 $\xi(\lambda)$ 是 λ 的单调增加函数，由于有界性，存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得 $\lambda \geqslant \lambda_0$ 时，$\xi(\lambda) = \xi(\lambda_0)$，即

$$\int_\Omega \psi(f_\lambda(\omega))d\mu = \int_\Omega \psi(f_{\lambda_0}(\omega))d\mu. \tag{2.22}$$

定义 $\eta: K \to R$,

$$\eta(x) = \frac{1}{2}\psi(\varphi_0(x)) + \frac{1}{2}\psi(\varphi_1(x)),$$

这里 φ_0, φ_1 仍如命题 3,显然对于 $\forall x \in K, \eta(x) \geqslant \psi(x)$ 并且等号成立当且仅当 $x \in exK$. 当 $\lambda \geqslant \lambda_0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \psi(f_\lambda(\omega))d\mu &\leqslant \int_\Omega \eta(f_\lambda(\omega))d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \psi(\varphi_0(f_\lambda(\omega)))d\mu + \frac{1}{2}\int_\Omega \psi(\varphi_1(f_\lambda(\omega)))d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_{A_{\lambda+1}} \psi(\varphi_0(f_\lambda(\omega)))d\mu + \frac{1}{2}\int_{A^c_{\lambda+1}} \psi(\varphi_1(f_\lambda(\omega)))d\mu \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{A_{\lambda+1}} \psi(\varphi_0(f_\lambda(\omega)))d\mu + \frac{1}{2}\int_{A^c_{\lambda+1}} \psi(\varphi_1(f_\lambda(\omega)))d\mu \\
&= \int_{A_{\lambda+1}} \psi(f_\lambda(\omega))d\mu + \int_{A^c_{\lambda+1}} \psi(f_\lambda(\omega))d\mu \\
&= \int_\Omega \psi(f_{\lambda+1}(\omega))d\mu = \int_\Omega \psi(f_\lambda(\omega))d\mu,
\end{aligned}$$

最后一步应用到(2.22). 这说明

$$\int_\Omega [\eta(f_\lambda(\omega)) - \psi(f_\lambda(\omega))]d\mu = 0.$$

由于 $\eta(x) \geqslant \psi(x)$,所以 $\eta(f_\lambda(\omega)) = \psi(f_\lambda(\omega))$, $a.e.$,于是 $f_\lambda(\omega) \in exK$. 由(2.21) 和 exK 的定义知道 $f_{\lambda+1}(\omega) = f_\lambda(\omega) \quad a.e.$

若 λ 是一个极限序数,由 f_λ 的序列式定义、通过取极限,上述结果仍然成立,即 $f_\lambda(\omega) \in exK, f_\lambda(\omega) = f_{\lambda_0}(\omega) \quad a.e. \quad (\lambda \geqslant \lambda_0)$

对于 K 的万有可测集 D,定义

$$P_{x_0}(D) = \int_\Omega \chi_D \circ f_{\lambda_0}(\omega)d\mu, \tag{2.23}$$

则 P_{x_0} 是可测空间$(K, \mathscr{U}(\mathscr{B}(D)))$ 上的可数可加测度,特别地取 $D = exK$,则

$$P_{x_0}(exK) = \int_\Omega \chi_{exK} \circ f_{\lambda_0}(\omega)d\mu = \mu(\Omega) = 1 \tag{2.24}$$

P_{x_0} 是概率测度，以 exK 为支撑集. 由于

$$x_0=\int_\Omega f_0(\omega)d\mu=\int_\Omega f_{\lambda_0}(\omega)d\mu,$$

故对于 $\forall\ x^*\in X^*$,

$$x^*(x_0)=\int_\Omega x^*f_{\lambda_0}(\omega)d\mu=\int_{exK}x^*(x)dP_{x_0}(x).$$

§3 共轭空间中的凸集

在第 Ⅱ 章已经证明了，可分共轭空间具有 RN 性质. 而我们知道当 Banach 空间本身可分时，此空间未必具有 RN 性质. 这说明就几何性质而言，共轭空间具有更好的条件. 事实上这一点对于它的子集也是成立的，本节我们叙述那些只有共轭空间中的凸集才具有的性质. 我们将证明对于共轭空间中的凸集，RN 性质等价于 KM 性质；等价于不包含任何 δ 树的性质等.

我们总假定 X^* 是 Banach 空间 X 的共轭空间.

定义 1 设 $K\subset X^*$ 是有界子集，$x^*\in K$ 称为 K 的 w^* 凹点 (w^*-denting point)：若对于 $\forall\ \varepsilon>0$, $x^*\overline{\in}\overline{co}^{w^*}\subset(K\backslash B_\varepsilon(x))$. K 称为是 w^* 可凹的 (w^*-dentable)：若对于 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ x_\varepsilon^*\in K$ 使得 $x_\varepsilon^*\overline{\in}\overline{co}^{w^*}(K\backslash B_\varepsilon(x_\varepsilon))$. 一个集合的每个有界闭凸子集是 w^* 可凹的，则称此集合是子集 w^* 可凹的.

定义 2 设 $K\subset X^*$ 是有界范数闭凸集，称 $x^*\in K$ 是 w^* 强暴露点 (w^*-strongly exposed point)：若存在 $x\in X$, x 作为 X^{**} 中的元强暴露 x^*. 此时记 $x^*\in w^*$-strexpK，记 w^*-$SE(K)$ 是 K 的 w^* 强暴露泛函的全体.

定理 1 设 $K\subset X^*$ 是 w^* 紧凸集，则以下条件等价：

(i) 对于每个 w^* 紧凸子集 $D\subset K$, $D=\overline{co}^{w^*}(w^*\text{-strexp}D)$.

(ii) 对于每个 w^* 紧凸子集 $D\subset K$, $w^*\text{-strexp}D\neq\varnothing$.

(iii) K 是子集 w^* 可凹的.

(iv) K 的每个 w^* 紧凸子集 D 包含有范数直径任意小的 w^* 切片. 即对于 $\forall\ \varepsilon>0$, 存在 $x\in X$ 和 $\alpha>0$, 使得依 X^* 中范数, $\mathrm{diam}S(D,x,\alpha)=\mathrm{diam}\{x^*\in D', x^*(x)>\sup x(D)-\alpha\}<\varepsilon$.

(v) K 的每个非空紧子集包含有范数直径任意小的非空 w^* 相对开集.

(vi) 对于每个范数闭子集 $D\subset K$, 恒等映射 $id:(D,w^*)\to(D,\|\cdot\|)$ 存在连续点.

证明 (i)⇒(ii)显然. (ii)⇒(iii)是由于每个 w^* 强暴露点是 w^* 凹点, 于是 K 的每个子集是 w^* 可凹的. 至于(iii)⟺(iv)可象§2 定理 3 一样去证明.

(iv)⇒(i) 可以仿照§2 定理 1 和定理 2(iv)⇒(iii)的证明, 只须取其中的泛函为 X 中的元, $SE(K)$ 为 w^*-$SE(K)$, $\overline{co}(K)$ 换为 $\overline{co}^{w^*}(K)$, 而 $\mathrm{strexp}(K)$ 换为 w^*-$\mathrm{strexp}(K)$.

(i)⇒(vi) 设 $D\subset K$ 是范数闭集, 记 $D'=\overline{co}^{w^*}(D)$, 取 $x_0^*\in w^*$-$\mathrm{strexp}(D')$(由条件(v), w^*-$\mathrm{strexp}(D')\neq\varnothing$). 不妨设 x_0 在 x_0^* w^* 强暴露 D'. 考虑切片

$$S(D',x_0,\alpha)=\{x^*\in D', x^*(D_0)>M(D',x_0)-\alpha\}$$

($M(D',x_0)=\sup\{x^*(x_0), x^*\in D'\}$). 当 $\alpha>0$ 时, $x_0^*\in S(D',x_0,\alpha)$ 并且根据强暴露点的定义, 当 $\alpha\to 0$ 时, $\mathrm{diam}S(D',x_0,\alpha)\to 0$. 这说明当 $x_n^*\xrightarrow{w^*}x_0^*$ 时必有 $\|x_n^*-x_0^*\|\to 0$, 即 x_0^* 是 $id:(D',w^*)\to(D,\|\cdot\|)$的连续点. 但实际上 $x_0^*\in D$. 否则∃ $\varepsilon>0$ 使得 $B_\varepsilon(x_0^*)\cap D=\varnothing$, 从而对于某个 $\alpha>0$, $S(D',x_0,\alpha)\cap D=\varnothing$, 从而 $x_0^*\overline{\in}\{x^*\in X^*, x^*(x_0)\leqslant M(D',x_0)-\alpha\}$, 后者包含了 D'. 于是 x_0^* 是 $id:(D,w^*)\to(D,\|\cdot\|)$的连续点.

(vi)⇒(v) 注意 w^* 紧凸子集是范数闭集. 若 x_0^* 是 $id:(D,w^*)\to(D,\|\cdot\|)$的连续点, 则 x_0^* 存在 w^* 开邻域, 其直径小于 ε.

(v)⇒(iv) 设 D 是 K 的 w^* 紧凸子集, 令 $A=exD$, $B=\overline{A}^{w^*}$,

由 Krein-Milman 定理，$A\neq\varnothing$. 又 B 为 w^* 紧集，设 V 为(v)中所说的 w^* 开集，$V\cap B\neq\varnothing$，$\mathrm{diam}(V\cap B)<\varepsilon$，从而 $A\cap V\neq\varnothing$. 若 $D_1=\overline{co}^{w^*}(A\cap V)$，$D_2=\overline{co}^{w^*}(B\setminus V)$，则 D_1、D_2 为 w^* 紧集且 $D_1\subset D$，$D=co(D_1\cup D_2)$. 若不然 $exD=A=(A\setminus V)\cup(A\cap V)\subset(B\setminus V)\cup(A\cap V)\subset D_1\cup D_2\subset D$. 此外，$\mathrm{diam}D_1=\mathrm{diam}(B\cap V)<\varepsilon$ 并且 $D\setminus D_2\neq\varnothing$. 否则 $D\subset D_2$，$A=exD\subset B\setminus V$，$A\cap V=\varnothing$，矛盾. 我们证明此时必存在 D 的一个 w^* 切片 J 使 $\mathrm{diam}\ J<\varepsilon$ 且含 D_1 的一点. 设

$D_r=\{x^*,x^*=(1-\lambda)x_1^*+\lambda x_2^*,x_i^*\in D_i,i=1,2,0<r\leqslant\lambda\leqslant 1\}$,

$M=\sup\{\|x^*-y^*\|,x^*\in D,y^*\in D_2\}$

则 D_r 是 w^* 紧凸集，由于 $D_1\subset D$，并且对于$\forall\ r,0<r\leqslant 1$，$D_1\not\subset D_r$，$\mathrm{diam}D_1<\varepsilon$. 选 $r_0>0$ 使 $2r_0M+\mathrm{diam}D_1<\varepsilon$. 对于$\forall\ x^*\in D\setminus D_{r_0}$，则 $x^*\in D\setminus D_{r_0}$，故

$$x^*=(1-\lambda)x_1^*+\lambda x_2^*,\text{其中 } x_i^*\in D_i,0\leqslant\lambda<r_0,$$

所以

$$\|x^*-x_1^*\|=\lambda\|x_1^*-x_2^*\|<\lambda M,$$

$$\mathrm{diam}(D\setminus D_{r_0})\leqslant 2r_0M+\mathrm{diam}D_1<\varepsilon.$$

若 $x^*\in D_1\setminus D_{r_0}$，则 $x^*\in D\setminus D_{r_0}$. Hahn-Banach 定理应用 x^* 和 D_{r_0} 知存在 D 的 w^* 切片 J 包含于 $D\setminus D_{r_0}$. $x^*\in J$ 并且 $x^*\in D_1$.

定理 2 设 $K\subset X^*$ 是 w^* 紧凸集，若 K 是可分的，则 K 是子集 s 可凹的.

证明 设$\{x_n^*,n\geqslant 1\}$是 K 的可数稠密集，$\{x_{n_i},i\geqslant 1\}$是 X 的单位球中的元素使得$\lim\limits_{i\to\infty}x_n^*(x_{n_i})=\|x_n^*\|$. 记 $Y=\overline{\mathrm{span}}\{x_{n_i},i\geqslant 1,n\geqslant 1\}$，定义映射 $id:Y\to X$ 是恒等嵌入映射，考虑共轭映射 id^*：$X^*\to Y^*$. 当限制在 K 上时，id^* 是仿射等距映射，即 $id^*(\alpha x+(1-\alpha)y)=\alpha id^*x+(1-\alpha)id^*y$，$\forall\ x,y\in D,0\leqslant\alpha\leqslant 1$)并且是 w^*-w^* 同胚. 于是我们不妨假设 K 是 Y^* 的 w^* 紧子集并且是范数可分的，同时由于 Y 是可分的，不妨设$\{y_i,i\geqslant 1\}$是 Y 的单位球中的

稠密子集.

若 K 存在子集 D 不是 s 可凹的，则象 § 1 定理 2 证明中所做的可以构造 Lebesgue 测度空间$([0,1),\Sigma,\lambda)$上的 Y^* 值鞅使得

(i) $\{f_n(\omega),n\geqslant 1,\omega\in[0,1)\}$是 D 的可数子集.

(ii) 存在 $\varepsilon>0$,使得 $\| f_{n+1}(\omega)-f_n(\omega)\|\geqslant\varepsilon,t\in[0,1),n\geqslant 1$.
此时对于$\forall\ x^{**}\in X^*$，$\{x^{**}f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1\}$是标量值鞅，从而是 $a.e.$ 收敛鞅，不妨设 $A(x^{**})\subset\Omega,\lambda(A(x^{**}))=0,x^{**}f_n$ 在 $\Omega\backslash A(x^{**})$上点点收敛. 对于每个 y_i，确定这样的集合 $A(y_i)$，$\lambda(A(y_i))=0$，则 $\lambda(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A(y_i))=0$，由于 y_i 在 Y 的单位球中范数稠密，容易知道对于$\forall\ y\in Y$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)y$ 存在，$\omega\in\Omega\backslash\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A(Y_i)$. 由 w^* 紧性，

$$w^*\text{-}\lim_{n\to\infty}f_n(\omega)=f(\omega)\quad a.e.$$

存在. 若改变 f_n 的值使得在例外集$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A(y_i)$上，$f_n(\omega)=a$，$\forall\ n\geqslant 1$，则 f_n 点点 w^* 收敛.

显然，f 的值域是有界集并且是可分的，为了得到 f 的 Bochner 可积性，需要证明 f 的可测性. 现在对于每个 $y\in Y$，由上面证明知道 $f(\omega)y$ 可测，即 $f(\omega)$是 w^* 可测的. 对于任何 w^* 开集 $H\subset X^*$，$f^{-1}(H)\in\Sigma$，同样地对于任何 w^* 闭集 F，$f^{-1}(F)\in\Sigma$. K 可分，故 K 的每个范数开集是 K 的 w^* 紧集的可数并. 这说明对于每个 Borel 开集 B，$f^{-1}(B)\in\Sigma$，可测性得到验证.

因为$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是鞅，并且对于每个 $y\in Y$，$f_n(\omega)y$ $a.e.$ 并且 L_1 收敛到 $f(\omega)y$，由鞅性质，必有 $E(f(\omega)y|\mathscr{B}_n)=f_n(\omega)y$，$\forall\ n\geqslant 1$. 由此不难知道 $E(f|\mathscr{B}_n)=f_n$，从而$(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$是正则鞅，由 Levy 定理 f_n $a.e.$ 收敛，与(ii)矛盾. 这说明 K 必是 s 可凹的.

在叙述下面问题之前，让我们介绍一些基本概念. 一个集合的基数(势)是指它的元素的个数. A 的势记为 $\overline{\overline{A}}$. 对于 Banach 空间 X 中的子集 D，若 D 中有子集 A 使得 $co(A)$在 D 中稠密，则这样的集合中最小的势称为 D 的稠密特征，记为 dens D，即

$$\text{dens } D=\inf\{\overline{\overline{A}}: A\subset X, \overline{co}(A)\supset D\}.$$

Banach 空间的稠密特征是由它的拓扑唯一确定的，显然，X 是可分的当且仅当 dens $X<\omega_1$，其中 ω_1 是第一不可数序数. 对于拓扑向量空间也可以类似地定义稠密特征，不过其中的$\overline{co}(A)$应理解为在相应的拓扑之下的闭凸包.

引理 1 设 X 是 Banach 空间，$D\subset S_P(X)$，后者是 X 的单位球面，ξ 是无穷基数，dens$D\geqslant\xi$，则存在 $M>0$，D 中的网$\{x_\lambda,\lambda<\xi\}$和 X^* 中的网$\{x_\lambda^*,\lambda<\xi\}$使得 $\|x_\lambda^*\|\leqslant M$，$\forall\ \lambda<\xi$，并且对于任何 $\alpha,\beta<\xi$，

$$x_\alpha^*(x_\beta)=\begin{cases}0 & \beta<\alpha,\\ 1 & \beta=\alpha.\end{cases}$$

证明 用超限归纳法. 由于 dens$D\geqslant\xi$，ξ 为无穷序数，故存在 $0<\delta<1$，和子集 $D_0\subset D$，使得 $\overline{\overline{D_0}}\geqslant\xi$ 并且 $\|x-y\|\geqslant\delta$，x,y 为 D_0 中任意两个不同点. 令 $M>\frac{2}{\delta}$，任取 $x_0\in D_0$，则有 $x_0^*\in X^*$ 使得 $x_0^*(x_0)=1$，$\|x_0^*\|<M$，设 $Y_1=\overline{\text{span}}\{x_0\}$，则 dens $Y_1=1<\omega_1$，故 $D_0\backslash Y_0\neq\varnothing$. 取 $x_1\in D_0\backslash Y_0$，$\text{dist}(x_1,Y_1)\geqslant\frac{\delta}{2}$，由 Hahn-Banach 定理，存在 $x_1^*\in X^*$，$x_1^*|_{Y_1}=0$，$x_1^*(x_1)=1$ 并且 $\|x_1^*\|\leqslant\frac{\delta}{2}<M$. 假若 $\lambda<\xi$ 并且$\{x_\alpha,\alpha<\lambda\}\subset D$，$\{x_\alpha^*:\alpha<\lambda\}$均已取定，令 $Y_\lambda=\overline{\text{span}}\{x_\alpha,\alpha<\lambda\}$，则 dens $Y_\lambda\leqslant\lambda<\xi$. 注意以 Y_λ 中每个点为中点，$\frac{\delta}{4}$为半径的球复盖 Y_λ 但不能复盖 D_0. 否则由于 $\xi>\text{dens}Y_\lambda$，D_0 中至少有两个点属于同一个球，于是此两点的距离小于$\frac{\delta}{2}$，这与 D_0 的性质矛盾. 于是 $D_0\backslash Y_\lambda\neq\varnothing$，取 $x_\lambda\in D_0\backslash Y_\lambda$ 且 $\text{dist}(x_\lambda,Y_\lambda)\geqslant\frac{\delta}{2}$，由 Hahn-Banach 定理，存在 $x_\lambda^*\in X^*$，$x_\lambda^*(x_\lambda)=1$，$x_\lambda^*|Y_\lambda=0$ 并且 $\|x_\lambda^*\|\leqslant\frac{2}{\delta}<M$，如此做下去，则$\{x_\lambda:\lambda<\xi\}$，$\{x_\lambda^*,\lambda<\xi\}$满足所要的条件.

定义 3 设 $A\subset X^*$，$x^*\in X^*$，称 x^* 是 A 的 w^* 凝聚点(con-

densation point)，若x^*的每个w^*邻域包含A的不可数无穷多个点.

引理 2 设X是可分 Banach 空间，$A\subset X^*$是有界不可数子集，则除去至多可数多个点之外，A中剩下的点都是A的w^*凝聚点.

证明 X可分，A为有界子集，故X^*上的w^*拓扑是可度量化的. 作为拓扑空间，(A,w^*)满足第二可数公理，于是成为 Lindeloff 空间，引理结论直接从 Lindeloff 空间的性质得到.

定义 4 非空集合序列$\{\Delta_n,n\geqslant 1\}$称为准 Haar 系，若

$$\Delta_n\supset\Delta_{2n}\cup\Delta_{2n+1}\text{并且}\Delta_{2n}\cap\Delta_{2n-1}=\varnothing\quad(n\geqslant 1).$$

若此外有$\Delta_n=\Delta_{2n}\cup\Delta_{2n+1}$，则称$\{\Delta_n,n\geqslant 1\}$为 Haar 系.

现在将引理 1 应用于共轭空间X^*，若$D\subset X^*$，$\mathrm{dens}D\geqslant\omega_1^+$（$\omega_1^+$是第一不可数序数$\omega_1$后面的序数）. 由引理 1 存在$\{x_\lambda^*,\lambda<w_1^+\}\subset X^*$和$\{x_\lambda^{**},\lambda<\omega_1^+\}\subset X^{**}$使得$x_\alpha^{**}(x_\beta^*)=\delta_{\alpha,\beta}\subset(\beta\leqslant\alpha<w)$，$\|x_\alpha^{**}\|\leqslant M$. 记$A=\{x_\lambda^*,\lambda<\omega_1^+\}$，$A$是不可数集.

引理 3 (Stegall) 设X是可分 Banach 空间，$D\subset S_P(X^*)$，$\mathrm{dens}\ D\geqslant\mathrm{dens}\ X$，则存在由$S_P(X^*)\cap\overline{co}^{w^*}(D)$中的$w^*$紧子集构成的 Haar 系$\{\Delta_n,n\geqslant 1\}$和$\{x_n,n\geqslant 1\}\subset X$使得$\|x_n\|\leqslant M$，并且对于一列趋于 0 的正数$\delta_n$，

$$|x^*(x_n)-\chi_{\Delta_n}(x^*)|<\delta_{k+1},2^k\leqslant n<2^{k+1},x^*\in\Delta_1,k\geqslant 1.\qquad(3.1)$$

关于这一引理的构造性证明方法我们不准备在这里叙述，可参看 Diestel，Uhl[1]或者 Stegall[1].

引理 4 设Δ为紧 Hausdorff 空间，$\{\Delta_n,n\geqslant 1\}$是由$\Delta$的紧子集构成的 Haar 系. 则存在在$\Delta$的 Borel 子集上定义的概率测度$\mu$使得$2^k\leqslant n<2^{k+1}$时

$$\mu(\Delta_n)=2^{-k}.\quad(k\geqslant 1)\qquad(3.2)$$

证明 令$Y=\mathrm{span}\{\chi_{\Delta_n},n\geqslant 1\}$并且定义映射$F:Y\to R$使得$F(\chi_{\Delta_n})=2^{-k}(2^k\leqslant n<2^{k+1})$. 此定义是合理的，因为$\chi_{\Delta_{2n}}+\chi_{\Delta_{2n+1}}=$

χ_{Δ_n}. 若 $f\in Y$,则对于充分大的 k,

$$f = \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} d_i \chi_{\Delta_i}, \text{其中 } d_i \in R \tag{3.3}$$

F 是正算子并且 $F(1) = 1$. 此外注意到每个 Δ_i 是 w^* 紧集从而是 w^* 闭集. 所以可以将 Y 视为 $C(\Delta)$ 的子空间,此时 $F \in Y^*$ 且 $\|F\| = F(1) = 1$. 设 $F_1 \in C(\Delta)^*$ 是 F 的保范延拓,则 F_1 也是 $C(\Delta)^*$ 中的正泛函. 由 Riesz 定理,存在概率测度 μ,定义在 Δ 的 Borel 子集上使得对于每个 $f \in C(\Delta)$, $\int f d\mu = F_1(f)$. 特别地

$$\mu(\Delta_n) = F_1(\chi_{\Delta_n}) = 2^{-k}, 2^k \leqslant n < 2^{k+1}, k \geqslant 1$$

引理 5(Bourgin-Huff-Morris)　设 $M > 0$, $\{\delta_k, k \geqslant 1\}$ 是正数序列, $\delta_k \to 0$ 并且 $\sup_k \delta_k = \alpha < \frac{1}{2}$, $\{\Delta_n, n \geqslant 1\}$ 是 X^* 的单位球面上的 w^* 紧凸集构成的 Haar 系, $x_n \in X$, $\|x_n\| < M$,并且

$$|x^*(x_n) - \chi_{\Delta_n}(x^*)| < \delta_k, x^* \in \Delta_1, 2^k \leqslant n < 2^{k+1},$$

则存在有界序列 $\{x_n^*, n \geqslant 1\} \subset \overline{co}^{w^*}(\Delta)$, 满足

(i) $\{x_n^*, n \geqslant 1\}$ 是 δ 树, $\delta = \frac{1-2\alpha}{2M}$.

(ii) 若 $K = \{x^* \in \overline{co}^{w^*}(\Delta), \lim_n x^*(x_n) = 0\}$,则 K 是无端点的非空有界范数闭凸子集.

证明　定义 $e: X \to C(\Delta)$, $e(y)(x^*) = x^*(y)$, $\forall\, y \in X$, $x^* \in \Delta$. 设 μ 是引理 4 中的概率测度,令

$$\mu_n = 2^k \mu|_{\Delta_n} \in C(\Delta)^*, \quad x_n^* = e^*(\mu_n). \forall\, n \geqslant 1.$$

(e^* 为 e 的共轭算子), μ_n 为概率测度.

首先 $x_n \in \overline{co}^{w^*}(\Delta)$. 否则对于某个 $y \in X$,

$$\inf\{x^*(y): x^* \in \Delta\} > x_n^*(y) = e^*(\mu_n)(y)$$
$$= \int_\Delta x^*(y) d\mu_n(x^*) \geqslant \inf\{x^*(y), x^* \in \Delta\},$$

矛盾.

1° $\{x_n^*, n \geqslant 1\}$ 是树. 容易知道

$$x_n^* = e^*(\mu_n) = e^*(\frac{1}{2}\mu_{2n} + \frac{1}{2}\mu_{2n+1}) = \frac{1}{2}x_{2n}^* + \frac{1}{2}x_{2n+1}^*.$$

现在对于 $\alpha = \sup\limits_k \delta_k < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} M\| x_{2n+1}^* - x_n^* \| &\geqslant (x_n^* - x_{2n+1}^*)(x_{2n}) \\ &= e^*(\mu_n)(x_{2n}) - e^*(\mu_{2n+1})(x_{2n}) \\ &= \int_\Delta x^*(x_{2n})d\mu_n(x^*) - \int_\Delta x^*(x_{2n})d\mu_{2n+1}(x^*) \\ &= \frac{1}{2}(\int_\Delta x^*(x_{2n})d\mu_n(x^*) - \int_\Delta x^*(x_{2n})d\mu_{2n+1}(x^*)) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Delta [x^*(x_{2n}) - \chi_{\Delta_{2n}}(x^*)]d\mu_{2n} - \mu_{2n+1})(x^*) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Delta \chi_{\Delta_{2n}}(x^*)d(\mu_{2n} - \mu_{2n+1})(x^*), \end{aligned}$$

由于 $|x^*(x_{2n}) - \chi_{\Delta_{2n}}(x^*)| < \alpha$,故

$$|\frac{1}{2}\int_\Delta [x^*(x_{2n}) - \chi_{\Delta_{2n}}(x^*)]d(\mu_{2n} - \mu_{2n+1})(x^*) \leqslant \alpha,$$

$$\frac{1}{2}\int_\Delta \chi_{\Delta_{2n}}(x^*)d(\mu_{2n} - \mu_{2n+1})(x^*) \leqslant \frac{1}{2}\mu_{2n}(\Delta_{2n}) = \frac{1}{2}.$$

从而

$$\| x_{2n+1}^* - x_n^* \| \geqslant (\frac{1}{2} - \alpha)/M = \frac{1-2\alpha}{2M}.$$

对于 $\| x_{2n}^* - x_n^* \|$ 可以得到同样的估计式.

2° 容易知道 K 为有界凸集. 为了证明 K 是闭的,设 $x^* \in \overline{K}$. 此时 $x^* \in \overline{co}^{w^*}(\Delta)$,只须证明$\lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n) = 0$. 对于 $\forall\ \varepsilon > 0$,取 $y^* \in K$, $\| y^* - x^* \| \leqslant \varepsilon/2M$,又取 n_0,使当 $n \geqslant n_0$ 时,$|y^*(x_n)| < \varepsilon/2$,于是

$$|x^*(x_n)| \leqslant \| y^* - x^* \| \| x_n \| + |y^*(x_n)| < \varepsilon,$$

即 $x^* \in K$.

剩下证明 $K \neq \varnothing$ 并且 $exK = \varnothing$. 仍用 1° 中的映射 $e: X \to C(\Delta)$,当 $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$ 时,

$$\| e(x_n) - \chi_{\Delta_n} \|_\infty < \delta_{k+1}.$$

e 的共轭映射 $e^*:C(\Delta)^* \to X^*$ 为 w^*-w^* 连续的，它将每个点质量 δ_{x^*} 映射为 x^*，若以 $P(\Delta)$ 记 Δ 上的概率测度集合，则

$$e^*(P(\Delta)) = e^*(\overline{co}^{w}\{\delta_{x^*}, x^* \in \Delta\}) = \overline{co}^{w^*}(\Delta).$$

对于 $\nu \in P(\Delta)$，由

$$0 = \lim_n e^*(\nu)(x_n) = \lim_n \int_\Delta e(x_n) d\nu$$

$$= \lim_n \int_\Delta \chi_{\Delta_n} d\nu = \lim_n \nu(\Delta_n)$$

得出 $e^*(\nu) \in K$. 注意由 1°中的证明. $\mathscr{U} = \{\nu \in P(\Delta), \lim_n \nu(\Delta_n) = 0\}$ 非空，且 $P(\Delta) \cap e^{*-1}(K) = \mathscr{U}$，从而 $e^*(\mathscr{U}) = K$.

为了说明 $exK = \varnothing$. 首先证明 $y^*, y_2^* \in \Delta$ 且 $\frac{1}{2}(y_1^* + y_2^*) \in K$ 时，$y_1^*, y_2^* \in K$. 为此设 $\nu_1, \nu_2 \in P(\Delta)$，$e^*(\nu_1) = y_1^*$，$e^*(\nu_2) = y_2^*$，由于 $e^*(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}) \in K$，所以 $\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) \in \mathscr{U}$，即 $\frac{1}{2}(\nu_1(\Delta_n) + \nu_2(\Delta_n)) \to 0 (n \to \infty)$. 此即 $\nu_1, \nu_2 \in \mathscr{U}$. 故 $y_1^*, y_2^* \in K$. 现在若有 $x_0^* \in exK$，由上述论证知道 $x_0^* \in ex(\overline{co}^{w^*}(\Delta))$，从而存在 $\nu_0 \in exP(\Delta)$，$e^*(\nu_0) = x_0^*$.（这是因为 $e^{*-1}(x_0) \cap P(\Delta)$ 是 $P(\Delta)$ 中的端子集. 若 ν_0 是 $e^{*-1}(x_0) \cap P(\Delta)$ 的端点，则 ν_0 满足两个方面的条件）. 由 Krein-Milman 定理，存在 $x^* \in \Delta$，$\nu_0 = \delta_{x^*}$ 但是 $\nu_0 \in \mathscr{U}$. 因为 x^* 属于无穷多个 Δ_n，$\limsup_{n\to\infty} \nu_0(\Delta_n) = 1$. 于是 $e^*(\nu_0) = x_0^* \overline{\in} K$，矛盾.

定理 3 (Stegall-Huff-Morris)　设 $K \subset X^*$ 是 w^* 紧凸子集，则以下条件等价：

(i) K 具有 KM 性质.

(ii) K 具有 RN 性质.

(iii) 对于 X 中的任何可分子空间 Y，$K|_Y = \{x^*|_Y, x^* \in K\}$ 是可分的.

(iv) 对于任何 $\delta > 0$，K 不含 δ 树.

此外，以上四条与定理 1 中(i)－(vi)的任何一条等价.

证明 (i)⇒(ii),(i)⇒(iv)是已知的. 往证(iii)⇒(i). 设 $B=\{x_n^*, n\geqslant 1\}$为 K 中的可数子集,取 X 的单位球中的可数子集 A 使得

$$\sup_{x\in A}(x_i^*(x)-x_j^*(x))=\|x_i^*-x_j^*\|, \quad i,j\geqslant 1$$

并且记 $Y=\overline{\mathrm{span}A}$,$Y$ 为可分的. 由(iii),$K|_Y$ 可分,由于 $K|_Y$ 仍是 w^* 紧凸集,由定义 1,$K|_Y$ 是 s 可凹的. 定义 $id:Y\to X$ 为嵌入映射,则 $id^*:X^*\to Y^*$ 在 B 上的限制是仿射等距,从而 $id^*(B)=B|_Y\subset K|_Y$ 是 s 可凹的. B 自身也是 s 可凹的,更是 c 可凹的. 由关于一般 Banach 空间的结论(见 §1 定理 5(iv))知道 X 具有 RN 性质.

现证(ii)⇒(iii)和(iv)⇒(iii). 先设 $K\subset S_P(X^*)$,若(iii)不成立,则存在 X 的可分子空间 Y,$\mathrm{dens}(K|_Y)>\mathrm{dens}\ Y$. 假设 $D=K|_Y\subset S_P(Y^*)$,D 是 $S_P(Y^*)$的 w^* 紧凸子集. 由引理 3,存在由 $S(Y^*)\bigcap\overline{co}^{w^*}(D)$的 w^* 紧子集构成的 Haar 系$\{\Delta_n', n\geqslant 1\}$和$\{x_n, n\geqslant 1\}\subset Y$,$\|x_n\|\leqslant M$ 使得

$$|x^*(x_n)-\chi_{\Delta_n'}(x^*)|<2^{-(k+3)}, 2^k\leqslant n<2^{k+1}, x^*\in\Delta'.$$

对于每个 n,记 $\Delta_n=\{x^*\in K, x^*|_Y\in\Delta_n'\}$. 可以验证$\{\Delta_n, n\geqslant 1\}$是 K 的 w^* 紧子集构成的 Haar 系并且

$$|x^*(x_n)-\chi_{\Delta_n}(x^*)|<2^{-(k+3)}, 2^k\leqslant n<2^{k+1}, x^*\in\Delta.$$

引理 5(i)说明 K 中含有 δ 树,与(iv)矛盾. 故(iv)⇒(iii)成立. 引理 5(ii)说明 K 包含有子集不具有端点,从而 K 不具有 KM 性质,故(ii)⇒(iii)成立.

为了证明最后的断言,首先若 K 是子集 w^* 可凹的,则对于每个有界子集 D,因为$\overline{co}(D)\subset\overline{co}^{w^*}(D)$,故 w^* 可凹是可凹的,从而 w^* 可凹意味着 K 具有 RN 性质.

反之,由(iii)可推出子集 w^* 可凹. 实际上若设 D 是 C 的 w^* 紧凸子集,$\varepsilon>0$ 使得对于 D 的任何非空相对 w^* 开子集 V,$\mathrm{diam}V>\varepsilon$,则必存在 V 的非空相对 w^* 开子集 V_1,V_2 使得关于某个 $x\in$

$S(X)$，当 $f_1\in \overline{V}_1^{w^*}$，$f_2=\overline{V}_2^{w^*}$ 时，

$$|f_1(x)-f_2(x)|\geqslant\varepsilon/3.$$

令 $W_1=D$，用归纳的办法，可得到非空相对 w^* 开子集列 $\{W_n,n\geqslant1\}$ 和序列 $\{x_n\}\subset S(X)$ 使得

(i) $W_{2n}\cup W_{2n+1}\subset W_n$，

(ii) 若 $f\in \overline{W}_{2n}^{w^*}$，$g\in \overline{W}_{2n+1}^{w^*}$，则 $|f(x_n)-g(x_n)|\geqslant\varepsilon/3$.

令 $Y=\overline{\text{span}}\{x_n,n\geqslant1\}$，$\Delta=\bigcap\limits_{k\geqslant1}\bigcup\limits_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\overline{W}_n^{w^*}$. 则 Δ 至少有连续统的势，Δ 是 C 的子集，设 $\{n_k\}$，$\{m_k\}$ 是互不相同的自然数的增加序列，

$$n_1=m_1=1,n_{k+1}=2n_k \text{ 或 } 2n_k+1,m_{k+1}=2m_k \text{ 或 } 2m_k+1,$$

这种自然数序列的全体有不可数多个，此时

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{W}_{n_k}^{w^*}\neq\varnothing,\quad \bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{W}_{m_k}^{w^*}\neq\varnothing$$

若 $f\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{W}_{n_k}^{w^*}$，$g\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{W}_{m_k}^{w^*}$，则存在 i 使得 $f\in\overline{W}_{2i}^{w^*}$，$g\in\overline{W}_{2i+1}^{w^*}$（或者二者交换），从而 $|f(x_i)-g(x_i)|\geqslant\varepsilon/3$，所以 $\|f|_Y-g|_Y\|\geqslant\varepsilon/3$. $\Delta|_Y$ 包含有不可数子集，它的每两个点都以 $\varepsilon/3$ 范数分离. 于是 $C|_Y\supset\Delta|_Y$ 不是可分的，与(iii)矛盾. 整个定理得证.

推论　设 X 是 Banach 空间，X^* 具有 RN 性质，则

(i) X 的每个可分子空间有可分共轭.

(ii) 若 X 是 w 序列完备的，则 X 是自反的.

(iii) 若 X 可分，则 X^* 可分且仅当 X^* 具有 RN 性质.

(iv) 若 X_0 是 X 的闭子空间，Y 是 Banach 空间，$T:X_0\to Y$ 是到上的有界线性算子，则 Y^* 具有 RN 性质.

注意在第Ⅱ章§4末尾我们得到过(i)的逆.

证明　1°　不妨设 Y 是 X 的可分闭子空间，若 Y^* 不是可分的. 注意 $S(X^*)$ 是 w^* 紧有界闭凸子集并且 $S(Y^*)\subset S(X^*)|_Y$. 现在 $S(Y^*)$ 不是可分的，但由定理 2 得出 $S(X^*)|_Y$ 可分，矛盾.

2°　设 $\{x_n,n\geqslant1\}\subset X$ 是有界序列，令 $Y=\overline{\text{span}}\{x_n,n\geqslant1\}$，则 Y 是 X 的可分子空间，由 1°，Y^* 可分，从而 $\{x_n,n\geqslant1\}$ 在 Y 中有 w-

Cauchy 子序列$\{x_{n_i}, i\geqslant 1\}$. 由 X 的 w 序列完备性知 x_{n_i} 是 w 收敛的从而 $S(X)$ w 紧. 故 X 自反.

3° 必要性显然. 反过来若 X^* 具有 RN 性质, 由于 X 可分, (i)给出 X^* 可分.

4° 对于 X_0 的可分闭子空间 Z. 由定理 2 知 Z^* 可分且具有 RN 性质, 由 1°知 X_0^* 具有 RN 性质. 注意 $X_0/T^{-1}(0)\approx Y$(同构)从而

$$Y^*\approx(X_0/T^{-1}(0))^*=X_0^*/(T^{-1}(0))^{\perp},$$

由第 Ⅱ 章 § 2 定理 7, Y^* 具有 RN 性质.

§ 4 Asplund 空间 树与加权树

关于 Asplund 空间有一套系统的理论, 它与凸分析以及优化理论有着广泛的联系. 这里仅给出 Asplund 空间的一个重要的与 RN 性质有关的结论, 当然这里的处理方式并不是最能展现这类空间的丰富内容的, 却是比较简便的方法.

定义 1 设 $D\subset X$ 是有界集, $\varphi: X\to R$ 是任一函数, φ 称为是在点 $x\in X$ D 可微的: 若存在 $x^*\in X^*$ 使得

$$\lim_{t\to 0+}\sup_{d\in D}\left|\frac{\varphi(x+td)-\varphi(x)}{t}-x^*(d)\right|=0. \tag{4.1}$$

称 x^* 为 φ 在 x 的 D 梯度.

若 D 为 X 的单位球 $S(X)$, 则 φ 在 x D 可微又称为 φ 在 x Frechet 可微. 若 $D=\{d,-d\}$, 则 φ 在 x D 可微即 φ 在 x 沿 d 方向 Gateaux 可微.

定义 2 设 X 为 Banach 空间, 称 X 为 Asplund 空间: 若对于每个连续凸函数 $\varphi: X\to R$, φ 在 X 的稠密 G_δ 集上是 F 可微的.

定义 3 设 $D\subset X$ 为开凸子集, $\varphi: D\to R$ 为连续凸函数, $x_0\in D$, 若存在 $x^*\in X^*$ 使得

$$x^*(y)-x^*(x_0)\leqslant\varphi(y)-\varphi(x_0),\ \forall\ y\in D \tag{4.2}$$

则称 x^* 为 φ 在 x_0 的次梯度. φ 在 x_0 的次梯度全体记为 $\partial\varphi(x_0)$.

这一概念与集值映射,单调算子,变分不等式有紧密联系.

引理 1 若 $D\subset X$ 是开凸集. $\varphi:D\to R$ 为连续凸函数,则 φ 在 D 上是局部 Lipshitz 函数,即对于$\forall$ $x_0\in D$,存在 x_0 的邻域 U_{x_0}和 $M_{x_0}>0$ 使得

$$|\varphi(y)-\varphi(x)|\leqslant M_{x_0}\|y-x\|,x,y\in U_{x_0} \tag{4.3}$$

证明 对于 $x_0\in D$,由连续性,∃ $\delta>0$,使 $\|x-x_0\|<\delta$ 时

$$|\varphi(x)|\leqslant|\varphi(x_0)|+1=M.$$

现在设 $\max\{\|y-x_0\|,\|x-x_0\|\}<\frac{\delta}{4}$ 则 $\|x-y\|<\frac{\delta}{2}$, $\|x\pm\frac{\delta(x-y)}{2\|x-y\|}-x_0\|<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{4}<\delta$ 从而 $|\varphi(x\pm\frac{\delta(x-y)}{2\|x-y\|})|\leqslant M$,由于 $\frac{2}{\delta}\|x-y\|<1$ 并且

$$y=(1-\frac{2}{\delta}\|x-y\|)x+\frac{2}{\delta}\|x-y\|(x-\frac{\delta(x-y)}{2\|x-y\|})$$

由 φ 的凸性

$$\varphi(y)\leqslant(1-\frac{2}{\delta}\|x-y\|)\varphi(x)+\frac{2}{\delta}\|x-y\|\varphi(x-\frac{\delta(x-y)}{2\|x-y\|})$$

$$\varphi(y)-\varphi(x)\leqslant\frac{2}{\delta}\|x-y\|\,|\varphi(x-\frac{\delta(x-y)}{2\|x-y\|})-\varphi(x)|\leqslant\frac{4M}{\delta}\|x-y\|$$

将 x 与 y 调换即得到所要的不等式.

引理 2 设 $\varphi:D\to R$ 为连续凸函数,则 $\partial\varphi:D\to 2^{X^*}$ 是局部有界的. 即对于每个 $x_0\in D$,存在 x_0 的邻域 U_{x_0}和 $M_{x_0}>0$ 使得对于任何 $x\in U_{x_0}$和 $x^*\in\partial\varphi(x)$, $\|x^*\|\leqslant M_{x_0}$.

证明 由引理 1,φ 是局部 Lipshitz 函数,不妨设对于 $x_0\in D$. U_{x_0}和 M_{x_0}能保证(4.3)式成立,则对于任何 $x\in U_{x_0}$和 $x^*\in\partial\varphi(x)$,只要取 δ 足够小,使 $x_0+B_\delta(0)\subset U_{x_0}$,则当 $u\in B_\delta(0)$时

$$y^*(u)\leq\varphi(x+u)-\varphi(x)\leq M_{x_0}\|u\|,$$

于是 $\|y^*\|=\sup\limits_{\|u\|\leq\delta}\frac{1}{\delta}|y^*(u)|\leq\frac{M_{x_0}}{\delta}$.

定理 1 设 X 为 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 是 Asplund 空间.

(ii) X 的每个等价范数在 X 的一个稠 G_δ 集上 Fréchet 可微.

(iii) X 的每个连续半范数在 X 的一个稠 G_δ 集上 Fréchet 可微.

(iv) X^* 具有 RN 性质.

证明 (i)⇒(ii) X 的每个等价范数是 X 上的连续凸函数.

(ii)⇒(iii) 设 p 是 X 上的连续半范数，则存在 $K>0$，使得

$$p(x)\leq K\|x\|,\quad\forall x\in X,$$

令 $|||x|||=p(x)+\|x\|$. 则 $\|x\|\leq|||x|||\leq(K+1)\|x\|$, $|||\cdot|||$ 为等价范数. 由假设 $\|\cdot\|$ 与 $|||\cdot|||$ 均在一个稠 G_δ 集上 Fréchet 可微. 适当改变记号，不妨设 $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ 在同一个 G_δ 集上 Fréchet 可微. 则对于其中每个点 x，记 $x^*_{\|\cdot\|}$ 与 $x^*_{|||\cdot|||}$ 为二者的 Fréchet 导数，由恒等式

$$\begin{aligned}&\frac{|||x+td|||-|||x|||}{t}-x^*_{|||\cdot|||}(d)\\&\quad=\frac{p(x+td)-p(x)}{t}-\left(x^*_{|||\cdot|||}(d)-x^*_{\|\cdot\|}(d)\right)\\&\qquad+\frac{\|x+td\|-\|x\|}{t}-x^*_{\|\cdot\|}(d)\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0+}\sup_{d\in B(X)}\left|\frac{|||x+td|||-|||x|||}{t}-x^*_{|||\cdot|||}(d)\right|\\&=\lim_{t\to 0+}\sup_{d\in B(X)}\left|\frac{\|x+td\|-\|x\|}{t}-x^*_{\|\cdot\|}(d)\right|=0,\end{aligned}\tag{4.4}$$

即 p 在 x 处 Fréchet 可导.

(iii)⇒(iv) 由定理 1，我们证明 X^* 中的每个 w^* 紧凸集 K 有一个 w^* 强暴露点. 设 K 是 w^* 紧凸集. 不妨设 $0\in K$ 并且 K 是

对称的：$K=-K$（否则考虑 $K\cup(-K)$）。设 $p(x)=\sup\{|x^*(x)|, x^*\in K\}$，则 $p(x)$是一个连续半范数. 当 $W=\{x: p(x)\leqslant 1\}$时，$p_W=p$.

令 $J=\overline{co}^{w^*}(w^*\text{-Strexp}\ K)$，则 $J\subset K$. 若 $K\backslash J\neq\varnothing$，取 $x_0\in K\backslash J$. 记 $D=\{x\in X, M(J,x)<M(K,x)\}$，$M(A,x)=\sup\{|x^*(x)|, x^*\in A\}$，则 $D\neq\varnothing$，D 开，实际上取 $y\in B_{\delta/N}(x)$. 其中 $N=\sup\{\|x\|, x\in K\}$，$\delta=\frac{1}{2}(M(K,x)-M(J,x))$则

$$M(K,y)\geqslant M(K,x)-\delta>M(J,x)-\delta\geqslant M(J,y),$$

$y\in D$ 从而 $B_{\delta/N}(x)\subset D$. 由于 $p(x)$的 Fréchet 可微点是 G_δ 稠密集，故∃ $x_0\in D$，$p(x)$在 x_0 有 F 导数 x^*，我们证明 x_0 在 x^* w^*强暴露 K.

实际上，设 W 的极为 W^0. 则 $W^0=K$.（$W^0=({}^0K)^0=\overline{co}^{w^*}(K\cup\{0\})=K$），故存在 $x_0^*\in W^0$，$\langle x_0, x^*\rangle=p(x_0)$，$\langle x_0, y^*\rangle<p(x_0)$，$\forall\ y^*\in W^0$. 从而 x_0 在 x^* w^* 暴露 W^0. 现在若 $x_n^*\in C^0$，$x_n^*(x)\to x^*(x)$，记 $\beta_n=x^*(x)-x_n^*(x)$，则 $\beta_n\to 0$. 因为 $x^*\in W^0$. 对于$\forall\ y$，

$$x^*(y)\leqslant p(x+y)-x_n^*(x)=p(x+y)-p(x)+\beta_n,$$

此时必有 $\|x_n^*-x^*\|\to 0$. 实际上若反设 $\|x_n^*-x^*\|\geqslant\varepsilon>0$，则存在 $z_n\in X$，$\|z_n\|=1$，

$$(x_n^*-x^*)(z_n)>2\varepsilon.$$

由于 x^*是 $p(x)$在 x_0 点的 F 导数，故∃ $\delta>0$，当 $\|d\|\leqslant\delta$ 时，

$$p(x_0+y)-p(x_0)-x^*(d)\leqslant\varepsilon\|d\|.$$

令 $y_n=\delta z_n$，则 $\|y_n\|=\delta$，从而

$$\begin{aligned}2\varepsilon\delta &<(x_n^*-x^*)(y_n)=x_n^*(y_n)-x^*(y_n)\\ &\leqslant p(x_0+y_n)-p(x_0)+\beta_n-x^*(y_n)\leqslant\varepsilon\|y_n\|+\beta_n\end{aligned}$$

由于 $\beta_n\to 0$，则得到 $2\varepsilon\delta\leqslant\varepsilon\delta$，矛盾.

(iv)⇒(i)　若 $f: D\to X$ 是连续凸函数，D 为开集，定义

$V_n(y^*)=\{x\in D$,存在 $V_x\subset D,\partial f(y)\subset y^*+\frac{1}{n}U(x^*),\forall\ y\in V_x\}$,

$$V_n=\bigcup_{y^*\in X^*}V_n(y^*).$$

V_n 是开集,为证 V_n 在 D 中稠密,由引理 2,∂f 映射是局部有界的.即对于 $x\in D$,$\exists\ U_x$ 使

$$A=\{x^*\in X^*,x^*\in\partial f(y),y\in U_x\}$$

是范数有界的.故 $\overline{co}^{w^*}(A)$ 是范数有界并且是 w^* 紧凸集,所以 $\overline{co}^{w^*}(A)$ 有 w^* 强暴露点存在,从而有范数直径任意小的切片.

设 $z\in S(X)$,$\alpha>0$ 并且

$S(\overline{co}^{w^*}(A),z,\alpha)=\{x^*\in\overline{co}^{w^*}(A),x^*(z)\geqslant M(z,A)-\alpha\}$

范数直径 $<\frac{1}{2n}$,其中 $M(z,A)=\sup\{x^*(z),x^*\in A\}$,从而 A 本身的切片有

$$\mathrm{diam}\ S(A,z,\alpha)<\frac{1}{2n}\tag{4.5}$$

并且不为空集.

取 $y_1^*\in S(A,z,\alpha)$,则存在 $x_1\in U_x$ 使得 $y_1^*\in\partial f(x_1)$.对于充分小的 $r>0$ 可使 $x_2=x_1+rz\in U_x$,从而 $\partial f(x_2)\subset S(A,z,\alpha)$,注意作为映射,$\partial f$ 是范数-w^* 上半连续的,所以存在 x_2 的邻域 $U_{x_2}\subset U_x$ 使得

$$\partial f(x)\subset S(A,z,\alpha),\forall\ x\in U_{x_2}.\tag{4.6}$$

由(4.5),(4.6)和 $y_1^*\in S(A,z,\alpha)$ 的事实知道

$$\partial f(x)\subset y_1^*-\frac{1}{n}U(X^*),\forall\ x\in U_{x_2}.\tag{4.7}$$

亦即 $x_2\in V_n(y_1^*)\subset V_n$,又 $\|x_2-x_1\|=r\|z\|$,r 可以任意小,故 V_n 在 D 中稠密.

令 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n$,由于具 Baire 性质空间的开子集仍具有 Baire 性质,所以 C 是稠 G_δ 集.现只须证明当 $x\in C$ 时,$f(x)$ 在 x 点 Fréchet 可微.

对于$\forall\ \varepsilon>0$,取自然数n使$\frac{1}{n}<\varepsilon$. 由于$x\in V_n$,故由上述证明$\exists\ y^*\in X^*$及$\delta>0$使当$\|y\|<\delta$时

$$\partial f(x+y)\subset y^*+\frac{1}{n}U(X^*).$$

取$x^*\in\partial f(x)$,对于任何$z^*\in\partial f(x+y)$则有

$$\|x^*-z^*\|<2/n,$$

并且

$$-z^*(y)=z^*(x-(x+y))\leqslant f(x)-f(x+y),$$

故

$$0\leqslant f(x+y)-f(x)-x^*(y)\leqslant(z^*-x^*)(y)\leqslant\frac{2}{n}\|y\|.$$

这说明$f(x)$在x点有 Fréchet 导数x^*. f的任意性说明X是 Asplund 空间.

定理 2 若 Banach 空间X是 Asplund 空间;则以下空间皆为 Asplund 空间.

(i) 每个闭子空间M.

(ii) 当M为闭子空间时,商空间X/M.

(iii) 当$T:X\to Y$是到上的同胚时,空间Y.

(iv) l_p乘积空间$(\sum_{n=1}^{\infty}\oplus X_n)_{l_p}$,$(1\leqslant p<\infty)$,若$X_n$都是 Asplund 空间.

(v) 空间$L_p(\mu,X)$,$(1<p<\infty)$.

证明 (i) 由于X是 Asplund 空间当且仅当X^*具有 RNP. 为了证明(i),只须注意到$M^*=X^*/M^\perp$,其中$M^\perp$是M的直交补空间. 既然每个取值于X^*的L_1有界鞅$a.e.$收敛. 所以取值于M^*的同样的鞅收敛.

(ii) $(X/M)^*=M^\perp$,$M^\perp$是X^*的闭子空间,X^*具有 RNP,故其子空间$M^\perp$也有 RNP.

(iii),(vi)都容易直接用鞅方法验证.

(v) 当 X^* 具有 RN 性质时，$L_p(\mu,X)^*=L_{p'}(\mu,X^*)(p^{-1}+p'^{-1}=1)$. 由于 X^* 的 RNP 可提升到 $L_p(\mu,X^*)$，故 $L_p(\mu,X)$ 是 Asplund 空间.

现在让我们转到树与加权树. 在第二章中我们已遇到过 δ 树，在上一节甚至看到了在共轭空间中，对于一个有界闭凸集，δ 树的缺乏是 RNP 的特征.

我们把已经得到的两个结论叙述在下面：

1. 设 $K\subset X$ 是有界闭凸子集，若 K 具有无穷 δ 树($\delta>0$)，则 K 不是可凹的.

2. $K\subset X^*$ 是 w^* 紧凸集，则 K 是 w^* 可凹的当且仅当对于任何 $\delta>0$，K 不具有 δ 树.

头一个结论是第 Ⅱ 章中定理的局部化，但是这一结论的逆一般并不成立. Bourgain 与 Rosenthal 于 1980 年构造了一种 Banach 空间，它不具有 RNP，但也不具有任何无穷 δ 树.

若记 $I=\{(n,i)\in N\times N, n\geq 0, 1\leq i\leq 2^n\}$，一个树 B 也可以用二重指标 I 表达成

$$B=\{x_{n,i}:(n,i)\in I\} \text{ 并且 } x_{n,i}=\frac{1}{2}(x_{n+1,2i-1}+x_{n+1,2i}). \tag{4.8}$$

若存在 $\delta>0$ 使得 $\|x_{n+1,2i-1}-x_{n+1,2i}\|>\delta$，称 δ 为 B 的分离常数. 对于每个 n，记 $A_n=\{(n,i), 1\leq i\leq 2^n\}$，称 A_n 为 n 阶指标. 序列 $\{x_{n,i(n)}, n\geq 0\}$(其中 $1\leq i(n)\leq 2^n$)称为树 B 的一个分枝(branch)，若对于每个 n，$i(n+1)=2i(n)-1$ 或 $2i(n)$. 一个分枝称为最终左转的(eventually left turn)，若存在 $n_0\geq 1$，对于每个 $n\geq n_0$，总有 $i(n+1)\geq 2i(n)-1$. B 称为逼近树(approximate tree)，若代替 $x_{n,i}=\frac{1}{2}(x_{n+1,2i-1}+x_{n+1,2i})$，有

$$\left\|x_{n,i}-\frac{1}{2}(x_{n+1,2i-1}+x_{n+1,2i})\right\|<\delta_n, \tag{4.9}$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n<\infty$.

现在来看 Ho 的加权树，设 $K\subset X$ 为子集，由二重指标确定的 $X\times R$ 的子集 $B=\{(x_{n,i},r_{n,i}),(n,i)\in I\}$ 称为一个 K 值加权树 (weighted tree)，若 $x_{n,i}\in K$ 并且

(i) $0\leqslant r_{n,i}\leqslant\frac{1}{2},(n,i)\in I.$

(ii) 对于每个最终左转分支 $(x_{n,i(n)},n\geqslant 1)$，$\sum_{n=0}^{\infty}r_{n,i(n)}=\infty.$

(iii) 对于每个 $(n,i)\in I$，$x_{n,i}=(1-r_{n,i})x_{n+1,2i-1}+r_{n,i}x_{n+1,2i}.$

$$ \tag{4.10}$$

B 称为加权 δ 树 $(\delta>0)$，若对于任何 $(n,i)\in I$ 有

(iv) $\|x_{n+1,2i-1}-x_{n+1,2i}\|>\delta$ (4.11)

由定义容易知道树必是加权树. 类似地还可以定义逼近加权树.

引理 3 设 $K\subset X$ 是有界闭凸子集，若 K 包含有逼近树（逼近加权树），则必含有树（加权树）.

证明 设 B 是具有分离常数 $\delta>0$ 的 K 值逼近树，$\{\delta_n\}$ 的意义如(4.9). 必要时可应用所给树的子树，不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n<\frac{\delta}{2}$，令

$$x_{n,i}^{(k)}=\frac{1}{2^k}\sum_{j=2^k(i-1)+1}^{2^k i}x_{n+k,j}$$

这是 K 中元素的一个凸组合，故 $x_{n,i}^{(k)}\in K$. 又对于任何 $m\geqslant 1$，

$$\begin{aligned}\|x_{n,i}^{(k)}-x_{n,i}^{(k+m)}\|&=\|\frac{1}{2^k}\sum_j x_{n+k,j}-\frac{1}{2^{k+m}}\sum_t x_{n+k+m,t}\|\\&\leqslant\sum_{j=k}^{k+m-1}\delta_{n+j}\end{aligned}\tag{4.12}$$

$\{x_{n,i}^{(k)},k\geqslant 1\}$ 是 Cauchy 序列，不妨设 $y_{n,i}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n,i}^{(k)}$. 则 $y_{n,i}\in K$，对于等式 $x_{n,i}^{(k)}=\frac{1}{2}(x_{n+1,2i-1}^{(k-1)}+x_{n+1,2i}^{(k-1)})$ 两端取极限得到

$$y_{n,i}=\frac{1}{2}(y_{n+1,2i-1}+y_{n-1,2i}),$$

于是$(y_{n,i},(n,i)\in I)$是树. 同样地，由(4.12)，令$m\to\infty$，则

$$\| x_{n,i}^{(k)} - y_{n,i} \| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty}\delta_{n+j} < \frac{\delta}{2},$$

从而

$$\begin{aligned}\| y_{n+1,2i-1} - y_{n+1,2i} \| &\geqslant \| x_{n+1,2i-1}^{(k)} - x_{n+1,2i}^{(k)} \| \\ &\quad - \| x_{n+1,2i-1}^{(k)} - y_{n+1,2i} \| - \| x_{n+1,2i}^{(k)} - y_{n+1,2i} \| \\ &\geqslant \delta - 2\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n = \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

类似地，可以证明逼近加权树的结论.

引理 4 设K是X的单位球$S(X)$中的闭凸子集，$0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，$\{x_i,1\leqslant i\leqslant n\}\subset K$，$t_1\geqslant t_2\geqslant\cdots\geqslant t_n>0$，$\sum_{i=1}^{n}t_i=1$，若$x=\sum_{i=1}^{n}t_ix_i$，$\|x_i-x\|\geqslant\varepsilon(1\leqslant i\leqslant n)$. 则存在正整数$k$和子集$\{y_i,1\leqslant i\leqslant k\}\subset co\{x_i,1\leqslant i\leqslant k\}$，$\{z_i,1\leqslant i\leqslant k\}\subset co\{x_i,1\leqslant i\leqslant k\}$以及正数集合$\{s_i,1\leqslant i\leqslant k\}$，使得对于每个$j$，$1\leqslant j\leqslant k$，

(i) $\| y_i - z_i \| > \frac{\varepsilon}{2}$，

(ii) $y_{i-1} = (1-s_j)y_j + s_jz_j$，(其中$y_0 = x$)

(iii) $\frac{\varepsilon}{9} < \sum_{i=1}^{k}s_j \leqslant \frac{1}{2}$.

证明 若$t_1>\frac{\varepsilon}{9}$. 取$k_1=1$，令$w\triangleq\sum_{i=2}^{n}t_ix_i/1-t_1$，则$x=t_1x_1+(1-t_1)w$并且

$$\| w - x_1 \| = (1-t_1)^{-1}\| x - x_1 \| > \| x - x_1 \| \geqslant \varepsilon.$$

从而当(y_1,z_1)是(x_1,w)或(w,x_1)时，条件(i)成立. 令$s_1=\min\{t_1,1-t_1\}$，由于$t_1>\frac{\varepsilon}{9}$并且$K\subset S(X)$，则

$$1 - t_1 \geqslant \frac{1}{2}(1-t_1) + \| \sum_{i=2}^{n}t_ix_i \|$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\|x_1 - t_1x_1\| + \|x - t_1x_1\|$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\|x - x_1\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

故$\frac{\varepsilon}{9} < t_1 \leqslant \frac{1}{2}$，此时(iii) 成立. 若 $s_1 = t_1$，令 $y_1 = w, z_1 = x_1$，否则有 $s_1 = 1 - t_1$，令 $y_1 = x_1, z_1 = w$，无论哪种情况，(ii) 均满足.

若$t_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{9}$，由于$t_i$单调递减，其和为1，故存在正整数$k < n$，使

$$\frac{\varepsilon}{9} < t_1 + \cdots + t_k \leqslant \frac{2\varepsilon}{9}. \tag{4.13}$$

令 $s_j = t_j / \sum_{i=j}^{n} t_i, (1 \leqslant j \leqslant k)$，则$\sum_{j=1}^{k} s_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} t_i > \frac{\varepsilon}{9}$. 又因为

$$s_j < t_j / \sum_{i=j+1}^{n} t_i = t_j/(1 - \sum_{i=1}^{j} t_i) \leqslant t_j/(1 - \frac{2\varepsilon}{9}) \tag{4.14}$$

$(1 \leqslant j \leqslant k)$，从而

$$\sum_{i=1}^{k} s_i < \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{1 - 2\varepsilon/9} < \frac{2\varepsilon/9}{1 - 2\varepsilon/9} < \frac{1}{2} \tag{4.15}$$

(4.13) 和(4.15) 说明(iii) 成立. 若设 $y_j = \sum_{i=j+1}^{n} t_i x_i / \sum_{i=j+1}^{n} t_i, z_j = x_j \quad (j = 1, \cdots, k)(y_0 = x)$，则

$$y_{j-1} = (1 - s_j)y_j + s_j z_j \tag{4.16}$$

此即(ii). 剩下证明 $\|y_j - z_j\| > \frac{\varepsilon}{2}, (j = 1, 2, \cdots, k)$.

首先(4.16) 表明

$$\|y_{j-1} - y_j\| = s_j\|y_j - z_j\|,$$

故(4.15) 及 $\varepsilon < \frac{1}{2}$ 给出

$$\|x - y_j\| \leqslant \sum_{i=1}^{j} \|y_{i-1} - y_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{j} s_i \|z_i - y_i\|$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{j} s_i \leqslant 2\sum_{i=1}^{j} t_i/(1 - \frac{2\varepsilon}{9}) < \varepsilon/2.$$

于是 $\|y_j - x_j\| \geqslant \|x - x_j\| - \|x - y_j\| > \frac{\varepsilon}{2}$ 故(i) 成立.

定理 3 (Ho)　设 $K\subset X$ 是有界闭凸子集，则 K 不是可凹的当且仅当 K 包含有分离常数大于 0 的加权树.

证明　设 B 为加权树，分离常数 $\delta>0$，$\{r_{n,i}(n,i)\in I\}$ 为权序列，$0\leqslant r_{n,i}\leqslant\frac{1}{2}$，对于其中的每个最终左转分支，$\sum_{n=1}^{\infty}r_{n,i(n)}=\infty$.

若 K 是可凹的，则 B 是可凹的. 对于 $\delta/4$，存在 $x_1\in B$，使得

$$x_1\overline{\in}\overline{co}(B\backslash B_{\delta/4}(x_1))\triangleq D. \tag{4.17}$$

D 是有界闭凸子集，故存在 $\eta>0$，使得 $\mathrm{dist}(B_\eta(x_1),D)>0$. 从而存在 $x^*\in X^*$，$\theta\in R$ 和 $\alpha>0$ 使得

$$x^*(y)<\theta,(\forall\ y\in D),x^*(x_1)>\alpha+\theta.$$

令 $H=\{x\in B,x^*(x)\geqslant\theta\}$，由(4.17)知，$\mathrm{diam}\ H\leqslant\delta/2$. 考虑到 B 的分离常数为 δ，故必有$(n,i)\in I$，

$$x_1=(1-t_{n,i})x_{n+1,2i-1}+t_{n,i}x_{n+1,2i},$$

从而

$$\begin{aligned}\|x_i-x_{n+1,2i}\|&=(1-t_{n,i})\|x_{n+1,2i-1}-x_{n+1,2i}\|\\&\geqslant\delta(1-t_{n,i})\geqslant\frac{1}{2}\delta.\end{aligned}$$

由于 $x_1\in H$ 以及 $\mathrm{diam}\ H\leqslant\frac{\delta}{2}$，所以 $x_{n+1,2i}\in H$，从而 $x^*(x_{n+1,2i})<\theta$. 记 $x_2=x_{n+1,2i-1}$，由于

$$\begin{aligned}\alpha+\theta<x^*(x_1)&=(1-t_{n,i})x^*(x_2)+t_{n,i}x^*(x_{n+1,2i})\\&<(1-t_{n,i})x^*(x_2)+\theta t_{n,i},\end{aligned}$$

所以 $x^*(x_2)>\alpha/(1-t_{n,i})+\theta$，$x_2\in H$. 应用归纳法可得到 $\{x_k\}\subset H$ 并且

$$x^*(x_{k+1})>\alpha/\prod_{m=1}^{\infty}(1-\omega_m)+\theta,$$

这里 $\omega_1=t_{n,i}$，ω_m 是某个 $t_{n+m-1,j}$ 的值，它使得相应地 $x_{n+m-1,j}$ 是沿着 B 的某个最终左转分支. 因为 $\sum_{m=1}^{\infty}\omega_n=\infty$，从而 $\prod_{m=1}^{\infty}(1-\omega_m)=$

0，于是 x^* 在有界集 B 上不是有界的，矛盾说明 K 不是可凹的.

现在证明相反的关系. 假设 K 不是可凹的，不失一般性，假定 $K\subset S(X)$，$0<\delta<1$，则对于每个 $x\in K$，$x\in\overline{co}(K\backslash B_{2\delta}(x))$. 取 $\delta_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n<\frac{\delta}{4}$. 任取 $y\in K$，存在 $x_1,\cdots,x_n\in K\backslash B_{2\delta}(y)$ 使得

$$\|y-\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\|\leqslant\delta_1,\ \sum_{i=1}^{n}t_i=1,t_1\geqslant\cdots\geqslant t_n>0.$$

令 $\bar{y}=\sum_{1}^{n}t_ix_i$，由 $\delta_1<\delta$，我们有

$$\|\bar{y}-x_i\|\geqslant\|y-x_i\|-\|\bar{y}-y\|>\delta,1\leqslant i\leqslant n,$$

$\bar{y},x_1,\cdots x_n$ 满足引理 2 的条件，从而存在 $k<n$，y_i，$z_i\in K$，$s_i>0$，$(1\leqslant i\leqslant k)$ 使得(i)，(ii)，(iii) 成立. 现在令 $x_{0,1}=y$；$x_{1,1}=y_1$，

$$x_{1,2}=z_1,x_{2,1}=y_2,\quad x_{2,2}=z_2\cdots\cdots x_{n,1}=y_n,\quad x_{n,2}=z_n.$$

对于我们要构造的逼近加权树，这里只完整地给出了第 0 阶和第 1 阶. 对于第 2 阶我们还应当构造出 $x_{2,3}$，$x_{2,4}$，对于第 3 阶还应当构造出 $x_{3,3}$，$x_{3,4}$，$\cdots$，$x_{3,8}$，但若重复上述过程并且以 $x_{1,2}$ 代替上面的 y，以 δ_2 代替 δ_1，则又可得到 $x_{2,3}$，$x_{2,4}$，$x_{3,3}$，$x_{3,4}$，$\cdots\cdots$，以 $x_{2,2}$ 代替 y，以 δ_3 代替 δ_2 又可得到 $x_{3,5}$，$x_{3,6}$，$x_{4,5}$，$x_{4,6}$，$\cdots$，依次做下去，这些 $x_{n,i}$ 的全体记为 B. 即是所要的 K 值逼近加权树，以 δ 为分离常数. 再由引理 1 的方法得到以 δ 为分离常数的加权树. 定理得证.

V. Banach 空间的型

型和余型是Banach空间理论中的两个基本的和重要的概念，它与Banach空间的现代理论的多种分支都有着密切的联系.本章首先引进这些概念，介绍经典的Khintchin不等式和Kahane不等式，而后讨论取值于p型和q余型空间的独立增量鞅的不等式和收敛定理. §3应用独立增量鞅的大数定律和中心极限定理刻划Banach空间的型.除了Rademacher型(余型)之外，我们还将讨论Gauss型.最后我们将讨论在泛函分析中饶有兴趣的绝对可和算子与这两个概念的联系.

§1 Rademacher p型与q余型

实值函数序列

$$r_n(t) = \text{sign}\sin 2^n\pi t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,\ n \geqslant 1$$

称为Rademacher函数序列.这一函数序列有一些独特的性质，例如它是定义在$[0,1]$上的规范正交函数序列，特别地，$\{r_n(t), n \geqslant 1\}$是取$\pm 1$值的独立同分布随机变量列并且$P(r_n(t) = \pm 1) = \frac{1}{2}$.此外还可以将它的部分和序列视为一个实值鞅，仔细观察$r_n(t)$的定义还可以知道，对于任何$0 < p < \infty$和$x_1, \cdots, x_n \in X$，

$$\underset{\varepsilon_i = \pm 1}{\text{Ave}} \| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \|_p \triangleq \Big(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \|^p\Big)^{1/p}$$

$$= \Big(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \|^p dt\Big)^{1/p}.$$

让我们先看一下实值情况.

定理 1 (Khintchin)　对于任何 $1 \leqslant p < \infty$,存在正数 A_p, B_p 使得每个实数序列 $\{a_n, n \geqslant 1\}$ 满足

$$A_p\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i\Big|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant B_p\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{1/2}, \qquad (1.1)$$

其中 $n \geqslant 1$ 是任一自然数.

证明　我们先指出一些特殊情况,然后就一般情况给予证明.

$1°$ 若 $p = 2$,根据 $\{r_n(t), n \geqslant 1\}$ 的正交性得到

$$\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i\Big|^2 dt = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad (1.2)$$

此时 $A_2 = B_2 = 1$. 对于(1.1)左边的不等式,若 $p \geqslant 2$,则由(1.2)

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{1/2} = \Big(\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i\Big|^2 dt\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i\Big|^p dt\Big)^{1/p}$$

此时可取 $A_p = 1$. 同样地,对于右边不等式,当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时,

$$\Big(\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i\Big|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i\Big|^2 dt\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{1/2}$$

故可取 $B_p = 1$. 甚至通过取实部和虚部可以知道(1.2)(乃至(1.1))对于复数序列 $\{a_n, n \geqslant 1\}$ 也成立.

此外,对于下面的证明关键的是注意到:为了证明(1.1)左边的不等式,只须证明当 $p = 1$ 时,A_p 存在;为了证明右边的不等式,只须证明对于一列趋于无穷的实数 p_k,B_{p_k} 存在,然后应用 L_p 范数的递增性质得到一般情况. 特别地我们将证明对于每个偶数 p,B_p 存在.

$2°$ 实际上,上述 A_1 存在的命题可以从 B_4 存在的结论中推出来,确切地说 A_1 可取为 B_4^{-2}. 为了简便记 $f(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i$,利用 Hölder 不等式和(1.2),若 B_4 存在则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 |f(t)|^{2/3} (|f(t)|^4)^{1/3} dt$$

$$\leqslant (\int_0^1 |f(t)|dt)^{2/3}(\int_0^1 |f(t)|^4 dt)^{1/3}$$

$$\leqslant (\int_0^1 |f(t)|dt)^{2/3}[B_4(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}]^{4/3}$$

即

$$B_4^{-2}(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2} \leqslant \int_0^1 |f(t)|dt.$$

3° 为了证明在 p 为偶数时，B_p 的存在性，注意在 $\int_0^1 |\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i|^{2k}dt$ 按 $2k$ 次幂的展开式中出现形如 $\int_0^1 r_{n_1}^{k_1} r_{n_2}^{k_2} \cdots r_{n_s}^{k_s} dt$ 的项，除了 $k_i(1 \leqslant i \leqslant s)$ 均为偶数时该项为 1 之外，其余皆为 0. 于是只须计算 k_i 皆为偶数的项的系数之和. 以 $c(2k_1, \cdots, 2k_s)$ 记其中的一项，则

$$c(2k_1, \cdots, 2k_s) = \frac{(2k_1 + \cdots + 2k_s)!}{(2k_1)! \cdots (2k_s)!}$$

并且

$$\int_0^1 |\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i|^{2k}dt = \sum c(2k_1, \cdots, 2k_s)a_{n_1}^{2k_1} \cdots a_{n_s}^{2k_s},$$

其中求和是对于满足 $\sum_{i=1}^s k_i = k$ 的所有 $k_i(1 \leqslant i \leqslant s)$ 和任意 $n_1, \cdots, n_s(1 \leqslant n_i \leqslant n)$ 而取的. 另一方面，

$$[(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}]^{2k} = (\sum_{i=1}^n a_i^2)^k = \Sigma c(k_1, \cdots, k_s)a_{n_1}^{2k_1} \cdots a_{n_s}^{2k_s},$$

其中求和是对于象上面一样的 k_i 和 n_i 进行. 上述两种和数中，只是系数改变了. 由于

$$\frac{c(2k_1, \cdots, 2k_s)}{c(k_1, \cdots, k_s)} \leqslant k^k \tag{1.3}$$

所以

$$(\int_0^1 |\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i|^{2k}dt)^{1/2k} \leqslant k^{1/2}(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2},$$

取 $B_{2k} = \sqrt{k}$ 就能使(1.1)右端成立. 由上面的讨论知道对于任何 $1 \leqslant p < \infty$，(1.1) 成立. 证毕.

定义 设 X 是 Banach 空间，$1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$，

(1) 称 X 是 Rademacher p 型空间(R-p-type)：若存在常数 $B > 0$ 使得对于任何 $n \in N$ 和 $x_1, \cdots, x_n \in X$，

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant B\left(\sum_{i=1}^n \| x_i \|^p\right)^{1/p} \tag{1.4}$$

满足此式的最小常数 B 记为 $T_p(X)$，称 $T_p(X)$ 是 X 的 Rademacher p 型常数.

(2) 称 X 是 Rademacher q 余型空间(R-q-Cotype)：若存在常数 $A > 0$ 使得对于任何 $n \in N$ 和 $x_1, \cdots, x_n \in X$，

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt\right)^{1/2} \geqslant A^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \| x_i \|^q\right)^{1/q}, (2 \leqslant q < \infty)$$

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt\right)^{1/2} \geqslant A^{-1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \| x_i \|, q = \infty \tag{1.5}$$

满足此式的最小常数 A 记为 $C_q(X)$，称之为 X 的 Rademacher q 余型常数.

Rademacher p 型与 q 余型又简称为 p 型和 q 余型.

(1.4)和(1.5)的左端采用 L_2 范数并不是必要的. 下面的引理和定理说明了这一点.

引理 1(Bechner) 设 $1 < p \leqslant q < \infty$，$\gamma = \sqrt{(p-1)/(q-1)}$，则对于任何 $u \geqslant 0$，

$$\left(\frac{|1+\gamma u|^q + |1-\gamma u|^q}{2}\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{|1+u|^p + |1-u|^p}{2}\right)^{1/p} \tag{1.6}$$

证明 由二项式展开定理

$$\frac{1}{2}[(1+\gamma u)^q + (1-\gamma u)^q] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{q}{2k} \gamma^{2k} u^{2k},$$

其中 $\binom{q}{2k}$ 是二项式展开式系数. 特别地，根据 γ 的定义，当 $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ 时计算得出

$$0 < \frac{p}{q}\binom{q}{2k}\gamma^{2k} \leqslant \binom{p}{2k}.$$

于是不等式$(1+t)^s \leqslant 1+st\ (t>0, 0<s\leqslant 1)$给出

$$\left[\frac{|1+\gamma u|^q+|1-\gamma u|^q}{2}\right]^{p/q}=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{2k}\gamma^{2k}u^{2k}\right)^{p/q}$$

$$\leqslant 1+\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{q}{2k}\gamma^{2k}u^{2k}\leqslant 1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{p}{2k}u^{2k}$$

$$=\frac{1}{2}[|1+u|^p+|1-u|^p]$$

即(1.6)对于$0<u\leqslant 1$成立.

当$u>1$时,取$u'=\dfrac{1}{u}$,上述证明表明(1.6)对于u'成立.由于$|1\pm\gamma u|\leqslant|u\pm\gamma|$,所以

$$\left[\frac{|1+\gamma u|^q+|1-\gamma u|^q}{2}\right]^{1/q}\leqslant\left(\frac{|u+\gamma|^q+|u-\gamma|^q}{2}\right)^{1/q}$$

$$=u\left(\frac{|1+\gamma u'|^q+|1-\gamma u'|^q}{2}\right)^{1/q}$$

$$\leqslant u\left(\frac{|1+u'|^p+|1-u'|^p}{2}\right)^{1/p}=\left[\frac{|1+u|^p+|1-u|^p}{2}\right]^{1/p}$$

以上表明,当$1<p\leqslant q\leqslant 2$时,(1.6)对于任何$u>0$成立.

为了证明当$2\leqslant p\leqslant q<\infty$时(1.6)成立,注意由(1.6)两端的齐性,(1.6)成立当且仅当其中的常数1换为任一实数成立.于是(1.6)成立等价于算子$T:L_p[0,1]\to L_p[0,1]$,

$$Tf(s)=\int_0^1 f(t)dt+\gamma\int_0^1 f(t)r_1(t)dt+r_1(s)$$

的有界性.由于$\gamma'=\sqrt{(q'-1)/(p'-1)}=\sqrt{(p-1)/(q-1)}=\gamma^{-1}$,其中$p'=p/(p-1)$,$q'=q/(q-1)$,代替考虑$T$而考虑$T^*:L_{q'}[0,1]\to L_{p'}[0,1]$,上面证明表明$T^*$有界,从而$T$有界.即(1.6)对于$2\leqslant p\leqslant q<\infty$成立.一般情况可由上述两种情况得到.

引理 2 设$1<p\leqslant q<\infty$,$\gamma=\sqrt{(p-1)/(q-1)}$,$X$是任一Banach空间,$x_1,x_2\in X$,则

$$\left(\frac{\|x_1+\gamma x_2\|^q+\|x_1-\gamma x_2\|^q}{2}\right)^{1/q}$$

$$\leqslant \left(\frac{\| x_1 + x_2 \|^p + \| x_1 - x_2 \|^p}{2} \right)^{1/p} \tag{1.7}$$

证明 设 $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_1 - x_2. u_1 = \frac{1}{2}(\| y_1 \| + \| y_2 \|), u_2 = \frac{1}{2}(\| y_1 \| - \| y_2 \|)$，则 $x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$，应用(1.6)于 u_1, u_2，则

$$\left(\frac{\| x_1 + \gamma x_2 \|^q + \| x_1 - \gamma x_2 \|^q}{2} \right)^{1/q}$$

$$= \left(\frac{\| \frac{1+\gamma}{2} y_1 + \frac{1-\gamma}{2} y_2 \|^q + \| \frac{1-\gamma}{2} y_1 + \frac{1+\gamma}{2} y_2 \|^q}{2} \right)^{1/q}$$

$$\leqslant \left(\frac{|u_1 + \gamma u_2|^q + |u_1 - \gamma u_2|^q}{2} \right)^{1/q}$$

$$\leqslant \left(\frac{|u_1 + u_2|^p + |u_1 - u_2|^p}{2} \right)^{1/p}$$

$$= \left(\frac{\| x_1 + x_2 \|^p + \| x_1 - x_2 \|^p}{2} \right)^{1/p}$$

定理 2(Kahane) 设 $1 < s < \infty$，则存在 $K_s > 0$ 使得对于任何 Banach 空间 X 和 $n \in N, x_1, \cdots, x_n \in X$，

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \| dt \leqslant \left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \|^s dt \right)^{1/s}$$

$$\leqslant K_s \int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \| dt. \tag{1.8}$$

证明 左端是显然的. 为了右端我们应用归纳法证明不等式

$$\left(\int_0^1 \| x_0 + \gamma \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \|^q dt \right)^{1/q} \leqslant \left(\int_0^1 \| x_0 + \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \|^p dt \right)^{1/p} \tag{1.9}$$

其中 $1 < p \leqslant q < \infty, \gamma = \sqrt{(p-1)/(q-1)}, x_0, x_1, \cdots, x_n \in X$. 实际上，若(1.9)成立，取 $x_0 = 0$，先应用 Hölder 不等式得出

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \|^s dt \right)^{1/s}$$

$$= \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^{s/(2s-1)} \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^{2s(s-1)/(2s-1)} dt\right)^{1/s}$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\| dt\right)^{1/(2s-1)} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^{2s} dt\right)^{(s-1)/(2s^2-s)}$$

取 $p = s, q = 2s$，对右端第二个因子应用(1.9)，则有

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^{s} dt\right)^{1/s} \leqslant \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{(2s-2)/(2s-1)} \cdot$$

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\| dt\right)^{1/(2s-1)} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^{s} dt\right)^{(2s-2)/(2s^2-s)}$$

从而得到(1.8)的右端并且 $K_s = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{2s-2} \leqslant \left(\frac{2s-1}{s-1}\right)^{s-1}$

现在证明(1.9)．当 $n = 1$ 时，(1.9)即是(1.7)．假设(1.9)对于 n 已经成立，则由 $q/p > 1$ 的事实，

$$\left(\int_0^1 \left\| x_0 + \gamma \sum_{i=1}^{n+1} r_i(t) x_i \right\|^{q} dt\right)^{1/q}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\left\| x_0 + \gamma x_{n+1} + \gamma \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^{q} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\| x_0 - \gamma x_{n+1} + \gamma \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^{q} dt\right]^{1/q}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{1/q}}\left[\left(\int_0^1 \left\| x_0 + \gamma x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^{p} dt\right)^{q/p}\right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left\| x_0 - \gamma x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^{p} dt\right)^{q/p}\right]^{1/q}$$

$$= \left[\frac{\left\| x_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i + \gamma x_{n+1} \right\|_p^q + \left\| x_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i - \gamma x_{n+1} \right\|_p^q}{2}\right]^{1/q}.$$

将 $x_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i$ 与 x_{n+1} 分别视为 $L_p[0,1]$ 中的元，以 $L_p[0,1]$ 作为引理 2 中的空间 X，则上式

$$\leqslant \left[\frac{\left\| x_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i + x_{n+1} \right\|_p^p + \left\| x_0 + \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i - x_{n+1} \right\|_p^p}{2}\right]^{1/p}$$

$$= (\int_0^1 \| x_0 + \sum_{i=1}^{n+1} r_i(t) x_i \|^p dt)^{1/p}$$

于是(1.9)成立. 定理证毕.

推论 设 $1 \leqslant p, q < \infty$，则存在常数 $K_{pq} > 0$，使得对于任何 Banach 空间 X 和 $n \in N, x_1, \cdots, x_n \in X$，

$$(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \|^p dt)^{1/p} \leqslant K_{pq} (\int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \|^q dt)^{1/q}. \quad (1.10)$$

这一不等式当 $p < q$ 时即是通常的 Hölder 不等式.

定理 3 (i) 任何 Banach 空间是 1 型和 ∞ 余型的.

(ii) 若 $1 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant 2$，则 p_2 型空间是 p_1 型的.

(iii) 若 $2 \leqslant q_1 \leqslant q_2 < \infty$，则 q_1 余型空间是 q_2 余型的.

(iv) Hilbert 空间是 2 型和 2 余型的.

(v) 型和余型是同构不变的.

(vi) 型和余型被子空间继承，型还被商空间继承.

(vii) 任何 Banach 空间不具有大于 2 的型和小于 2 的余型.

证明 1° 由于

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \| dt \leqslant \sum_{i=1}^{n} \| x_i \| ,$$

根据 Kahane 不等式得出第一点. 对于每个 $x_j (1 \leqslant j \leqslant n)$，由于

$$\| x_j \| = \| \int_0^1 r_j(t) \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i dt \| \leqslant \int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \| dt,$$

所以

$$\sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \| x_j \| \leqslant \int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \| dt,$$

得到第二点.

2° (ii) 和 (iii) 是由于简单的不等式

$$(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^s)^{1/s} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^t)^{1/t}, 0 < t \leqslant s < \infty.$$

3° 若 X 是 Hilbert 空间，$x_1, \cdots, x_n \in X$，以 (x_i, x_j) 表示 x_i 与 x_j 的内积，由 $r_i(t) (1 \leqslant i \leqslant n)$ 的正交性得到等式

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \|^2 dt = \sum_{i,j=1}^n (x_i, x_j)\int_0^1 r_i(t)r_i(t)r_j(t)dt$$

$$= \sum_{i=1}^n \| x_i \|^2$$

4° (v) 直接由定义得到.

5° 若 X 是 p 型(q 余型)的,由定义可知 X 的每个子空间也是 p 型(q 余型)的并且 p 型(q 余型)常数不会增加. 现在假定 X 是 p 型的,M 是 X 的闭子空间,$\bar{x}, \cdots, \bar{x}_n \in X/M$. 对于 $\forall\ \varepsilon > 0$,取 $x'_i \in \bar{x}_i$ 使得 $\| x'_i \| \leqslant \| \bar{x}_i \| + \varepsilon/2n^{1/p}(1 \leqslant i \leqslant n)$,则

$$(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)\bar{x}_i \|^2 dt)^{1/2} \leqslant (\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)x'_i \|^2 dt)^{1/2}$$

$$\leqslant T_p(X)(\sum_{i=1}^n \| x'_i \|^p)^{1/p}$$

$$\leqslant 2T_p(X)(\sum_{i=1}^n \| \bar{x}_i \|^p)^{1/p} + \varepsilon T_p(X).$$

ε 是任意的,从而 X/M 是 p 型的.

6° 任何非 0 Banach 空间都有与 R 同构的子空间. 为了(vii) 只须说明 R 没有大于 2 的型和小于 2 的余型. 若反设 R 是 p 型的,$p > 2$,或 q 余型的,$1 \leqslant q < 2$,则对于任何,$a_1, \cdots, a_n \in R$,

$$C_p(X)^{-1}(\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{1/q} \leqslant (\int_0^1 | \sum_{i=1}^n r_i(t)a_i |^2 dt)^{1/2}$$

$$\leqslant T_p(X)(\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p}$$

特别地取 $a_1 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{n}$,对于中间部分应用 Khintchin 不等式便得到

$$n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leqslant T_p(X), \qquad n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \leqslant C_p(X)$$

无论哪一个都不能对于充分大的 n 成立. 矛盾. 定理证毕.

定理中的(vii) 说明了我们对于空间的型,限制 $1 \leqslant p \leqslant 2$,对于空间的余型,限制 $2 \leqslant q \leqslant \infty$ 的原因. 定理中的(vi),商空间对

于余型一般不具有继承性，后面例 4 说明了这一点. 此外(iv) 的逆命题成立，这即是 Kwapien 定理，我们将在本章 §5 证明它.

定理 4 (i) 设 $1 \leqslant p < \infty$，则空间 $L_p(\mu)$ 是 $2 \wedge p$ 型的和 $2 \vee p$ 余型的.

(ii) 对于无穷维的 $L_p(\mu)$，没有比 $2 \wedge p$ 更大的型和比 $2 \vee p$ 更小的余型.

(iii) 若 X 是 p 型的，则 X^* 是 q 余型的，其中 X^* 是 X 的共轭空间，$p^{-1} + q^{-1} = 1$.

证明 1° 设 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 并且 $x_1(\omega), \cdots, x_n(\omega) \in L_p(\mu)$，对于几乎所有 ω，

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^p dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^p\right)^{1/p},$$

两端关于 μ 积分得到

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \right\|_p^p dt\right) = \int_0^1\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^p d\mu dt$$

$$\leqslant \int_\Omega \sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^p d\mu = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^p$$

由 Kahane 不等式知道 $L_p(\mu)$ 是 p 型的，并且 $T_p(L_p) \leqslant K_{2p}$，$K_{2p}$ 如同推论中一样.

若 $2 \leqslant p < \infty$，对于几乎所有 ω，由 Kahane 不等式的推论

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^p dt\right)^{1/p} \leqslant K_{p2}\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$= K_{p2}\left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{1/2}$$

于是两端积分得到

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \right\|_p^p dt\right)^{1/p} \leqslant K_{p2}\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{p/2} d\mu\right)^{1/p}$$

$$\leqslant K_{p2}\left[\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{p/2} d\mu\right)^{2/p}\right]^{1/2}$$

$$\leqslant K_{p2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{\Omega}|x_i(\omega)|^p d\mu\Big)^{2/p}\Big)^{1/2}$$

$$= K_{p2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_p^2\Big)^{1/2}$$

这说明 $L_p(\mu)$ 是 2 型的并且 $T_2(L_p)\leqslant K_{p2}$.

现在验证余型. 设 $1\leqslant p\leqslant 2, x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)\in L_p(\mu)$. 由 Kahane 不等式

$$\Big(\int_0^1\Big\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\Big\|_p^p dt\Big)^{1/p} = \Big(\int_0^1\int_{\Omega}\Big|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i(\omega)\Big|^p d\mu dt\Big)^{1/p}$$

$$\geqslant K_{2p}^{-1}\Big(\int_{\Omega}\int_0^1\Big|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i(\omega)\Big|^2 dt\Big)^{p/2}d\mu\Big)^{1/p}$$

$$= K_{2p}^{-1}\Big(\int_{\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i(\omega)|^2\Big)^{p/2}d\mu\Big)^{1/p}$$

$$= K_{2p}^{-1}\Big(\int_{\Omega}\Big(\sum_{i=1}^{n}g_i(\omega)^{2/p}\Big)^{p/2}d\mu\Big)^{1/p}$$

这里 $g_i(\omega)=|x_i(\omega)|^p$,定义 $\|(a_1,\cdots,a_n)\| = \big(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{2/p}\big)^{p/2}$ 并且记 $g(\omega)=(g_1(\omega),\cdots,g_n(\omega))$,则利用不等式

$$\Big\|\int_{\Omega}g(\omega)d\mu\Big\| \leqslant \int_{\Omega}\|g(\omega)\|\,d\mu$$

上面的式子变为

$$\Big(\int_{\Omega}\Big\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\Big\|_p^p d\mu\Big)^{1/p} \geqslant K_{2p}^{-1}\Big(\int_{\Omega}\|g(\omega)\|\,d\mu\Big)^{1/p}$$

$$\geqslant K_{2p}^{-1}\Big\|\int_{\Omega}g(\omega)d\mu\Big\|^{1/p}$$

$$= K_{2p}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{\Omega}g_i(\omega)d\mu\Big)^{2/p}\Big)^{1/2}$$

$$= K_{2p}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_p^2\Big)^{1/2}.$$

所以 $L_p(\omega)$ 是 2 余型的并且 $L_2(L_p)\leqslant K_{2p}$.

对于 $2\leqslant p<\infty, x_1(\omega),\cdots,x_n(\omega)\in L_p(\mu)$,先由 Khintchin 不等式,对于几乎所有 ω,

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^p dt\right)^{1/p} \geqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega)\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{1/2}$$

从而

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\omega) \right\|_p^p dt \geqslant \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^2\right)^{p/2} d\mu\right)^{1/p}$$

$$\geqslant \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |x_i(\omega)|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_p^p\right)^{1/p},$$

这说明 $L_p(\mu)$ 是 p 余型的并且 $C_p(L_p) \leqslant 1$.

2° 为了说明 $L_p(\mu)$ 没有比 $2 \wedge p$ 更大的型，只须考虑 $1 \leqslant p < 2$ 的情况. 由于 $L_p(\mu)$ 中有与 l_p 同构的子空间，我们说明当 $\bar{p} > p$ 时，l_p 不是 $\bar{p}$ 型的. 若不然，取 $x_i = e_i \in l_p$(第 i 个分量为 1，其余为 0)，则由 $\bar{p}$ 型定义

$$n^{1/p} = \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i e_i \right\|_p^2 dt\right)^{1/2} \leqslant T_{\bar{p}}(X)\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_p^{\bar{p}}\right)^{1/\bar{p}}$$

$$= T_{\bar{p}}(X) n^{1/\bar{p}}$$

或者

$$n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\bar{p}}} \leqslant T_{\bar{p}}(X)$$

这是不可能的，至少对于充分大的 n.

对于余型可以类似地论证.

3° 对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $x_1^*, \cdots, x_n^* \in X^*$，取 $x_1, \cdots, x_n \in X$ 使

$$\|x_i\| = 1, \|x_i^*\| \leqslant (1+\varepsilon)|x_i^* x_i|, 1 \leqslant i \leqslant n,$$

此时有

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^q\right)^{1/q} \leqslant (1+\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^n |x_i^* x_i|^q\right)^{1/q}$$

$$= (1+\varepsilon)\sup\left\{\sum_{i=1}^n a_i x_i^* x_i, \sum_{i=1}^n |a_i|^p \leqslant 1\right\}$$

$$= (1+\varepsilon)\sup\left\{\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^n r_i(t)a_i x_i\right)dt, \sum_{i=1}^n |a_i|^p \leqslant 1\right\}$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\sup\{(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i^* \|^q dt)^{1/q}\cdot$$

$$(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)a_i x_i \|^p dt)^{1/p}, \sum_{i=1}^n |a_i|^p \leqslant 1\}$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)T_p K_{q2}(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i^* \|^2 dt)^{1/2},$$

X^* 是 q 余型的.

例 1 由定理 4(i),(ii) 知道,$L_1[0,1]$ 是 2 余型的. 注意此空间不是自反的并且不具有 RN 性质. 此外还存在 2 型的非自反空间的例子. 它是 James 提供的(见 Beauzamy[2]).

例 2 空间 $L_\infty(\mu)$ 是 1 型的和 ∞ 余型的. 对于无穷维的 $L_\infty(\mu)$ 空间,不会有比 1 大的型和比 ∞ 小的余型. 这可直接用定义验证. 从而 $l_\infty, c, C[0,1]$ 都没有大于 1 的型和小于 ∞ 的余型.

例 3 定理 4(iii) 的若干形式的逆不成立. 例如 $l_1 = c_0^*$ 是 2 余型的,但 c_0 没有大于 1 的型. 此外将 X 换为余型,X^* 换为型也不成立. $L_1(\mu)$ 是 2 余型的,但 $L_1(\mu)^* = L_\infty(\mu)$ 仅仅是 1 型的.

例 4 c_0 是 l_1 的商空间,l_1 是 2 余型的,但 c_0 是 ∞ 余型的,所以余型不被商空间继承.

Banach 空间的型和余型指数(即 p 与 q)可以直观地表示为实数轴上的一个区间,例如 $L_p(\mu)$ 的型区间是$[1, 2\wedge p]$,余型区间是$[2\vee p, \infty]$. 一般地我们记

$$p_X = \sup\{p, X \text{ 是 } p \text{ 型的}\},$$
$$q_X = \inf\{p, X \text{ 是 } p \text{ 余型的}\},$$

对于有些 Banach 空间,有可能 p_X 和 q_X 并不是型区间和余型区间的元,即 X 不是 p_X 型或 q_X 余型的. 但是我们今后将会发现,这两个数字有着另外的深刻含义.

在结束本节之前,我们给出 Khintchin 不等式(1.1)中常数 A_p 和 B_p 的估计. 容易知道,当 p 增加时,A_p, B_p 是不减的,下面定理给出了它们变化的限度.

引理 3 设$(f_n,\mathscr{B}_n)$是定义在概率空间(Ω,Σ,P)上的实值鞅，$\{d_n\}$是相应的鞅差序列，即$d_n = f_n - f_{n-1}(n \geqslant 1)$，特别地$f_0 = Ef_1,\mathscr{B}_0 = \{\varnothing,\Omega\}$. 若$d_n \in L_\infty$并且$\Delta^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \| d_n \|_\infty^2 < \infty$，则对于任何$\lambda \geqslant 0$，

$$P(|f_n - Ef_1| \geqslant \lambda) \leqslant 2e^{-\lambda^2/4\Delta^2} \tag{1.11}$$

证明 对于任何$\lambda \in R$，我们有

$$e^\lambda \leqslant \lambda + e^{\lambda^2}.$$

于是当$t \in R$时，由鞅性质

$$E(e^{td_i} | \mathscr{B}_{i-1}) \leqslant E(td_i | \mathscr{B}_{i-1}) + E(e^{t^2 d_i^2} | \mathscr{B}_{i-1}) \leqslant e^{t^2 \| d_i \|_\infty^2}$$

从而

$$\begin{aligned} Ee^{t\sum\limits_{j=1}^{i} d_j} &= E[E(e^{t\sum\limits_{j=1}^{i} d_j} | \mathscr{B}_{i-1})] = Ee^{t\sum\limits_{j=1}^{i-1} d_j} E(e^{td_i} | \mathscr{B}_{i-1}) \\ &\leqslant Ee^{t\sum\limits_{j=1}^{i-1} d_j} e^{t^2 \| d_i \|_\infty^2}. \end{aligned}$$

另一方面，当$t > 0$时有

$$\begin{aligned} P(f_n - Ef_1 \geqslant \lambda) &= P(\sum_{j=1}^{n} d_j \geqslant \lambda) = P(e^{t\sum\limits_{j=1}^{n} d_j - t\lambda} \geqslant 1) \\ &\leqslant Ee^{t\sum\limits_{j=1}^{n} d_j - t\lambda} \leqslant e^{t^2 \sum\limits_{j=1}^{n} \| d_j \|_\infty^2 - t\lambda}. \end{aligned}$$

特别地，取$t = \lambda/2\Delta^2$，则

$$P(f_n - Ef_1 \geqslant \lambda) \leqslant e^{-\lambda^2/4\Delta^2}.$$

类似地，

$$P(Ef_1 - f_n \geqslant \lambda) \leqslant e^{-\lambda^2/4\Delta^2}.$$

以上两式合起来即(1.11).

定理 5 Khintchin 不等式(1.1)中的系数A_p,B_p满足：$B_p \leqslant \sqrt{p}M < \infty, 0 < K \leqslant A_p \leqslant M < \infty (1 \leqslant p < \infty)$，$K,M$是常数.

证明 不妨设$a_n \in R$并且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1$. 此时$\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i r_i(t), n \geqslant 1\}$是定义在$[0,1]$上的鞅并且满足$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| d_n \|_\infty^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1$. 由引理

3，对于任何 $\lambda \geqslant 0$，

$$P(|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)| \geqslant \lambda) \leqslant 2e^{-\lambda^2/4} \tag{1.12}$$

因此

$$\int_0^1 |\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)|^p dt = p\int_0^1 \lambda^{p-1} P(|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)| > \lambda) d\lambda$$

$$\leqslant 2p\int_0^{\infty} \lambda^{p-1} e^{-\lambda^2/4} d\lambda \triangleq B_p^p < \infty.$$

实际上容易计算出 $B_p^p = 2^p p\Gamma(\frac{p}{2})$，由 Γ 函数的性质得出 $B_p/\sqrt{p} \leqslant c$. 并且此不等式对于 $p \geqslant 2$ 均成立. 另一方面，若 $2 \leqslant p < \infty$，则

$$1 = (\int_0^1 |\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)|^2 dt)^{1/2} \leqslant (\int_0^1 |\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)|^p dt)^{1/p} \leqslant B_p$$

对于一般的 $a_i \in R$，由于(1.1) 式各部分表达式的齐性得到

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2} \leqslant (\int_0^1 |\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)|^p dt)^{1/p} \leqslant B_p (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2}$$

即对于 $2 \leqslant p < \infty, A_p = 1$.

对于 $p = 1$，在定理 1 的证明中我们已得出 $A_1 = B_4^{-2}$，从而

$$B_4^{-2} \leqslant \int_0^1 |\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)| dt \leqslant (\int_0^1 |\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)|^p dt)^{1/p}$$

$$\leqslant (\int_0^1 (\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)|^2 dt)^{1/2} = 1,$$

即当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时，$A_p = B_4^{-2}, B_p = 1$.

§2 独立增量鞅

由 Rademacher 函数构成的鞅$(\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i, n \geqslant 1)$是独立增量鞅的特殊情况，本节我们叙述一般独立增量鞅. 我们将先讨论独立增量鞅的一般性质，以独立增量鞅的不等式给出 p 型和 q 余型的

刻划.

设(Ω,Σ,P)是概率空间,f,g是两个取值于可分Banach空间X的可测函数.我们称f,g是同分布的,若对于X中的任何Borel集(或等价地,任何开集)B,

$$P(\omega,f(\omega)\in B)=P(\omega,g(\omega)\in B).$$

f与g同分布,记为$f\backsim g$,有时称一个是另一个的拷贝(copy).容易知道,对于两个同分布的函数f和g,则关于任一使积分有意义的函数Φ,$E\Phi(f)=E\Phi(g)$.若$-f\backsim f$,则称f是对称的.称序列$f=(d_n)$是对称的,若对于乘积空间$\prod_{n=1}^{\infty}X_n$和乘积σ代数$\prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$,$f\backsim f'$,其中$f'$是任一序列$(\varepsilon_n d_n)$,这是$\varepsilon_n$任取$\pm 1$值.

显然,若每个d_n是对称的并且$f=(d_n)$是独立序列(任意两组互不相同的元素独立),则f本身是对称序列.

我们补充定义

$L_0(\mu,X)=\{f,f$是X值可测函数$\}$,

$$\|f\|_0=E\frac{\|f(\omega)\|}{1+\|f(\omega)\|}.$$

$$L_p(\mu,X)=\{f\in L_0(\mu,X),\|f\|_p=E\|f(\omega)\|^p<\infty\},\quad 0<p<1.$$

容易验证,$L_p(\mu,X)$,$(0\leqslant p<1)$都是Frechet空间.

特别地,对于$L_0(\mu,X)$中的元素序列$\{f_n,n\geqslant 1\}$,f_n在$L_0(\mu,X)$中收敛于f,则对于任何$\varepsilon>0$,$P(\|f_n-f\|>\varepsilon)\to 0\ (n\to\infty)$.换句话说,$\|f_n-f\|_0\to o$当且仅当$f_n$依概率收敛于$f$.称$L_0(\mu,X)$的子集$K$是随机有界的,若对于任何$\varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使得关于$K$中的$f$一致地有$\|\delta f\|_0<\varepsilon$.这等价于对于任何$\varepsilon>0$,$\exists\ M>0$,使得在$K$上一致地有$P(\|f\|>M)<\varepsilon$.

在概念的使用上,本节以及本章剩下的几节与其它各章不同的一点是,我们称$L_0(\mu,X)$中的每个可测函数是一个随机变量.而且我们总是假定X是可分Banach空间.

我们仍记$f_n^*(\omega)=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|f_i(\omega)\|$,$f^*(\omega)=\sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n(\omega)\|$.

定理 1 设$\{d_n,n\geqslant 1\}$是对称$R.V.$序列，$f_n=\sum_{i=1}^{n}d_i$，则对于$\forall\ t\geqslant 0$，

$$P(f_n^*>t)\leqslant 2P(\|f_n\|>t) \tag{2.1}$$

若f_n依概率收敛于f，则

$$P(f^*>t)\leqslant P(\|f\|>t). \tag{2.2}$$

证明 设$\tau=\inf\{i,\|f_i\|>t\}$，$(\inf\varnothing=n+1)$，记

$$f_n=f_i+(d_{i+1}+\cdots+d_n),$$
$$f'_n=f_i-(d_{i+1}+\cdots+d_n),$$

则在集合$\{\tau=i\}$上，

$$\|f_n\|+\|f'_n\|\geqslant\|f_n+f'_n\|=2\|f_i\|>2t$$

于是当$i\leqslant n$时，

$$\{\tau=i\}\subset\{\|f_n\|+\|f'_n\|>2t\}.$$

$\{d_n,n\geqslant 1\}$是对称的，f_n与f'_n有相同分布，从而

$$\begin{aligned}P(f_n^*>t)&=P(\tau\leqslant n)\leqslant P(\|f_n\|+\|f'_n\|>2t)\\&\leqslant P(\max\{\|f_n\|,\|f'_n\|\}>t)\\&\leqslant 2P(\|f_n\|>t).\end{aligned}$$

当f_n依概率收敛于f时，令$n\to\infty$时(2.1)两端取极限，注意

$$\lim_{n\to\infty}P(\|f_n\|>t)=P(\|f\|>t) \tag{2.3}$$

得到(2.2).

定理 2(Levy) 设$\{d_n,n\geqslant 1\}$是对称$R.V.$序列.$f_n=\sum_{i=1}^{n}d_i$，则f_n依概率收敛当且仅当$f_n\,a.e.$收敛.f_n随机有界当且仅当$f_n\,a.e.$有界.当$\{f_n,n\geqslant 1\}$有一个子序列依概率收敛或随机有界时，结论仍成立.

证明 若$A\in\Sigma$，$P(A)>0$，对于$\forall\ \omega\in A$，$f_n(\omega)$不收敛.则存在$\delta>0$，对于$\forall\ n$，

$$P(\sup_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|>\delta)\geqslant P(A)>0.$$

由(2.2)则

$$P(A) \leqslant P(\sup_{m \geqslant n} \| f_m - f_n \| > \delta) \leqslant 2P(\| f_\infty - f_n \| > \delta).$$

其中 f_∞ 是 f_n 依概率收敛的极限. 后者当 n 充分大时,其值可任意小,于是导致矛盾.

若 f_n 随机有界,即对于 $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ K > 0$,使得对于 $\forall\ n \geqslant 1$, $P(\| f_n \| > M) < \varepsilon$,则由(2.1)

$$P(\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \| f_i \| > M) < 2P(\| f_n \| > M) < 2\varepsilon$$

n 是任意的,故 $P(f^* > M) < 2\varepsilon$,取 $\varepsilon_k \downarrow 0$ 则有 $M_k \uparrow \infty$ 使得 $P(f^* > M_k) < \varepsilon_k$,于是

$$P(f^* = \infty) \leqslant P(f^* > M_k) < \varepsilon_k \downarrow 0.$$

即 $P(f^* < \infty) = 1$. 上述过程是可逆的,故可从 $P(f^* < \infty) = 1$ 推出 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 随机有界. 对于子序列的情况可类似证明.

定理 3(Kahane)　设 $\{d_n, n \geqslant 1\}$ 是独立 $R.V.$ 序列, $f_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$,则 f_n 依概率收敛当且仅当 f_n $a.e.$ 收敛, f_n 随机有界当且仅当 f_n $a.e.$ 有界.

证明　取 d_n 的独立 copy d'_n,令 $D_n(\omega, \omega') = d_n(\omega) - d'_n(\omega')$. (称 D_n 是 d_n 的对称化),容易验证 D_n 确是 $(\Omega \times \Omega, \Sigma \times \Sigma, P \times P)$ 上的对称 $R.V.$,并且 $\{D_n, n \geqslant 1\}$ 是独立 $R.V.$ 序列. 现在应用定理 2 于 $F_n = \sum_{i=1}^{n} D_i$,由于 f_n 依概率收敛,故 F_n 依概率收敛. 从而 F_n $P \times P$ $a.e.$ 收敛,对于几乎所有 $\omega' \in \Omega$, $\sum_{n=1}^{\infty}(d_n(\omega) - d_n(\omega'))$ P-$a.e.$ 收敛. 取 ω'_0 使 $\sum_{n=1}^{\infty}(d_n(\omega) - d_n(\omega'_0))$ $a.e.$ 收敛,由于 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(\omega)$ 依概率收敛,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(\omega'_0)$ 依概率收敛. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(\omega'_0)$ 是常数级数,于是 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(\omega'_0)$ 收敛. 由此

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty}(d_n(\omega) - d_n(\omega'_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(\omega'_0)$$

$a.e.$ 收敛.

类似地证明得出关于随机有界的结论.

定理 4(Hoffmann—Jørgensen)　设$\{d_n, n \geqslant 1\}$是独立 $R.V.$ 序列,

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} d_i, \quad d^* = \sup_{n \geqslant 1} \| d_n \|, \quad f^* = \sup_{n \geqslant 1} \| f_n \|$$

若 $0 < p < \infty$ 并且$\{f_n, n \geqslant 1\}$是随机有界的,则以下条件等价:

(i) $d^* \in L_p$,

(ii) $f^* \in L_p$

(iii) $\sup_{n \geqslant 1} \| f_n \|_p < \infty$.

证明　为证明(i)⇒(ii),先假定$\{d_n, n \geqslant 1\}$是对称的.注意由定理 2 和 f_n 的随机有界性得到 $f^* < \infty$ $a.e.$,现在设

$$\tau = \inf\{n, \| f_n \| > a\},$$

对于 $a > 0, b > 0$, $\{\| f_k \| > 2a + b\} \subset \{\tau \leqslant k\}$ 并且当 $\tau = j$ 时,若 $\omega \in \{\| f_k \| > 2a + b\}$,则

$$\| f_k - f_j \| \geqslant \| f_k \| - \| f_{j-1} \| - \| d_j \| \geqslant a + b - d^*.$$

利用$\{d_n, n \geqslant 1\}$的独立性得到

$$P(\| f_k \| > 2a + b) = \sum_{j=1}^{k} P(\tau = j, \| f_k \| > 2a + b)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} P(\tau = j, \| f_k - f_j \| > a + b - d^*)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} [P(\tau = j, d^* > b) + P(\tau = j, \| f_k - f_j \| > a)]$$

$$\leqslant P(d^* > b) + \sum_{j=1}^{k} P(\tau = j) P(\| f_k - f_j \| > a) \tag{2.4}$$

应于(2.1)于 f_j 和 $f_k - f_j$ 可知 $P(\| f_k - f_j \| > a) \leqslant 2P(\| f_k \| > a)$,从而(2.4)变为

$$P(\| f_k \| > 2a + b)$$

$$\leqslant P(d^* > b) + 2P(\| f_k \| > a) \sum_{j=1}^{k} P(\tau = j)$$

$$\leqslant P(d^* > b) + 2P(\| f_k \| > a)P(\max_{1\leqslant i<k} \| f_i \| > a)$$
$$\leqslant P(d^* > b) + 4[P(\| f_k \| > a)]^2.$$

由(2.2)可知

$$P(f^* > 2a + b) \leqslant 2P(d^* > b) + 8[P(f^* > a)]^2.$$

特别地取 $a = b$ 并且取 $a_0 > 0$ 使得 $P(f^* > a_0) \leqslant \frac{1}{16 \cdot 3^p}$ 则当 $A \geqslant 3a_0$ 时,

$$\begin{aligned}
E(f^*)^p &= 3^p p \int_0^\infty a^{p-1} P(f^* > 3a) da \\
&= \lim_{A\to\infty} 3^p p \int_0^A a^{p-1} P(f^* > 3a) da \\
&= \lim_{A\to\infty} 2 \cdot 3^p p \int_0^A a^{p-1} P(d^* > a) da \\
&\quad + \lim_{A\to\infty} 8 \cdot 3^p p \int_0^A a^{p-1} [P(f^* > a)]^2 da \\
&= 2 \cdot 3^p E(d^*)^p + 8 \cdot 3^p p \int_0^{3a_0} a^{p-1} P(f^* > a) da \\
&\quad + \lim_{A\to\infty} 8 \cdot 3^p p \int_{3a_0}^A a^{p-1} [P(f^* > a]^2 da \\
&= 2 \cdot 3^p E(d^*)^p + c \\
&\quad + 8 \cdot 3^p p \int_{3a_0}^\infty a^{p-1} P(f^* > a_0) P(f^* > a) da \\
&= 2 \cdot 3^P E(d^*)^p + c + \frac{8 \cdot 3^p}{16 \cdot 3^p} E(f^*)^p
\end{aligned}$$

从而

$$E(f^*)^p \leqslant 4 \cdot 3^p E(d^*)^p + 2c$$

由此得到(ii).

(ii)⇒(iii) 和(ii)⇒(i) 是显然的. 剩下只须证明(iii)⇒(ii). 实际上(2.1)意味着

$$P(f^* > a) \leqslant 2 \liminf_{n\to\infty} P(\| f_n \| > a) \qquad (2.5)$$

由 Fatou 引理即得到

$$E(f^*)^p = \int_0^\infty P(f^* > a) da^p \leqslant 2 \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty P(\| f_n \| > a) da^p$$

$$= 2\liminf_{n\to\infty} \| f_n \|_p^p \leqslant 2\sup_{n\geqslant 1} \| f_n \|_p^p < \infty. \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

或者类似地

$$\| f^* \|_p = E(f^*)^p \leqslant 2\liminf_{n\to\infty} E \| f_n \|^p$$

$$\leqslant 2\sup_{n\geqslant 1} \| f_n \|_p < \infty \quad (0 < p < 1).$$

现在除去$\{d_n, n \geqslant 1\}$对称的假设. 若$D_n = d_n - d'_n$是d_n的对称化,令$f'_n = \sum_{i=1}^{n} d'_n$,$F_n = f_n - f'_n$,类似地定义$D^*$,$F^*$,则当$d^* \in L_p$时,$D^* \in L_p$. 上述证明说明了$F^* \in L_p(\Omega \times \Omega')$. 从而对于几乎所有$\omega' \in \Omega'$,$\sup\limits_{n\geqslant 1} \| f_n(\omega) - f'_n(\omega') \| \in L_p(\Omega)$,$\{f'_n(\omega'), n \geqslant 1\}$是随机有界的,故可取$\omega'_0$使得$\sup\limits_{n\geqslant 1} \| f'_n(\omega'_0) \| < \infty$,从而

$$\sup_{n\geqslant 1} \| f_n(\omega) \|^p \leqslant 2^p (\sup_{n\geqslant 1} \| f_n(\omega) - f'_n(\omega'_0) \|^p$$

$$+ \sup_{n\geqslant 1} \| f'_n(\omega'_0) \|^p) < \infty \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

或者

$$\sup_{n\geqslant 1} \| f_n(\omega) \|^p \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \| f_n(\omega) - f'_n(\omega'_0) \|^p$$

$$+ \sup_{n\geqslant 1} \| f'_n(\omega'_0) \|^p < \infty \quad (0 < p < 1)$$

两边积分得出所要的结论.

推论 1 设$\{d_n, n \geqslant 1\}$是独立$R.V.$序列,$f_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$,若f_n依概率收敛于f,$0 < p < \infty$,则下面论述等价:

(i) $f \in L_p$.

(ii) $f^* \in L_p$.

(iii) $d^* \in L_p$.

(iv) $\sup\limits_{n\geqslant 1} \| f_n \|_p < \infty$.

(v) $\| f_n - f \|_p \to 0 (n \to \infty)$.

此外,$\| f \| \in L_\infty$当且仅当$f^* \in L_\infty$.

证明 由定理3,f_n $a.e.$收敛,从而f_n $a.e.$有界或随机有界. 从而由定理4,(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv). 由(2.2)知(i)$\Rightarrow$(ii)成立. 由f_n的

$a.e.$ 收敛性和 $\|f_n - f\|^p \leqslant 2^p(f^*)^p$;Lebesgue 控制收敛定理说明(ii)⇒(v) 成立. 剩下证明(v)⇒(i).

当 $p \geqslant 1$ 时,(v) 到(i) 是已知的,对于 $0 < p < 1$,由

$$\|f\|^p \leqslant \|f_n - f\|^p + \|f_n\|^p$$

同样得到(v)⇒(i). 最后(2.2) 保证了 $\|f\| \in L_\infty$ 时,$f^* \in L_\infty$.

命题 1 设 $\{\xi_n\}$ 是独立 $R.V.$ 序列,$0 < p < \infty$,$\xi^* = \sup\limits_{n \geqslant 1} \|\xi_n\| < \infty$ $a.e.$ 则

(i) 对于 $\forall\, a > 0$,

$$P(\xi^* \leqslant a)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{\|\xi_n\| > a\}} \|\xi_n\|^p dP \leqslant E(\xi^*)^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} E\|\xi_n\|^p \tag{2.6}$$

(ii) $E(\xi^*)^p < \infty$ 当且仅当存在 $a > 0$,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\|\xi_n\|^p \chi_{\{\|\xi_n\| > a\}} < \infty$$

(iii) $\xi^* < \infty$ $a.e.$ 当且仅当存在 $a > 0$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\|\xi^*\| > a) < \infty.$$

证明 1° 右端是显然的. 为证左端,定义 $\tau = \inf\{n, \|\xi_n\| > a\}$,则由于 $\forall\, n$, $\|\xi_n\|^p \leqslant (\xi^*)^p$,

$$E(\xi^*)^p \geqslant E\|\xi_\tau\|^p \chi_{\{\tau < \infty\}} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{\tau = n\}} \|\xi_n\|^p dP$$

但 $\{\tau = n\} = \{\xi_{n-1}^* \leqslant a\} \cap \{\|\xi_n\| > a\}$,所以由独立性

$$\begin{aligned}\int_{\{\tau=n\}} \|\xi_n\|^p dP &= \int_{\{\xi_{n-1}^* \leqslant a\} \cap \{\|\xi_n\| > a\}} \|\xi_n\|^p dP \\ &= \int_{\{\|\xi_n\| > a\}} \chi_{\{\xi_{n-1}^* \leqslant a\}} \|\xi_n\|^p dP \\ &= P(\xi_{n-1}^* \leqslant a)\int_{\{\|\xi_n\| > a\}} \|\xi_n\|^p dP \\ &\geqslant P(\xi_{n-1}^* \leqslant a)\int_{\{\|\xi_n\| > a\}} \|\xi_n\|^p dP\end{aligned}$$

代入上式知道(2.6) 成立.

2° 若 $E(\xi^*)^p<\infty$，取 $a>0$ 使得 $P(\xi^*>a)<1/2$. 则(2.6)的左端说明

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\|\xi_n\|^p\chi_{\{\|\xi_n\|>a\}}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{\|\xi_n\|>a\}}\|\xi_n\|^p dP\leqslant 2E(\xi^*)^p<\infty$$

反过来，若 $\sum_{n=1}^{\infty}E\|\xi_n\|^p\chi_{\{\|\xi_n\|>a\}}<\infty$，则

$$\begin{aligned}E(\xi^*)^p&=\int_0^a P(\xi^*>t)dt^p+\int_a^{\infty}P(\xi^*>t)dt^p\\&\leqslant a^p+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{\infty}P(\|\xi_n\|>t)dt^p\\&=a^p+\sum_{n=1}^{\infty}E\|\xi_n\|^p\chi_{\{\|\xi_n\|>a\}}<\infty\end{aligned}$$

3° 在上述证明中都将 $\|\xi_n\|^p$ 换为 1，即得出所要的结论.

定理 5(Kahane，**压缩原理**) 设 $\{d_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 是 p 可积独立 $R.V.$ 序列并且每个 $Ed_i=0$，$1\leqslant p<\infty$，则对于 $\forall\ a_i\in R$，$|a_i|\leqslant 1$，

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_id_i\right\|_p\leqslant 2\left\|\sum_{i=1}^{n}d_i\right\|_p. \tag{2.7}$$

若每个 d_i 还是对称的，则上面系数可以是 1.

证明 我们首先证明，若 f,g 是任何两个独立 $R.V.$，$f,g\in L_p(\mu,X)$，$1\leqslant p<\infty$，$Ef=0$，则

$$\|g\|_p\leqslant\|f+g\|_p \tag{2.8}$$

实际上，若 g 是简单函数，$g=\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{A_i}$，$x_i\in X$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则 $E(f|\sigma(g))=Ef=0$，于是

$$\|x_i\|^p=\|E(x_i+f|\sigma(g))\|^p\leqslant E(\|x_i+f\|^p|\sigma(g)),$$

$$\begin{aligned}E\|g\|^p&=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\mu(A_i)=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}\|x_i\|^p d\mu\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}E(\|x_i+f\|^p|\sigma(g))d\mu\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} \| x_i + f \|^p d\mu = E \| g + f \|^p$$

对于一般的 g,可由简单函数在 $L_p(\mu,X)$ 中的稠密性得到.

现在,对于任何 $\sigma \subset \{1,\cdots,n\}$,连续使用(2.8)得出

$$\| \sum_{i \in \sigma} d_i \|_p \leqslant \| \sum_{i=1}^{n} d_i \|_p$$

若 $a_i = \pm 1, i = 1,\cdots,n$,令 $\sigma^+ = \{i, 1 \leqslant i \leqslant n, a_i = 1\}, \sigma^- = \{i, 1 \leqslant i \leqslant n, a_i = -1\}$,则由上式

$$\| \sum_{i=1}^{n} a_i d_i \|_p \leqslant \| \sum_{i \in \sigma^+} d_i \|_p + \| \sum_{i \in \sigma^-} d_i \|_p \leqslant 2 \| \sum_{i=1}^{n} d_i \|_p.$$

记 $K_n = \{(a_1,\cdots,a_n) \in R^n, |a_i| \leqslant 1, i = 1,\cdots,n\}$,则 K_n 是 R^n 中的紧凸集,它有 2^n 个端点$(\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)$. 对于任何 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in K_n$,由 Caratheodory 定理,$a$ 是至多 $n+1$ 个端点的凸组合,不妨设

$$a_i = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j a_{ij}, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1,$$

这里 $a_{ij} = \pm 1$,从而

$$\begin{aligned} \| \sum_{i=1}^{n} a_i d_i \|_p &= \| \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_i) \|_p \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \| \sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_i \|_p \leqslant 2 \| \sum_{i=1}^{n} d_i \|_p. \end{aligned}$$

若 d_i 是对称的$(1 \leqslant i \leqslant n)$,$a_i = \pm 1$,则

$$\| \sum_{i=1}^{n} a_i d_i \|_p = \| \sum_{i=1}^{n} d_i \|_p \qquad (2.9)$$

再由以上论证得出所要的结论.

推论 2 若$\{d_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$是独立 $R.V.$ 序列,$Ed_i = 0$ 并且 $0 \leqslant |\alpha_i| \leqslant |\beta_i|, 1 \leqslant i \leqslant n$,则

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i \|_p \leqslant 2 \| \sum_{i=1}^{n} \beta_i d_i \|_p. \qquad (2.10)$$

若 d_i 是对称的,则系数 2 可换为 1.

推论 3 设 $1 \leqslant p < \infty$，若 $\{d_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是相互独立的 $R.V.$ 序列，$Ed_i = 0$，$\{\xi_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是实值 $R.V$ 并且 $\xi_i \in L_p$，若 $\{\xi_i\}$ 与 $\{d_i\}$ 彼此独立，则

$$2^{-p}E(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|^p)E \| \sum_{i=1}^n d_i \|^p \leqslant E \| \sum_{i=1}^n \xi_i d_i \|^p$$

$$\leqslant 2^p E(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|^p)E \| \sum_{i=1}^n d_i \|^p \tag{2.11}$$

若 $\{\xi_i\}$，$\{d_i\}$ 都是对称的，则上述系数可换为 1，$E(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|^p)$ 可换为 $(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} E|\xi_i|^p)$.

证明 为明确起见，将 ξ_i 所在的概率空间记为 (Ω', Σ', P'). 由推论 2 和 Fubini 定理

$$E \| \sum_{i=1}^n \xi_i d_i \|^p = \int_{\Omega'}\int_{\Omega} \| \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega')d_i(\omega) \|^p dPdP'$$

$$\leqslant \int_{\Omega} (2^p \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i(\omega')|^p)E \| \sum_{i=1}^n d_i \|^p dP'$$

$$= 2^p E(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i(\omega')|^p)E \| \sum_{i=1}^n d_i \|^p.$$

类似地得到左边不等式.

若 $\{\xi_i\}$ 与 $\{d_i\}$ 均对称，则 $\sum_{i=1}^n \xi_i d_i$ 与 $\sum_{i=1}^n |\xi_i|(r_i d_i)$ 同分布，从而

$$E \| \sum_{i=1}^n \xi_i d_i \|^p = \int_{\Omega'}\int_{\Omega} \| \sum_{i=1}^n |\xi_i(\omega')| r_i(\omega) d_i(\omega) \|^p dPdP'$$

$$\geqslant \int_{\Omega} \| \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^n |\xi_i(\omega')| r_i(\omega) d_i(\omega) dP' \|^p dP$$

$$= \int_{\Omega} \| \sum_{i=1}^n E|\xi_i| d_i(\omega) \|^p dP \tag{2.12}$$

再由推论 2 得出最后的结论.

定理 6 (Hoffmann—Jørgensen) 设 X 是可分线性赋范空间，$1 \leqslant p < \infty$. $\{d_n\}$ 是相互独立的 $L^p(P, X)$ 中 $R.V.$ 序列，$\{\xi_n\}$，$\{\eta_n\}$ 是两个实值 L_p 可积 $R.V.$ 序列，$\{\xi_n\}$ 与 $\{d_n\}$，$\{\eta_n\}$ 与 $\{d_n\}$ 分别

独立，并且

(i) $E\xi_n d_n = E\eta_n d_n = 0 \quad (n \geqslant 1)$,

(ii) $E(\sup_{n\geqslant 1}|\xi_n|)^p < \infty$,

(iii) $a = \inf_{n\geqslant 1}|\eta_n| > 0$,

则

$$E\| \sum_{i=1}^{n}\xi_i d_i \|^p \leqslant \left(\frac{8}{a}\right)^p E(\sup_{n\geqslant 1}|\xi_n|^p)E\| \sum_{i=1}^{n}\eta_i d_i \|^p \tag{2.13}$$

证明 取和 $\{\xi_n\}$，$\{\eta_n\}$，$\{d_n\}$ 都独立的 Rademacher 函数列 $\{r_n\}$，则推论 2 说明

$$E\| \sum_{k=1}^{n}\xi_k d_k \|^p \leqslant 2^p E\| \sum_{i=1}^{n} r_k\xi_k d_k \|^p$$

$$\leqslant 4^p E(\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k|)^p E\| \sum_{k=1}^{n} r_k d_k \|^p$$

记 $a_k = E|\eta_k|$，则 $a_k > 0$，从而由压缩原理

$$E\| \sum_{k=1}^{n} r_k d_k \|^p \leqslant a^{-p} E\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k d_k \|^p, \tag{2.14}$$

若 $\mathscr{B}$ 表示由 $r_1,\cdots,r_n,d_1,\cdots,d_n$ 生成的 σ 代数，定义

$$\varepsilon_k^* = \mathrm{sign}\eta_k \qquad (\mathrm{sign}0 = 0)$$

则由独立性和 Jensen 不等式

$$\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k d_k \|^p = \| E\Big(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k| r_k d_k | \mathscr{B}\Big) \|^p$$

$$\leqslant E\Big(\| \sum_{k=1}^{n} |\eta_k| r_k d_k \|^p | \mathscr{B}\Big)$$

$$= E\Big(\| \sum_{k=1}^{n} \eta_k \varepsilon_k^* r_k d_k \|^p | \mathscr{B}\Big)$$

于是(2.14)变为

$$E\| \sum_{k=1}^{n} r_k d_k \|^p \leqslant E\| \sum_{k=1}^{n} \eta_k\varepsilon_k^* r_k d_k \|^p$$

此时 $\{\varepsilon_k^* r_k\}$ 仍与 $\{\eta_k\}$，$\{d_k\}$ 独立. 故再由推论 2 即得出(2.13).

推论 4 若定理 6 中(i)，(ii)，(iii) 满足，$S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k d_k, T_n =$

$\sum_{k=1}^{n}\eta_k d_k$，若 T_n L_p 有界（L_p 收敛），则 S_n 也 L_p 有界（L_p 收敛）.

我们记 Banach 空间 X 中的无穷序列 $\{x_n\}$ 为 $(x_n)\in X^\infty$，$\{r_n(t)\}$ 仍为 Rademacher 函数序列，然后考虑下面几种序列空间：

$$l_p(X)=\{x=(x_n)\in X^\infty,\|x\|_p=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\Big)^{1/p}<\infty\},$$

$$l_\infty(X)=\{x=(x_n)\in X^\infty,\|x\|_p=\sup_{n\geq 1}\|x_n\|<\infty\},$$

$$c_0(X)=\{x=(x_n)\in X^\infty,x_n\to 0,\|x\|=\|x\|_\infty\},$$

$$c_r(X)=\{x=(x_n)\in X^\infty,\sum_{i=1}^{n}r_ix_i\quad a.e.\text{收敛}\},$$

$$B_r(X)=\{x=(x_n)\in X^\infty,\sum_{i=1}^{n}r_ix_i\quad a.e.\text{有界}\}.$$

直接验证可知 $l_p(X)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 是 Banach 空间，$c_0(X)$ 是 $l_\infty(X)$ 的闭子空间. 此外，下面命题可以从定理 4 及其推论得到.

命题 2　若 $1\leqslant p<\infty$，则

(i) $(x_n)\in B_r(X)\Leftrightarrow\{\sum_{i=1}^{n}r_ix_i,n\geqslant 1\}$ 是 $L_p(P,X)$ 有界的.

(ii) $(x_n)\in c_r(X)\Leftrightarrow\{\sum_{i=1}^{n}r_ix_i,n\geqslant 1\}$ 是 $L_p(P,X)$ 收敛的.

(iii) $l_1(X)\subset c_r(X)\subset B_r(X)\subset l_\infty(X)$.

(iv) $c_r(X)\subset c_0(X)$.

由命题中的(i)，(ii)，我们对于 $x\in c_r(X)$ 和 $x\in B_r(X)$，定义

$$\|x\|_p=\sup_{n\geqslant 1}\|\sum_{i=1}^{n}r_ix_i\|_p.\qquad(1\leqslant p<\infty)$$

同样可以验证，$c_r(X)$，$B_r(X)$ 是 Banach 空间. 由 §1 定理 2，对于所有这样的 p，范数 $\|\cdot\|_p$ 是彼此等价的.

定理 7(Hoffmann－Jørgensen，Pisier)　设 X 是 Banach 空间，则下面条件等价：

(i) $B_r(X)\subset c_0(X)$，

(ii) $B_r(X)\subset c_r(X)$，

(iii) 对于任何 X 值对称 $R.V.$ 序列 $\{d_n, n \geqslant 1\}$，若 $f_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$ $a.e.$ 有界，则 f_n $a.e.$ 收敛.

(iv) 对于任何 X 值独立 $R.V.$ 序列 $\{d_n, n \geqslant 1\}$，若 $f_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$ $a.e.$ 有界，则 f_n 本性收敛，即存在 $x_n \in X$，使得 $\sum_{i=1}^{n}(d_i - x_i)$ $a.e.$ 收敛.

(v) X 不包含与 c_0 同构的子空间（这里 $c_0 = c_0(R)$）.

证明　(i)⇒(ii)　若有 $x = (x_n) \in B_r(X) \setminus c_r(X)$，则 $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ 是 P-$a.e.$ 有界但不是 $a.e.$ 收敛的. 由定理 4，$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ 不是 L_1 中的 Cauchy 序列. 从而存在 $0 = n_0 < n_k \uparrow \infty$ 和 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$E \left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} r_i x_i \right\| = \int_0^1 \left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} r_i x_i \right\| dt > \varepsilon_0 \qquad (2.15)$$

$(k \geqslant 1)$. 记 $d_k = \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} r_i x_i$，则 $\{d_k, k \geqslant 1\}$ 是对称独立 $R.V.$ 序列并且若 $f_k = \sum_{i=1}^{k} d_i$，则

$$f^* = \sup_{k \geqslant 1} \left\| \sum_{i=1}^{k} d_i \right\| \leqslant \sup_{k \geqslant 1} \left\| \sum_{i=1}^{k} r_i x_i \right\| \triangleq M < \infty \ a.e.$$

后者是由于 $(x_n) \in B_r(X)$. 从而 $\{\sum_{i=1}^{n} d_i, n \geqslant 1\}$ $a.e.$ 有界. 再由对称性

$$\sup_{k \geqslant 1} \left\| \sum_{i=1}^{k} r_i d_i \right\| \leqslant \sup_{k \geqslant 1} \left\| \sum_{i=1}^{k} d_i \right\| < \infty \ a.e.$$

即 $(d_k) \in B_r(X)$ $a.e.$ 另一方面，将定理 4 应用于 $\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i, n \geqslant 1\}$ 知道 $EM < \infty$，从而 $Ed^* \leqslant 2Ef^* < 2EM < \infty$. 若 $d_k \to 0$ $a.e.$ 则由 Lebesgue 控制收敛定理，$E\|d_k\| \to 0$. 但 (2.15) 说明 $E\|d_k\| \geqslant$

$\varepsilon_0 > 0$,故至少在某个正测度集合上,$d_k(t) \nrightarrow 0$,即

$$P((d_k) \in B_r(X) \setminus c_o(X)) > 0,$$

与(i)矛盾.

(ii)⇒(iii) 若$\{d_n, n \geq 1\}$是概率空间(Ω, Σ, P)上的对称$R.V.$序列,当f_n $a.e.$有界时,上面的证明表明$\{d_n, n \geq 1\} \in B_r(X)$, $a.e.$,由(ii)知道$\{d_n, n \geq 1\} \in c_r(X) a.e.$,再由对称性知道$\{\sum_{i=1}^{n} d_i, n \geq 1\} a.e.$收敛.

(ii)⇒(iv) 由定理3和定理4的证明容易知道,$\{\sum_{i=1}^{r} d_i, n \geq 1\}$本性收敛当且仅当其对称化序列的部分和$\sum_{i=1}^{n} D_i \triangleq \sum_{i=1}^{n} (d_i(\omega) - d'_i(\omega'))a.e.$收敛.于是当(iii)成立时,(iv)成立.

(iv)⇒(v) 若T是c_0与X的子空间之间的同构,$\{e_n\}$是c_o的标准基,$x_n = Te_n$,则$x_n \to 0 \Leftrightarrow e_n \to 0$.现在对于$n \geq 1$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \right\| = \left\| T\left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i \right) \right\| \leqslant \| T \| \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i e_i \right\|_{c_o} = \| T \|.$$

$\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i, n \geq 1\}$是独立增量$R.V.$序列并且$a.e.$有界,由(iv),它是本性收敛的.由$\{r_i\}$的对称性知道必$a.e.$收敛.从而$x_n \to 0$.但$e_n \nrightarrow 0$.矛盾.

(v)⇒(i) 若X不包含与c_0同构的子空间,Kwapien的一个定理说明$L_1(P, X)$也不包含与c_0同构的子空间.现在设$\{x_n\} \in B_r(X)$,则$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i a.e.$有界.定理4保证了$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$是$L_1(P, X)$有界的.若以$d_i$记$r_i x_i$,则

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i d_i \right\|_1 = \sup_{n \geq 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \right\|_1 < \infty$$

由第1章§5引理2知道$\sum_{i=1}^{n} d_i$在$L_1(P, X)$中无条件收敛.从而

$\| x_n \| \to 0$,即$\{x_n\} \in c_0(X)$. 证毕.

定理 8(Hoffmann—Jørgensen,Pisier) 设 X 是 Banach 空间,$1 \leqslant p \leqslant 2$,则以下条件等价:

(i) $l_p(X) \subset B_r(X)$.

(ii) $l_p(X) \subset c_r(X)$.

(iii) X 是 p 型的,即存在$C > 0$,使得对于$\forall\ x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$E \| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \|^p \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p, n \geqslant 1. \tag{2.16}$$

(iv) 存在 $C > 0$ 使得对于任何零均值独立 X 值 $R.V.\ d_1, \cdots, d_n$,

$$E \| \sum_{i=1}^{n} d_i \|^p \leqslant C \sum_{i=1}^{n} E \| d_i \|^p, n \geqslant 1 \tag{2.17}$$

证明 (iv)⇒(iii)⇒(ii)⇒(i) 是容易得到的,剩下我们证明(i)⇒(iii)⇒(iv) 成立.

为了(i)⇒(iii),我们考虑 $l_p(X)$ 上的两种范数,除了上面定义的 $\| \cdot \|_p$ 之外,将定理 7 前面定义的记为 $\| \cdot \|_{(p)}$. 考虑恒等算子 $I:(l_p(X), \| \cdot \|_p) \to (l_p(X), \| \cdot \|_{(p)})$. 由(i) 知道此种定义是合理的. 为了证明 I 是有界的,考虑序列 $x^{(k)} = (x_n^{(k)}) \in l_p(X)$,若 $\| x^{(k)} \|_p \to 0$, $\| x^{(k)} - x \|_{(p)} \to 0$,前者表明每个 $x_n^{(k)} \to 0 (k \to \infty)$,若 $x = (x_n)$,后者说明

$$\sup_{m \geqslant 1} E \| \sum_{n=1}^{m} r_n (x_n^{(k)} - x_n) \|^p \to 0 \quad (k \to \infty)$$

从而 $x_n^{(k)} \to x_n = 0\ (n \geqslant 1)$,即 $x = 0$. 根据闭图象定理,I 是有界算子. 记 $C = \| I \|$. 则 $\| Ix \|_{(p)} \leqslant C \| x \|_p$,即(2.16) 成立,

为证(iii)⇒(iv),注意当(iii) 成立时,若 d_i 是在概率空间(Ω, Σ, P) 上定义,则对于几乎所有 $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) d_i(\omega) \|^p dt \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \| d_i(\omega) \|^p$$

两端积分,则由 Fubini 定理

$$\int_0^1\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n r_i(t)d_i(\omega) \|^p dPdt$$

$$= \int_\Omega\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)d_i(\omega) \|^p dtdP \leqslant C\sum_{i=1}^n E\| d_i \|^p$$

由 $Ed_i = 0$，应用定理 5，对于每个固定的 t，

$$\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n r_i r_i d_i \|^p dP \leqslant 2\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n r_i d_i \|^p dP,$$

从而

$$\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n d_i \|^p dP \leqslant 2\int_0^1\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n r_i d_i \|^p dPdt \leqslant 2C\sum_{i=1}^n E\| d_i \|^p,$$

此即(2.17)

定理 9(Pisier)　设 X 是Banach空间，$1\leqslant p\leqslant 2$，则以下条件等价：

(i)　X 是 p 型空间，

(ii)　存在 $C>0$，使得任何取值于 X 的独立同分布零均值 R.V. 序列 $\{d_n\}$ 满足

$$E\| \sum_{i=1}^n d_i \| \leqslant Cn^{1/p}(E\| d_1 \|^p)^{1/p} \tag{2.18}$$

证明　(i)⇒(ii) 显然可由定理 8 得到.

(ii)⇒(i)　我们证明在此条件下，定理 8 的(iii) 成立. 实际上由 Kahane 定理只须证明(2.16) 左端指数为 1 时成立.

取(0,1]上的函数 $u_j = \chi_{A_j^{(1)}} - \chi_{A_j^{(2)}}$，$j = 1,\cdots,n$. 其中 $A_j^{(1)} = \left(\frac{2j-2}{2n},\frac{2j-1}{2n}\right]$，$A_j^{(2)} = \left(\frac{2j-1}{2n},\frac{2j}{2n}\right]$，并令 $u = (u_1,\cdots,u_n)$，对于概率空间(Ω,Σ,P)，取 u 的独立 Copy

$$\eta_i = (\eta_i^{(1)},\cdots,\eta_i^{(n)}) \qquad i = 1,\cdots,n$$

并且令

$$d_i = \sum_{j=1}^n \eta_i^{(j)} x_j$$

则 $d_1,\cdots,d_n$ 独立同分布并且可计算出 $E\| d_i \|^p = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \| x_j \|^p$.

当(2.18) 成立时

$$E\left\|\sum_{i=1}^{n}d_i\right\| = E\left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_i^{(j)}x_j\right\| \leqslant Cn^{1/p}\left(E\left\|\sum_{j=1}^{n}\eta_1^{(j)}x_j\right\|^p\right)^{1/p}$$

$$\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}.$$

若记 $\xi_j = \sum_{k=1}^{n}\eta_k^{(j)}$，则 ξ_j 是对称 $R.V.$ 上式变为

$$E\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_i\right\| \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}.$$

取与 $\{\xi_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$ 独立的随机变量 $\varepsilon_i(i=1,\cdots,n)$，$P(\varepsilon_i=\pm 1) = \frac{1}{2}$，则

$$E\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\xi_j x_j\right\| = E\left\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\varepsilon_j x_j)\right\| \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p} \tag{2.19}$$

由推论 3

$$E\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\xi_j x_j\right\| \geqslant \left(\min_{1\leqslant j\leqslant n}E|\xi_i|\right)E\left\|\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j\right\| \tag{2.20}$$

为计算 $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}E|\xi_j|$，由 $\eta_k^{(j)}(\omega)$ 的对称性，取 Rademacher 函数列 $r_k(t), k=1,2,\cdots$，则 ξ_j 与 $\sum_{k=1}^{n}r_k(t)\eta_k^{(j)}(\omega)$ 同分布，由 Khintchin 不等式和 $\eta_k^{(j)}$ 的定义

$$E|\xi_j| = \int_\Omega\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}r_k(t)\eta_k^{(j)}(\omega)\right|dPdt$$

$$\geqslant C\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k^{(j)}(\omega)|^2\right)^{1/2}dP$$

$$= C\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k^{(j)}(\omega)|^{1/2}dP\right) \geqslant CP\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k^{(j)}(\omega)| > 0\right)$$

$$= C\left(1 - P\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k^{((j)}(\omega)| = 0\right)\right)$$

$$= C\left[1-\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\right] \geqslant C\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

于是由(2.19),(2.20),$E\left\| \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j x_j \right\| \leqslant C'\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}$. 将 ε_i 看作关于[0,1]上 Lebesgue 测度的随机变量,并且再一次应用推论 2 即得到

$$E\left\| \sum_{j=1}^{n} r_i x_i \right\| \leqslant C'\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p\right)^{1/p}.$$

定理 10 设 X 是Banach 空间,$2\leqslant q<\infty$,则以下条件等价:

(i) $B_r(X)\subset l_q(X)$,

(ii) $c_r(X)\subset l_q(X)$,

(iii) X 是 q 余型的,即存在 $C>0$ 使得任何 $x_1,\cdots,x_n\in X$,

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q \leqslant CE\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right\|^q, n\geqslant 1 \tag{2.21}$$

(iv) 存在 $C>0$ 使得任何零均值独立 X 值 $R.V.$ $d_1,\cdots,d_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} E\|d_i\|^q \leqslant CE\left\|\sum_{i=1}^{n} d_i\right\|^q, n\geqslant 1 \tag{2.22}$$

证明 (iv)⇒(iii)⇒(i)⇒(ii) 是容易的. 为证(ii)⇒(iii),考虑恒等映射 $I:(c_r(X),\|\cdot\|_{(q)})\to(c_r(X),\|\cdot\|_q)$. (ii) 保证了定义的合理性,类似于定理8的讨论说明 I 具有闭图象,从而 $C=\|I\|<\infty$,由此得出(2.21). (iii)⇒(iv) 的证明与定理 8 相应部分的证明一样地进行.

§ 3 p 型空间中独立 $R.V.$ 序列的大数定律

称取值于 Banach 空间 X 的 $R.V.$ 序列 $\{d_n\}$ 满足强大数定律:若存在 $x\in X$ 使得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i \to x \quad a.e. \tag{3.1}$$

称$\{d_n\}$满足弱大数定律，如果上述极限依概率成立.

实值$R.V.$序列的大数定律的研究是经典概率论中的一个十分活跃的分支. 对于实值$R.V.$序列$\{d_n\}$，要使大数定律成立，可以有几种不同的条件，例如：

(a) $d_n(n \geqslant 1)$独立同分布($i.i.d$).

(b) $d_n(n \geqslant 1)$独立并且$Ed_n = a, \sup\limits_{n\geqslant 1}E|d_n|^2 < \infty$.

(c) $d_n(n \geqslant 1)$独立，$Ed_n = a$并且对于某个$1 \leqslant p \leqslant 2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-p}E|d_n|^p < \infty$.

若将实值$R.V.$序列换为取值于Banach空间的$R.V.$序列，其结论与Banach空间的结构性质有着深刻的依赖关系，这是人们对于Banach空间中的大数定律具有浓厚兴趣的原因之一. 约略言之，早在1953年，Mourier证明了对于任何Banach空间X，上面条件(a)都能保证在其中取值的$R.V.$序列满足强大数定律. 但为了得到更好的收敛速度，就需要空间条件(Acosta定理). 要使条件(b)能保证每个取值于X的$R.V.$序列成立，需要X具有大于1的型. 此外马上我们就会看到，要想同样的事实对于(c)成立，必需并且只需X是p型空间.

我们先给出几个引理.

引理 1(Toeplitz) 设$a_i \geqslant 0$是一列实数，$b_n = \sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，$X$是Banach空间，$x_n, x \in X$并且$x_n \to x$，则当$b_n \to \infty$时

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_i x_i \to x$$

证明 若$\|x_n - x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ (n \geqslant n_0)$，则

$$\left\|\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}a_i x_i - x\right\| \leqslant \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n_0-1}a_i\|x_i - x\|$$

$$+\frac{1}{b_n}\sum_{i=n_0}^{n}a_i\|x_i-x\|$$

$$\leqslant\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n_0-1}a_i\|x_i-x\|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $b_n\to\infty$ 得出所要的结论.

引理 2(Kronecker)　设 X 是 Banach 空间，$x_n\in X$，$a_n>0$，$a_n\uparrow\infty$，则当 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{a_n}$ 收敛时，$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}x_i\to 0$.

证明　设 $S_0=0$，$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}$，$S_n\to S$，由 Toeplitz 引理，

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}a_i(S_i-S_{i-1})=S_n-\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)S_i\to 0.$$

引理 3　设 $\{d_n\}$ 是 X 值独立、对称 $R.V.$ 序列，$r>0$，$S_n=\sum_{i=1}^{n}d_i$，则 $n^{-r}S_n\to 0\ a.e.$ 必须并且只须 $2^{-nr}(S_{2^{n+1}}-S_{2^n})\to 0\ a.e.$

证明　由明显的不等式

$$2^{-nr}(S_{2^{n+1}}-S_{2^n})=\frac{S_{2^{n+1}}}{2^{(n+1)r}}\cdot 2^r-\frac{S_{2^n}}{2^{nr}},$$

则当 $n^{-r}S_n\to 0\ a.e.$ 时 $2^{-nr}(S_{2^{n+1}}-S_{2^n})\to 0\quad a.e.$

反之，设 $K_n=2^{-nr}(S_{2^{n+1}}-S_{2^n})\to 0\quad a.e.$，由于

$$2^{-nr}(S_{2^{n+1}}-S_2)=2^{-nr}\sum_{i=1}^{n}2^{ir}K_i$$

$$=\left(2^{-nr}\sum_{i=1}^{n}2^{ir}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}2^{ir}\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}2^{ir}K_i,$$

注意

$$2^{-nr}\sum_{i=1}^{n}2^{ir}\to\frac{2^r}{2^r-1}\quad(n\to\infty),$$

由 Toeplitz 引理，$2^{-nr}(S_{2^{n+1}}-S_2)\to 0\ a.e.$ 从而 $2^{-nr}S_{2^n}\to 0\ a.e.$

现在对于任意 $n\geqslant 1$，取 $k\geqslant 1$ 使得 $2^{k-1}<n\leqslant 2^k$，则

$$\frac{\|S_n\|}{n^r}\leqslant\frac{\|S_n-S_{2^{k-1}}\|}{n^r}+\frac{\|S_{2^{k-1}}\|}{n^r}$$

$$\leqslant \frac{\| S_n - S_{2^{k-1}} \|}{2^{(k-1)r}} + \frac{\| S_{2^{k-1}} \|}{2^{(k-1)r}}.$$

易知后者第二项 $a.e.$ 收敛于 0. 对于第一项，注意由对称性应用 § 2 定理 1，

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{2^{k-1} < n \leqslant 2^k} 2^{-(k-1)r} \| S_n - S_{2^{k-1}} \| > \varepsilon \right)$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} P\left(2^{-(k-1)r} \| S_{2^k} - S_{2^{k-1}} \| > \varepsilon \right).$$

由 Borel—Cantelli 引理，后者是有限的，从而

$$\max_{2^{k-1} < n \leqslant 2^k} 2^{-(k-1)r} \| S_n - S_{2^{k-1}} \| \to 0 \quad a.e.$$

于是 $n^{-r} S_n \to 0 \quad a.e.$

引理 4 设 $0 < a_n \uparrow \infty, 0 < p < \infty, \{d_n\}$ 是 X 中独立、对称 $R.V.$ 序列，$S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$，并且满足 (a) $\| d_n \| \leqslant a_n \quad a.e.$，$(b)$ $\frac{S_n}{a_n} \to 0$ 依概率成立，则 $E \| \frac{S_n}{a_n} \|^p \to 0$.

证明 记 $d_n^* = \sup_{i \leqslant n} \| d_n \|$，$S_n^* = \sup_{i \leqslant n} \| S_n \|$. 对 $\forall\ \varepsilon > 0$，取 n_0 足够大使得 $n \geqslant n_0$ 时 $P(\| S_n \| \geqslant a_n \varepsilon) \leqslant \frac{1}{16 \cdot 3^p}$，则

$$\int_0^A t^{p-1} P(\| S_n \| > a_n t) dt = 3^p \int_0^{\frac{A}{3}} t^{p-1} P(\| S_n \| > 3a_n t) dt.$$

应用 § 2 定理 4 证明中使用的方法可得

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^{p-1} P(\| S_n \| > a_n t) dt &\leqslant 2 \cdot 3^p \int_0^A t^{p-1} P(d_n^* > a_n t) dt \\
&\quad + 8 \cdot 3^p \int_0^A t^{p-1} P^2(\| S_n \| > a_n t) dt \\
&\leqslant 16 \cdot 3^p \varepsilon + \frac{8 \cdot 3^p}{16 \cdot 3^p} \int_0^A t^{p-1} P(\| S_n \| > a_n t) dt \\
&\quad + 4 \cdot 3^p \int_0^A t^{p-1} P(d_n^* > a_n t) dt
\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^A t^{p-1} P(\| S_n \| > a_n t) dt \leqslant 32 \cdot 3^p \varepsilon + 4 \cdot 3^p \int_0^A t^{p-1} P(d_n^* > a_n t) dt$$

$$\leqslant 32 \cdot 3^p \varepsilon + 4 \cdot 3^p \int_0^1 P(d_n^* > a_n t) dt$$

最后的不等式是因为条件(a). 于是

$$E \| \frac{S_n}{a_n} \|^p = \lim_{A \to \infty} \int_0^A t^{p-1} P(\| S_n \| > a_n t) dt$$

$$\leqslant 32 \cdot 3^p \varepsilon + 4 \cdot 3^p \int_0^1 P(d_n^* > a_n t) dt.$$

根据独立性

$$P(d_n^* > a_n t) \leqslant P(2S_n^* > a_n t) \leqslant 2P(\| S_n \| > \frac{a_n t}{2}),$$

由控制收敛定理

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 P(d_n^* > a_n t) dt = 0.$$

ε 是任意的,故必有 $\lim\limits_{n \to \infty} E \| \frac{S_n}{a_n} \|^p = 0.$

定理 1(Hoffmann—Jørgensen, Pisier) 设 X 是 Banach 空间,$1 \leqslant p \leqslant 2$,则以下条件等价:

(i) X 是 p 型的,

(ii) 对任何 0 均值独立 X 值 $R.V.$ 序列 $\{d_n, n \geqslant 1\}$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p} E \| d_n \|^p < \infty$,则 $\{d_n, n \geqslant 1\}$ 满足强大数定律.

(iii) 对于任何$(x_n) \in X^\infty$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p} \| x_n \|^p < \infty$,则 $\{r_n x_n, n \geqslant 1\}$ 满足强大数定律.

将(ii),(iii) 换为 w 大数定律结论仍成立.

证明 (i)⇒(ii) 注意若 $d'_n = \frac{d_n}{n}$,则$\{d'_n, n \geqslant 1\}$ 仍为 0 均值独立 $R.V.$ 序列. (ii) 中条件表明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E \| d'_n \|^p < \infty$,由 §2 定理 8(iv),

$$E \| \sum_{i=1}^n d'_i \|^p \leqslant C \sum_{i=1}^n E \| d'_n \|^p < \infty.$$

若换为 $d'_{k+1}, d'_{k+2}, \cdots, d'_n$ 类似地得到

$$E\|\sum_{i=k+1}^{n}d'_i\|^p\leqslant C\sum_{i=k+1}^{n}E\|d'_i\|^p\to 0\quad(k\to\infty).$$

于是 $\sum_{i=1}^{n}d'_i$ 依 $L_p(P,X)$ 范数收敛，从而依概率收敛，这表明 $\sum_{i=1}^{\infty}d'_i$ $a.e.$ 收敛. 由 Kronecker 引理，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i\to 0\ a.e.$

(ii)⇒(iii)　显然.

(iii)⇒(i)　我们将在(iii)中弱大数定理成立的条件下证明(i). 为此考虑两类空间

$$G_0=\{x=(x_n)\in X^\infty,\|x\|_0=(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}\|x_n\|^p)^{1/p}<\infty\},$$

$$G_1=\{x=(x_n)\in X^\infty,\|x\|_1=\sup_{n\geqslant 1}\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_ix_i\|_p<\infty\}$$

例行的验证表明 G_0、G_1 是 Banach 空间. 利用引理 4 可知，(iii) 意味着 $G_0\subset G_1$，考虑恒等映射 $I:G_0\to G_1$，若 $x^{(k)}=(x_n^{(k)})\in X^\infty$ 使得 $\|x^{(k)}\|_0\to 0$，并且 $\|x^{(k)}-x\|_1\to 0, x=(x_n)$，则前者说明 $x_n^{(k)}\to 0\ (k\to\infty)$，后者说明

$$\sup_{n\geqslant 1}\|\sum_{i=1}^{n}r_i(x_i^{(k)}-x_i)\|_p\to 0\ (k\to\infty).$$

由此得到对于每个 n，$x_n^{(k)}\to x_n=0$，从而闭图象定理保证存在 $C>0$ 使得对于 $\forall\ n\geqslant 1,(x_n)\in X^\infty$，

$$E\|\sum_{i=1}^{n}r_ix_i\|^p\leqslant Cn^p\sum_{i=1}^{n}i^{-p}\|x_i\|^p,n\geqslant 1.$$

将此式应用于 $(\underbrace{0,\cdots,0}_{k},x_1,\cdots,x_n,0,\cdots)$，则

$$\begin{aligned}E\|\sum_{i=1}^{n}r_ix_i\|^p&=E\|\sum_{i=k+1}^{k+n}r_ix_{i-k}\|\\&\leqslant C(k+n)^p\sum_{i=1}^{n}(i+k)^{-p}\|x_i\|^p\\&\leqslant C(\frac{k+n}{k+1})^p\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p.\end{aligned}\qquad(3.2)$$

令 $k \to \infty$ 得到

$$E\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \|^p \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p,$$

X 是任意的，故 X 是 p 型的.

定理 2(Brunk 型大数定律)　设 X 是 p 型 Banach 空间，$1 \leqslant p \leqslant 2$，则对于任何 0 均值独立 X 值 $R.V.$ 序列 $\{d_n, n \geqslant 1\}$，若存在 $q \geqslant 1$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\| d_n \|^{pq}}{n^{1+pq-q}} < \infty, \tag{3.3}$$

则 $\{d_n, n \geqslant 1\}$ 满足强大数定律.

证明　$q = 1$ 的情况已包含在定理 9 中，现设 $q > 1$，首先由 Kahane 不等式和 X 的 p 型，存在 $C > 0$ 使得

$$(E\| \sum_{i=1}^{n} r_i d_i \|^q)^{1/q} \leqslant C(\sum_{i=1}^{n} E\| d_i \|^p)^{1/p}$$

取 $\widetilde{d}_i$ 是 d_i 的对称化，则

$$E\| \sum_{i=1}^{n} d_i \|^q \leqslant E\| \sum_{i=1}^{n} \widetilde{d}_i \|^q = E\| \sum_{i=1}^{n} r_i \widetilde{d}_i \|^q$$
$$\leqslant C(\sum_{i=1}^{n} E\| \widetilde{d}_i \|^p)^{q/p} \leqslant C'(\sum_{i=1}^{n} E\| d_i \|^p)^{q/p}.$$

若 $q > p$，取 s 使得 $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$，则对任何 $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant n)$.

$$(E\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i \|^q)^{1/q} \leqslant C'(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p E\| d_i \|^p)^{1/p}$$
$$\leqslant C'(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^{p \cdot \frac{s}{p}})^{\frac{p}{s} \cdot p}[\sum_{i=1}^{n} (E\| d_i \|^p)^{q/p}]^{\frac{p}{q} \cdot \frac{1}{p}}$$
$$\leqslant C'(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^s)^{\frac{1}{s}}[\sum_{i=1}^{n} E\| d_i \|^q]^{\frac{1}{q}} \tag{3.4}$$

记 $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i$，以 $\frac{1}{n}$ 代替上面的 α_i，以 pq 代替 q，则 $s = \frac{pq}{q-1}$ 并且

$$E\|Y_n\|^{pq} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{pq}{q-1}}\Big)^{q-1}\sum_{i=1}^{n}E\|d_i\|^{pq}$$

$$\leqslant \frac{C\sum_{i=1}^{n}E\|d_i\|^{pq}}{n^{1+pq-q}}.$$

由(3.3)和Kronecker引理,$E\|Y_n\|^{pq}\to 0\ (n\to\infty)$.

Hǎjek-Renyi-Chow关于实值下鞅的不等式是说,当$(\xi_n,n\geqslant 1)$是实值下鞅并且$c_n\downarrow 0$时,对于$\forall\,\varepsilon>0$,

$$\varepsilon P(\max_{0\leqslant k\leqslant n}c_k\xi_k\geqslant\varepsilon)\leqslant c_0E\xi_0^+ + \sum_{k=1}^{n}c_kE(\xi_k^+ - \xi_{k-1}^+) \quad (3.5)$$

(见Chow[1]).现在令$c_k=\frac{1}{k^{pq}},\xi_k=\|S_k\|^{pq}=\|\sum_{i=1}^{k}d_i\|^{pq}$,则

$$\varepsilon^{pq}P(\sup_{j\geqslant n}\|Y_j\|>\varepsilon)=\varepsilon^{pq}\lim_{m\to\infty}P(\sup_{n\leqslant j\leqslant m}\|Y_j\|>\varepsilon)$$

$$\leqslant E\|Y_n\|^{pq}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{pq}}(E\|S_k\|^{pq}-E\|S_{k-1}\|^{pq})$$

$$\leqslant E\|Y_n\|^{pq}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k^{pq}}-\frac{1}{(k+1)^{pq}}\Big)E\|S_k\|^{pq}. \quad (3.6)$$

其中用到分部求和.

在(3.4)中,令$\alpha_i=1$并且以pq代替q,则有

$$E\|\sum_{i=1}^{k}d_i\|^{pq}\leqslant Ck^{q-1}\sum_{i=1}^{k}E\|d_i\|^{pq}, \quad (3.7)$$

于是(3.6)式

$$\leqslant E\|Y_n\|^{pq}+C\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k^{pq}}-\frac{1}{(k+1)^{pq}}\Big)k^{q-1}\sum_{i=1}^{k}E\|d_i\|^{pq}.$$

当k充分大时,存在$\alpha>0$使得

$$\Big(\frac{1}{k^{pq}}-\frac{1}{(k+1)^{pq}}\Big)k^{q-1}\leqslant\alpha\Big(\frac{k^{q-1}}{k^{pq}}-\frac{(k+1)^{q-1}}{(k+1)^{pq}}\Big).$$

于是只要n足够大,(3.6)式又

$$\leqslant E\|Y_n\|^{pq}+2C\alpha\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k^{pq-q+1}}-\frac{1}{(k+1)^{pq-q+1}}\Big)\sum_{i=1}^{k}E\|d_i\|^{pq}$$

应用分部求和于整个级数,得出

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{pq-q+1}}-\frac{1}{(k+1)^{pq-q+1}}\right)\sum_{k=1}^{\infty}E\|d_i\|^{pq}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}E\|d_i\|^{pq}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{pq-q+1}}-\frac{1}{(k+1)^{pq-q+1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}E\|d_i\|^{pq}/i^{pq-q+1}<\infty.$$

于是必有

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{pq-q+1}}-\frac{1}{(k+1)^{pq-q+1}}\right)\sum_{i=1}^{k}E\|d_i\|^{pq}\to 0\ (n\to\infty).$$

这说明对 $\forall\ \varepsilon>0,\lim\limits_{n\to\infty}P(\sup\limits_{j\geqslant n}\|Y_j\|>\varepsilon)=0$. 从而

$$\sum_{i=1}^{n}d_i/n\to 0\quad a.e.$$

称 $R.V.$ 序列 $\{d_n\}$ 是尾概率一致有界的：若存在实 $R.V.d$ 和 $C>0$ 使得

$$\sup_{n\geqslant 1}P(\|d_n\|>t)\leqslant CP(d>t).\quad \forall\ t>0$$

此时记 $\{d_n\}\succ d$.

显然，若 $\{d_n\}$ 是 X 值独立同分布的 $R.V.$ 序列，则 $\{d_n\}$ 是尾概率一致有界的.

引理 5 若 $\{d_n\}$ 是 X 值独立 $R.V.$ 序列 $\{d_n\}\succ d,Ed^p<\infty(1\leqslant p<2)$ 则 $n^{-\frac{1}{p}}S_n$ 依概率收敛于 0 当且仅当它 $a.e.$ 收敛于 0.

证明 假设 $n^{-\frac{1}{p}}S_n\to 0$ 依概率成立. 不失一般性，假定 $\{d_n\}$ 均为对称 $R.V.$ 序列，令

$$Y_j=d_j\chi_{\{\|d_j\|^p\leqslant j\}},\quad T_n=\sum_{j=1}^{n}Y_j,\quad n\geqslant 1,$$

则 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(\|d_j\|^p>j)\leqslant C\sum\limits_{j=1}^{\infty}P(d^p>j)=CEd^p<\infty$. 由 Borel-Cantelli 引理，$P(\limsup\limits_{j\to\infty}\{Y_j\neq d_j\})=0$. 于是，为得到引理结论，只须证明 $n^{-\frac{1}{p}}T_n\to 0\ a.e.$

由 $n^{-\frac{1}{n}}S_n$ 依概率收敛于 0，易知 $n^{-\frac{1}{p}}T_n$ 依概率收敛于 0. 于是

引理 4 说明 $E\frac{\|T_n\|^p}{n}\to 0$,从而 $E\|\frac{T_n}{n^{1/p}}\|\to 0$. 若令 $V_n=\|T_{2^{n+1}}-T_{2^n}\|-E\|T_{2^{n+1}}-T_{2^n}\|$. 根据引理 3,为证 $n^{-\frac{1}{p}}T_n\to 0\ a.s.$ 只须证明 $V_n/2^{n/p}\to 0\quad a.e.$

记 $\mathscr{B}_0=\{\varnothing,\Omega\}$. $\mathscr{B}_j=\sigma(Y_1,\cdots,Y_j)$. $\eta_j=E(\|T_n\|\,|\mathscr{B}_j)-E(\|T_n\|\,|\mathscr{B}_{j-1})$, $1\leqslant j\leqslant n$. 显然 $(\eta_j,1\leqslant j\leqslant n)$ 是一有限鞅差序列. 并且 $\sum_{j=1}^{n}\eta_j=\|T_n\|-E\|T_n\|$. 由于当 $i\neq j$,例如 $i<j$ 时,$E\eta_i\eta_j=E(E(\eta_i\eta_j|\mathscr{B}_i))=E[\eta_iE(\eta_j|\mathscr{B}_i)]=0$. 故有

$$E|\sum_{j=1}^{n}\eta_j|^2=\sum_{i,j=1}^{n}E\eta_i\eta_j=\sum_{i=1}^{n}E\eta_i^2 \tag{3.8}$$

另一方面,应用独立性可以证明 $E(\|T_n-Y_j\|\,|\mathscr{B}_j)=E(\|T_n-Y_j\|\,|\mathscr{B}_{j-1})$,从而

$$\begin{aligned}\eta_j&\leqslant E(\|T_n-Y_j\|\,|\mathscr{B}_j)+E(\|Y_j\|\,|\mathscr{B}_j)\\&\qquad-E(\|T_n-Y_j\|\,|\mathscr{B}_{j-1})+E(\|Y_j\|\,|\mathscr{B}_{j-1})\\&\leqslant\|Y_j\|+E\|Y_j\|,\\ \eta_j&\geqslant E(\|T_n-Y_j\|\,|\mathscr{B}_j)-E(\|Y_j\|\,|\mathscr{B}_j)\\&\qquad-E(\|T_n-Y_j\|\,|\mathscr{B}_{j-1})-E(\|Y_j\|\,|\mathscr{B}_{j-1})\\&=-\|Y_j\|-E\|Y_j\|.\end{aligned}$$

从而

$$|\eta_j|\leqslant\|Y_j\|+E\|Y_j\|,\ E\eta_j^2\leqslant 4E\|Y_j\|^2 \tag{3.9}$$

将(3.8)、(3.9) 应用于 V_n,对于 $\varepsilon>0$,则

$$\begin{aligned}P(|V_n|/2^{n/p}>\varepsilon)&\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2 2^{2n/p}}EV_n^2\leqslant\frac{4}{\varepsilon^2 2^{2n/p}}\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}}E\|Y_j\|^2\\&\leqslant\frac{4\cdot 2^{2/p}}{\varepsilon^2}\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}}E\|Y_j\|^2/j^{2/p}.\end{aligned}$$

注意,由 $\{Y_n\}\succ d$,

$$\sum_{j=1}^{\infty}E\|Y_j\|^2/j^{2/p}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2/p}}\int_0^{j^{2/p}}P(\|d_j\|>t)dt^2$$

$$\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2/p}}\int_0^{j^{1/p}}P(d>t)dt^2\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^1 P(d>j^{1/p}t)dt^2$$

$$=2C\int_0^1\sum_{j=1}^{\infty}tP(d>j^{1/p}t)dt\leqslant C'Ed^p<\infty$$

这说明

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|V_n|/2^{n/p}>\varepsilon)<\infty,$$

由 Borel-Cantelli 引理知 $|V_n|/2^{n/p}\to 0\quad a.e.$

定理 3　设$\{d_n\}$是独立同分布 0 均值$R.V.$并且$1<p<2$，则以下条件等价：

(i) $E\|d_1\|^p<\infty$ 并且$\frac{S_n}{n^{1/p}}\to 0$

(ii) $\frac{S_n}{n^{1/p}}\to 0\quad a.e.$

(iii) $E\|\frac{S_n}{n^{1/p}}\|\to 0.$

(iv) 对于$\forall\ \varepsilon>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}P(\|\frac{S_n}{n^{1/p}}\|>\varepsilon)<\infty.$

证明　(iv)⇒(i)　先假定$\{d_n\}$是对称的. 若$\frac{S_n}{n^{1/p}}$不依概率收敛于 0. 则对于某个$\varepsilon>0$,存在$n_i\uparrow\infty$使得　$P\{\|S_{n_i}\|>n_i^{1/p}\varepsilon\}>\varepsilon$,(不妨设$n_{i+1}>2n_i$)从而　$P(\sup_{k\leqslant n_i}\|S_k\|>n_i^{1/p}\varepsilon)>\varepsilon, i\geqslant 1.$

实际计算可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}P(\|S_n\|>\frac{\varepsilon n^{1/p}}{2^{1/p}})\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_i}^{2n_i}n^{-1}P(\|S_n\|>\frac{\varepsilon n^{1/p}}{2^{1/p}})$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_i}^{2n_i}n^{-1}P(\sup_{k\leqslant n}\|S_k\|>\frac{\varepsilon n^{1/p}}{2^{1/p}})$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_i}^{2n_i}n^{-1}P(\sup_{k\leqslant n_i}\|S_k\|>\varepsilon n_i^{1/p})$$

$$\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_i}^{2n_i}n^{-1}=\infty.$$

与(iv)矛盾，所以必有$\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{P} 0$.

定义

$$\tau = \inf\{k, \| S_k \| > n^{1/p}\}$$
$$\sigma = \inf\{k < \tau, \| d_k \| > 2n^{1/p}\},$$

则

$$P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \| S_k \| > n^{1/p}) \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(\sigma = k)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} P(\| d_k \| > 2n^{1/p}) P(\tau > k)$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} P(\| d_k \| > 2n^{1/p})(1 - P(\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \| S_i \| > n^{1/p})).$$

由$\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{P} 0$，取$n_0$足够大使得$n \geqslant n_0$时，$P(\| S_n \| > n^{1/p}) < \frac{1}{4}$，则

$$1 - P(\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \| S_i \| > n^{1/p}) \geqslant 1 - 2P(\| S_n \| > n^{1/p}) > \frac{1}{2}.$$

此时必有

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-1} P(\| S_n \| > n^{1/p}) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-1} P(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \| S_k \| > n^{1/p})$$
$$\geqslant \frac{1}{4} \sum_{n=n_0}^{\infty} P(\| d_k \| > 2n^{1/p}) = \frac{1}{4} \sum_{n=n_0}^{\infty} P(\| d_1 \|^p > 2^p n).$$

于是$E \| d_1 \|^p < \infty$.

对于不是对称的$\{d_n\}$，通过对称化的方法仍可得此结论.

(i)⇒(ii)　见定理 2.

(ii)⇒(iii)　往证$(\| \frac{S_n}{n^{1/p}} \|, n \geqslant 1)$是一致可积的. 由$p > 1$，只须证明$\sup_n \frac{E \| S_n \|^p}{n} < \infty$. 由 §2 定理 4 中使用过的方法，取$n_0$使得当$n \geqslant n_0$时，$P(\| S_n \| > n^{1/p}) < \frac{1}{16 \cdot 3^p}$

$$E \| S_n \|^p = \int_0^{\infty} \mathrm{P}(\| S_n \|^p > t) dt$$

$$
\begin{aligned}
&= 3^p\int_0^\infty \mathrm{P}(\|S_n\| > 3t^{1/p})dt \\
&\leqslant 3^p[2\int_0^\infty \mathrm{P}(d_n^* > t^{1/p})dt \\
&\qquad + 8\int_0^\infty \mathrm{P}(\|S_n\| > t^{1/p})^2 dt] \\
&\leqslant 2\cdot 3^p E(d_n^*)^p + 8\cdot 3^p n + \frac{1}{2}\int_n^\infty \mathrm{P}(\|S_n\| > t^{1/p})dt \\
&\leqslant 2\cdot 3^p E(d_n^*)^p + 8\cdot 3^p n + \frac{1}{2}E\|S_n\|^p
\end{aligned}
$$

注意，下面马上要进行的(iii)⇒(iv) 的证明仅用到$\frac{S_n}{n^{1/p}} \to 0\ a.e.$ (或$\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$)，再从(iv)⇒(i) 的证明得出 $E\|d_1\|^p < \infty$，从而

$$
\begin{aligned}
\frac{E\|S_n\|^p}{n} &\leqslant 16\cdot 3^p + \frac{4\cdot 3^p}{n}E(d_n^*)^p \\
&\leqslant 16\cdot 3^p + \frac{2\cdot 3^p}{n}\sum_{i=1}^\infty E\|d_i\|^p \\
&\leqslant 16\cdot 3^p + 2\cdot 3^p E\|d_1\|^p < \infty
\end{aligned}
$$

(iii)⇒(iv)　由独立同分布知道此时$\frac{S_n}{n^{1/p}} \to 0\ a.e.$ 因此 Borel-Cantelli 引理保证了对于 $\forall\ \varepsilon > 0$，

$$
\sum_{n=1}^\infty \mathrm{P}(\|S_{2^n}\| > 2^{n/p}\varepsilon) = \sum_{n=0}^\infty \mathrm{P}(\|\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} d_j\| > 2^{n/p}\varepsilon) < \infty,
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty n^{-1}\mathrm{P}(\|S_n/n^{1/p}\| > \varepsilon) &= \sum_{j=0}^\infty \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{n}\mathrm{P}(\|S_n/n^{1/p}\| > \varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^j}\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1}\mathrm{P}(\|S_n/n^{1/p}\| > \varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^j}\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1}\mathrm{P}(\|S_n\| > 2^{j/p}\varepsilon) \\
&\leqslant \sum_{j=0}^\infty \mathrm{P}(\sup_{2^j\leqslant n\leqslant 2^{j+1}}\|S_n\| > 2^{j/p}\varepsilon)
\end{aligned}
$$

$$\leqslant 2\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{P}\left(\|S_{2^{n+1}}\|>\frac{2^{(j+1)/p}\varepsilon}{2^{1/p}}\right)<\infty.$$

定理 4(Acosta)　设 X 是可分 Banach 空间，$1\leqslant p<2$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 型空间，

(ii) 对于每个独立同分布 0 均值 $R.V.$ 序列 $\{d_n\}$，若 $E\|d_1\|^p<\infty$，则

$$\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^{n}d_i\to 0\quad a.e. \tag{3.10}$$

证明　(i)⇒(ii)　对于实值情况($p=2$)，(3.10) 成立，此为 Marcinkiewitz 强大数定律. 注意，对于每个 $f\in X^*$，$\{f(d_n)\}$ 为实值独立 $R.V.$ 序列，因此，$f(S_n/n^{1/p})\to 0\quad a.e.$ 成立.

另一方面，若 X 是 p 型空间，F 是 X 的有限维子空间，则商空间 X/F 仍为 p 型空间. 若 $\|x\|_F$ 是 X/F 上的范数，由 §2 定理 8，对于 $\forall\,\varepsilon>0$，

$$P(\|S_n/n^{1/p}\|_F>\varepsilon)\leqslant\frac{1}{n\varepsilon^p}E\|S_n\|_F^p$$

$$\leqslant\frac{C}{n\varepsilon^p}\sum_{j=1}^{n}E\|d_j\|_F^p\leqslant\frac{c}{\varepsilon^p}E\|d_1\|_F^p.$$

由于 $E\|d_1\|^p<\infty$，若记 X 的所有有限维子空间为 $\mathscr{F}$，由 X 的可分性容易得到 $\lim\limits_{F\in\mathscr{F}}E\|d_1\|_F^p=0$.

设 $\mathscr{L}(S_n/n^{1/p})$ 为 $S_n/n^{1/p}$ 的分布函数. 考虑 X 上的分布函数的全体 $\mathscr{D}$，$\mathscr{D}$ 中的序列 μ_n 弱收敛于 μ 的必充条件是对于任何有界连续函数 g，$\int_X g\,d\mu_n\to\int_X g\,d\mu$. 在关于 $S_n/n^{1/p}$ 的上述两条件下，$\mathscr{L}(S_n/n^{1/p})$ 构成了 $\mathscr{D}$ 中的弱相对紧集. 甚至为收敛序列. 其极限是在 0 点的 Dirac 测度 δ_0. 从而 $S_n/n^{1/p}\to 0$ 依概率成立. 由引理 5，$S_n/n^{1/p}\to 0\ a.e.$

(ii)⇒(i)　不妨设 $p>1$，定义

$$G_0 = \{d \in L_p, Ed = 0\}, \| d \|_{G_0} = \| d \|_p.$$

$$G_1 = \{d \in L_p\}, \| d \|_{G_1} = \sup_n E \| S_n / n^{1/p} \|.$$

直接验证表明 G_0、G_1 均为Banach空间，考虑包含映射 $I: G_0 \to G_1$. 由定理 3 知道 I 具有闭图象，从而是连续的. 于是 $\exists\, C > 0$ 使得对于 $\forall\, d \in G_0$,

$$E \| S_n \| \leqslant C n^{1/p} \| d_1 \|_p.$$

由 §2 定理 8 知道，X 同构于 p 型空间.

§4 中心极限定理与重对数律

让我们回忆某些基本知识. 我们知道，实值 $R.V.$ 序列的中心极限定理是说，如果$\{d_n, n \geqslant 1\}$是独立同分布$(d_n \backsim d)R.V.$ 序列，$Ed_1 = 0, 0 < Ed_1^2 = b^2 < \infty$,则对于任何 $t \in R$ 一致成立

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}\, b} \sum_{i=1}^{n} d_i \leqslant t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}} ds. \tag{4.1}$$

后者即标准正态分布 $R.V.$ 的分布函数. 简单地说，二阶矩有限的独立同分布 $R.V.$ 序列的极限分布是正态分布. 实际上，若与 d 独立同分布的 $R.V.$ 序列$\{d_n\}$ 满足中心极限定理，则必有 $Ed = 0$, $Ed^2 = b^2 < \infty$,对于取值于有限维空间的 $R.V.$ 序列也有类似的结果.

现在设 X 是Banach空间，对于一个取 X 值的 $R.V.\ \xi: \Omega \to X$, 若关于每个 $x^* \in X^*$, $x^*(\xi)$ 有正态分布，即

$$P(x^*(\xi) \leqslant t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{t} e^{-(s-a)^2/2\sigma^2} ds, \tag{4.2}$$

则称 ξ 有正态分布. 此时又称 ξ 为Gauss $R.V.$ 特别地，当 $a = 0$ 时称 ξ 是中心化了的，若 $a = 0, \sigma = 1$，称 ξ 是标准的. Gauss $R.V.\ \xi$ 生成的测度 $\mu_\xi(A) = P(\xi \in A), A \in \mathscr{B}(X)$ 称为 Gauss 测度.

对于一个 X 值 $R.V.\ \xi$，以

$$\varphi_\xi(x^*) = Ee^{i\langle x^*,\xi\rangle} \text{和} r_\xi(x^*,y^*) = E\langle x^*,\xi\rangle\langle y^*,\xi\rangle \quad (4.3)$$

表示ξ的特征泛函和协方差泛函，其中$x^*,y^* \in X^*$. 特别地，称$r_\xi(x^*,x^*) = E\langle x^*,\xi\rangle^2$为$\xi$的方差. 若$\xi$是中心化Gauss$R.V.$，则容易得出

$$\varphi_\xi(x^*) = e^{-\frac{1}{2}r_\xi(x^*,x^*)}, \forall\, x^* \in X^*. \quad (4.4)$$

而$r_\xi(x^*,x^*)$是$X^* \times X^*$上的正定二次形式. 反过来，若$\varphi_\xi(x^*)$可以以上述方式用一个正定二次形式表出，则ξ一定是一个Gauss $R.V.$ 对于一个 Gauss 测度μ，定义其均值与特征泛函为

$$\int_X x\mu(dx), \hat{\mu}(x^*) = \int_X e^{i\langle x^*,x\rangle}\mu(dx), \forall\, x^* \in X^*. \quad (4.5)$$

在上一章我们曾用到过$(X,\mathscr{B}(X))$上全体正测度集合$Ca^+(X)$上的一种弱拓扑，设$\{\mu_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$是此集合中的一个网，则

$$\mu_\lambda \xrightarrow{w} \mu \Leftrightarrow \lim_{\lambda\in\Lambda}\int_X f d\mu_\lambda = \int_X f d\mu, \forall\, f \in C(X) \quad (4.6)$$

其中$C(X)$是X上连续函数全体. 实际上$Ca^+(X)$是完备度量空间，若μ_λ和μ分别是相应的$R.V.$生成的，则上述收敛性即相当于依分布收敛，因此又记$\mu_\lambda \xrightarrow{w} \mu$为$\mu_\lambda \xrightarrow{\mathscr{D}} \mu$.

我们知道，一个 Borel 测度称为是 Radon 测度，若对于$\forall\, B \in \mathscr{B}(X)$有

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K), K \subset B, K \text{紧}\} \quad (4.7)$$

我们还定义过胎紧测度(Ⅳ. § 2) 一个正则 Borel 胎紧测度必是 Radon 测度. 在X是可分空间的情况，每个$R.V.$产生的测度μ都是胎紧的. 称$Ca^+(X)$的子集$\mathscr{U}$是一致胎紧(uniformly tight)的，若对于任何$\varepsilon > 0$，存在紧集$K \subset X$使得

$$\mu(X \backslash K) < \varepsilon, \qquad \forall\, \mu \in \mathscr{U}.$$

Prokholov 证明了，$\{\mu_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \subset Ca^+(X)$在此弱拓扑下相对紧，当且仅当对于$\forall\, \varepsilon > 0$，存在$X$中的紧集$K$使得对于所有$\lambda \in \Lambda$，$\mu_\lambda(K) \geqslant 1 - \varepsilon$，或者当且仅当存在有界集$K$并且对于$\forall\, \varepsilon > 0$有有限维子空间$F \subset X$使得每个$x \in K$，$d(X,F) < \varepsilon$(或者若$T:X$

$\to X/F$ 是商映射，则对于 $\forall\, x \in K$，$\| Tx \| < \varepsilon$). Ito 与 Nisio 还证明了，对于独立 $R.V.$ 序列 $\{d_n\}$，若 $S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$，则 $\mu_{S_n} \xrightarrow{w} \mu_S$ 当且仅当 $S_n \to S$ $a.e.$ 这一结果我们将会用到.

引理 1 设 X 是 Banach 空间，$x_n \in X, n \geqslant 1$，$\{\xi_n\}$ 是实值相互独立标准 Gauss$R.V.$ 序列使得 $\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$ $a.e.$ 收敛，则 $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ 在 $L^2([0,1], \mu, X)$ 中收敛. 此处 $\{r_n\}$ 是 Rademacher 函数序列，μ 是 $[0,1]$ 上的 Borel 测度.

证明 显然 $\xi_x^* = \sup_n \| \xi_i x_i \| < \infty$ $a.e.$，此时必有 $K = \sup_n \| x_n \| < \infty$. 由 §2 命题 1，存在 $a > 0$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\| \xi_n x_n \| > a) < \infty,$$

我们证明 $E(\xi_x^*)^2 < \infty$. 为此取 $b > 0$ 使 $t > b$ 时，$t^2 \leqslant e^t$ 并且 $b > a + K^2$. 由正态分布函数定义

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} E \| \xi_n x_n \|^2 \chi_{\{\| \xi_n x_n \| > b\}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\, \| x_n \|} \int_b^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2\| x_n \|^2}} dt \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\, \| x_n \|} \int_b^{+\infty} e^{-\frac{t^2 - 2\| x_n \|^2 t}{2\| x_n \|^2}} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{\| x_n \|^2/2}}{\sqrt{2\pi}\, \| x_n \|} \int_b^{+\infty} e^{-\frac{(t - \| x_n \|)^2}{2\| x_n \|^2}} dt \\
&\leqslant e^{K^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\, \| x_n \|} \int_{b-K^2}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2\| x_n \|}} du \\
&\leqslant 2e^{K^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2\| x_n \|}} d\left(\frac{u}{\| x_n \|}\right) \\
&= 2e^{K^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} P(\| \xi_n x_n \| > a) < \infty
\end{aligned}$$

仍由 §2 命题 1 得出 $E(\xi_x^*)^2 < \infty$.

由 §2 定理 4 及其推论，$\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i$ 在 $L^2(X)$ 中收敛，由 §2 定理 6，$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ 在 $L^2(X)$ 中收敛.

下面引理是由 LeCam[1] 证明的，这里不准备叙述其证明.

引理 2 设 (X,τ) 是 Hausdorff 拓扑空间，集合 $F\subset C(X)$ 在 X 上可分点并且当 $f,g\in F$ 时，$fg\in F$. 若 $\{\mu_n\}$ 和 μ 是 X 上的 Radon 测度，使得对于 $\forall f\in F$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f(x)\mu_n(dx)=\int_X f(x)\mu(dx) \tag{4.8}$$

则 $\mu_n\xrightarrow{F.w}\mu$，这里 $F.w$ 收敛的拓扑即是在 X 上的使每个 $f\in F$ 连续的最弱拓扑.

现在考虑 X 值的独立同分布 $R.V.$ 序列 $\{d_n\}$，不妨记 $d_1=d$，考虑序列

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}d_j \tag{4.9}$$

由实值 $R.V.$ 序列的中心极限定理，若 $Ed=0,E\|d\|^2<\infty$，则 $x^*\mu_{U_n}\xrightarrow{\omega}N(0,r(x^*,x^*))(\forall x^*\in X^*)$，从而作为特征函数

$$Ee^{i\langle x^*,U_n\rangle}\to e^{-\frac{1}{2}r(x^*,x^*)},\forall x^*\in X^*. \tag{4.10}$$

因此若 $U_n\xrightarrow{\omega}\mu$ 时，μ 必是一个以 $r(x^*,x^*)$ 为方差的中心化 Gauss 测度.

称一个满足 $Ex^*(\xi)=0,E(x^*(\xi))^2<\infty(\forall x^*\in X^*)$ 的 $R.V.\,\xi$ 是预 Gauss 的(pregaussian)：若存在 Gauss $R.V.\,\eta,E\eta=0$ 并且 $E(x^*(\xi))^2=E(x^*(\eta))^2(\forall x^*\in X^*)$. 我们将以 $G(\xi)$ 表示与予 Gauss $R.V.\,\xi$ 相应的 Gauss $R.V.$

引理 3 设 X 是 Banach 空间，ξ 是 X 值予 Gauss$R.V.$，则对于每个 X 值 $R.V.\,\eta$，若 $Ex^*(\eta)=0,E(x^*(\eta))^2\leqslant E(x^*(\xi))^2$，$\forall x^*\in X^*$，则 η 也是予 Gauss 的并且对于任何 $p>0$，

$$E\|G(\eta)\|^p\leqslant 2E\|G(\xi)\|^p \tag{4.11}$$

证明 不妨设标量值函数空间 $L_2(\mu)$ 是可分的，$\{h_i\}$ 是其中的规范正交基. 若 $\{\theta_i\}$ 是正交 Gauss 序列，$G_n = \sum_{i=1}^{n}\theta_i E(h_i\eta)$，则

$$E(x^*(G_n))^2 = E\sum_{i=1}^{n}\theta_i^2(E(h_ix^*\eta))^2 \leqslant E(x^*(\eta))^2$$
$$\leqslant E(x^*(\xi))^2 = E(x^*(G(\xi))^2. \quad \forall x^* \in X^*$$

注意此时 Gauss$R.V$ 序列 G_n 生成的测度是胎紧的，并且

$$E(x^*(G_n))^2 \to E(x^*(\eta))^2, \tag{4.12}$$

所以由 Ito-Nisio 定理，G_n $a.e.$ 收敛于一个 $R.V.$ 记为 $G(\eta)$，极限是唯一的并且 $E(x^*(G(\eta))^2 = E(x^*(\eta))^2$. 同时对于 $\forall\ t > 0$，由(4.12) 可推出

$$P(\|G(\eta)\| > t) \leqslant 2P(\|G(\xi)\| > t).$$

所以对任何 $p > 0$，(4.11) 成立.

定理 1(Hoffmann-Jørgensen，Pisier) 设 X 是可分 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 是 2 型空间.

(ii) 每个 $d \in L^2(P,X)$，$Ed = 0$ 是予 Gauss 的.

(iii) 对于每个 $d \in L^2(P,X)$，$Ed = 0$，与 d 独立同分布的 $R.V$ 序列 $\{d_n\}$ 满足中心极限定理. 即存在中心化 Gauss 测度 μ，使得 $U_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \mu$.

证明 根据实值情况的结论(iii)⇒(ii) 是明显的，实际上此时(4.10) 中的 $r(x^*,x^*) = r_d(x^*,x^*)$.

(ii)⇒(i). 对于任何非 0 元 $x_n \in X$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2 = 1$，令 $\lambda_n = \|x_n\|^2$，$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$，则概率测度

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(\frac{1}{2}\delta_{y_n} + \frac{1}{2}\delta_{-y_n}\right)$$

具有 0 均值并且 2 阶矩为 1，此外

$$\int_X \langle x^*, x\rangle^2 \mu(ds) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x^*, x_n\rangle^2 < \infty,$$

由(ii)，存在 Gauss 测度 γ，使得

$$\hat{\gamma}(x^*) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\langle x^*, x_n\rangle^2}$$

(γ 是由(4.5) 定义的). 若 $\eta_1, \eta_2, \cdots$ 是实值独立标准 Gauss$R.V$ 序列，设 $\xi_n = \sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j$，则

$$Ee^{i\langle x^*, \xi_n\rangle} = e^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\langle x^*, x_j\rangle^2} \to e^{-\frac{1}{2}r(x^*, x^*)},$$

根据特征函数与分布函数收敛性的关系，此时必有 $\mu_{\xi_n} \xrightarrow{\omega} \mu$. 由 Ito 与 Nisio 的结论 ξ_n $a.e.$ 收敛，从而 ξ_n 随机有界. 若记 $d^* = \sup_n |\eta_n|$，则由引理 1，$E(d^*)^2 < \infty$，从而由 §2 定理 4 知道 $E(\xi^*)^2 = E(\sup_{n\geq 1} \|\xi_n\|)^2 < \infty$. 由 §2 定理 6 这说明 $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in B_r(X)$. 总之，$(x_n) \in l_2(X)$ 时，$(x_n) \in B_r(X)$. 所以 X 是 2 型空间.

(i)⇒(iii). 设 $\mu = \mu_d$. 取以 $\mathscr{B}(X)$ 为指标集的随机过程 $\{W(A), A \in \mathscr{B}(X)\}$，满足

(a) 对于任何 $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{B}(X)$，$(W(A_1), \cdots, W(A_n))$ 是中心化的 n 维正态分布.

(b) $EW(A)W(B) = \mu(A \cap B), \forall A, B \in \mathscr{B}(X)$.

实际上可以验证，$W(\cdot)$ 是 $L^2(P)$ 值的向量测度，因此可以定义从 X 到 X 的函数 f 的(随机) 积分

$$\int_X f(X) W(dx). \tag{4.13}$$

例如首先对于简单函数以明显方式定义

$$\int_X \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}\right) W(dx) = \sum_{i=1}^{n} x_i W(A_i),$$

而后再以范数

$$\|f\| = \left(\int_X \|f(x)\|^2 \mu(dx) + E\left\|\int_X f(x) W(dx)\right\|^2\right)^{1/2} \tag{4.14}$$

完备化，记此空间为 $L_X^2(W)$. 它是 $L_X^2(\mu)=L^2(\mu,X)$ 的子空间.

我们证明，若 X 是 2 型空间，则 $L_X^2(W)=L_X^2(\mu)$. 实际上若 $f=\sum_{i=1}^{n}x_i\chi_{A_i}$，其中 A_i 互不相交，则 $W(A_1),\cdots,W(A_n)$ 相互独立，均值为 0，方差为 $\mu(A_1),\cdots,\mu(A_n)$，于是由 2 型空间的性质，存在 $C>0$ 使得

$$E\|\int_X fdW\|^2=E\|\sum_{i=1}^{n}W(A_i)x_i\|^2\leqslant C\sum_{i=1}^{n}E\|W(A_i)x_i\|^2$$

$$=C\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\mu(A_i)=C\int_X\|f\|^2d\mu \tag{4.15}$$

这说明 $f\mapsto\int_X fdW$ 是连续线性映射从而可有界延拓到整个 $L_X^2(\mu)$ 上. 此时范数(4.14) 实际上可采用同构范数 $\int_X\|f\|^2d\mu$. 此时对于简单函数 f,

$$Ee^{i\langle x^*,\int fdW\rangle}=E\prod_{i=1}^{n}e^{i\langle x^*,x_i\rangle W(A_i)}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\langle x^*,x_j\rangle^2\mu(A_j)}=e^{-\frac{1}{2}\int\langle x^*,f\rangle^2d\mu}$$

此式对于一般 $f\in L_X^2(\mu)$ 也成立. 由于 $W(\cdot)$ 是 $L^2(P)$ 值测度，故积分 $\int_X fdW$ 是 $L_X^2(P)$ 中元素，因此上述映射又可看作 $L_X^2(\mu)\to L_X^2(P)$ 的映射，记之为 T.

现在，由于 $f(x)=x$ 是 $L_X^2(\mu)$ 中元并且 $U=Tf$ 是 X 值 Gauss$R.V.$，取简单函数列 f_k 使得

$$\int_X f_k\mu(dx)=0,\|f-f_k\|_2\leqslant 2^{-(k+1)} \tag{4.16}$$

(由 f 的对称性，这是可以做到的). 若 $d_1,d_2,\cdots$ 是与 μ 同分布的独立 $R.V.$ 定义

$$\xi_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}d_i,\xi_{nk}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}f_k(d_i),U_k=Tf_k,$$

根据有限维空间的中心极限定理，$\mu_{\xi_{nk}}\overset{\backsim}{\to}\mu_{U_k}(k\geqslant 1)$. 此时由 2 型空

间的性质

$$E\|\xi_{nk}-\xi_n\| \leqslant (E\|\xi_{nk}-\xi_n\|^2)^{1/2}$$
$$\leqslant (Cn^{-1}\sum_{i=1}^{n}E\|d_i - f_k(d_i)\|^2)^{1/2}$$
$$= C^{\frac{1}{2}}\|f-f_k\|_2 \leqslant C^{\frac{1}{2}}2^{-(k+1)},$$

由(4.15)知道

$$E\|U_k - U\| \leqslant C^{\frac{1}{2}}2^{-(k+1)}. \quad (\forall\ k \geqslant 1) \tag{4.17}$$

若 $\varphi: X \to R$ 是有界 Lipschitz 函数:$\exists\ K > 0$ 使得

$|\varphi(x)| \leqslant K, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant K\|x-y\|, \forall\ x, y \in X,$

则上面估计给出

$$|E\varphi(\xi_n) - E\varphi(U)| \leqslant |E\varphi(\xi_n) - E\varphi(\xi_{nk})|$$
$$+ |E(\xi_{nk}) - E\varphi(U_k)| + |E\varphi(U_k) - E\varphi(U)|$$
$$\leqslant KC^{\frac{1}{2}}2^{-k} + |E\varphi(\xi_{nk}) - E\varphi(U_k)|$$

由此

$$\lim_{n\to\infty} E\varphi(\xi_n) = E\varphi(U),$$

φ可以是任一有界Lipschitz函数,这种函数的全体F在$C(X)$中可分点,故 $\xi_n \overset{F.w}{\to} U$. 但直接验证可知这种拓扑与$C(X)$中拓扑是等价的,所以必有 $\xi_n \overset{C(X).w}{\to} U$,即 $\xi_n \overset{\omega}{\to} U$. U 是 Gauss 测度,取 $\mu = U$ 则知(iii) 成立.

定理 2 设 X 是可分 Banach 空间,则以下条件等价:

(i) X 是 2 余型空间.

(ii) 每个取值于X的予 Gauss$R.V.$满足 $E\|d\|^2 < \infty$. 此时存在 $C > 0$ 使得

$$E\|d\|^2 \leqslant CE\|G(d)\|^2. \tag{4.18}$$

(ii) 每个予 Gauss$R.V.$满足中心极限定理.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii). 假定空间是 2 余型的,若$\{\xi_n\}$是独立、标准 Gauss$R.V.$序列, $\{x_n\} \subset X$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \leqslant CE\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i\|^2. \tag{4.19}$$

若 d 是预 Gauss 的，对于 $t>0$，令 $\eta=\varepsilon d\chi_{\{\|d\|\leqslant t\}}$，其中 ε 是与 d 独立的 Rademacher 函数，η 的相关 Gauss $R.V.$ 是 $G(d)$，由引理 3，η 也是予 Gauss 的并且

$$E\|G(\eta)\|^2 \leqslant 2E\|G(d)\|^2 \tag{4.20}$$

对于 η，存在增加的有限 σ 代数序列 $\mathscr{B}_n$ 使得

$$\eta_n = E(\eta|\mathscr{B}_n) \to \eta \quad a.e. \text{ 或 } L_2(\mu,X).$$

η_n 是有限值的，不妨设 $\eta_n = \sum_{i=1}^{k_n} x_i\chi_{A_i}$，其中 A_i 互不相交，则

$$G(\eta_n) = \sum_{i=1}^{k_n}\xi_i(P(A_i))^{\frac{1}{2}}x_i, E\|\eta_n\|^2 = \sum_{i=1}^{k_n}\|x_i\|^2P(A_i),$$

于是

$$E\|\eta_n\|^2 \leqslant CE\|G(\eta_n)\|^2 \leqslant CE\|G(\eta)\|^2 \leqslant 2CE\|G(d)\|^2$$

从而 $E\|\eta\|^2 \leqslant CE\|G(d)\|^2$，$t$ 是任意的，故

$$E\|d\|^2 \leqslant CE\|G(d)\|^2 < \infty.$$

(ii)⇒(iii)　设 d 是预Gauss的，由(ii)，$E\|d\|^2 \leqslant CE\|G(d)\|^2 < \infty$，注意对于每个 n，$\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ 也是予 Gauss 的并且与之相应的 Gauss$R.V.$ 也是 $G(d)$：

$$E\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = 0, E\left(x^*\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}x^*(d_i)x^*(d_j)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x^*(d_i))^2 = (x^*(d))^2.$$

于是

$$\sup_{n\geqslant 1}E\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\| \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\|_2 \leqslant C^{\frac{1}{2}}(E\|G(d)\|^2)^{1/2}.$$

仍设$(\mathscr{B}_n)$是递增有限σ代数序列，使得$d_n = E(d|\mathscr{B}_n) \to d \quad a.e.$ 并且以 $L^2(\mu,X)$ 范数成立. 对于每个 n，$d-d_n$ 仍是预 Gauss 的，由于

$$E(x^*(d-d_n))^2 \leqslant 2E(x^*(d))^2$$
$$\leqslant 2E(x^*(G(d)))^2, \forall\, x^* \in X^* \quad (4.21)$$

$G(d)$ 胎紧，所以 $d-d_n$ 胎紧. 由于 $E(x^*(d-d_n))^2 \to 0(n\to\infty)$，故 $G(d-d_n)$ 只可能收敛于 0. 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，取 n_0 使

$$E\|G(d-d_{n_0})\|^2 < \varepsilon^2/C,$$

若 $\widetilde{S}_n$ 是与 $d-d_{n_0}$ 同分布的独立 $R.V.$ 序列的部分和，则

$$\sup_{n\geqslant 1} E\|\frac{\widetilde{S}_n}{\sqrt{n}}\| < \varepsilon. \quad (4.22)$$

根据有限维空间的中心极限定理和 $Ca^+(X)$ 中序列相对弱紧的条件可知 $\sup_{n\geqslant 1} E\|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\| < \varepsilon$. 与定理 1 的证明一样可得到 $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\omega} U$，$U$ 具有 Gauss 分布. 于是 d 满足中心极限定理.

(iii)⇒(i)　若 d 满足中心极限定理，则显然

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \quad a.e.$$

从而 $Ed=0$（或者由实值情况的结论转化而得到）. 若 $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ 的极限是 G，G 是 Gauss$R.V.$ 从而 $E\|G\|^2 < \infty$. 不妨设 d 是对称的，对于 $\forall\, t > 0$，此时有

$$\limsup_{n\to\infty} P(\frac{\|S_n\|}{\sqrt{n}} > t) \leqslant P(\|G\| \geqslant t)$$

从而存在 $t_0(\geqslant 3)$ 使得 $P(\|G\| \geqslant t_0) \leqslant \varepsilon t_0^{-2}(0 < \varepsilon \leqslant 1)$，故 $\exists\, n_0$ 使得当 $n \geqslant n_0$ 时

$$P(\frac{\|S_n\|}{\sqrt{n}} > t_0) \leqslant 2\varepsilon t_0^{-2}$$

由 Levy 不等式与独立性得到

$$nP(\|d\| > t_0\sqrt{n}) = P(\max_{i\leqslant n}\|d_i\| > t_0\sqrt{n})$$
$$\leqslant 2P(\|S_n\| > t_0\sqrt{n}) \leqslant 4\varepsilon t_0^{-2}.$$

取 $t \geqslant t_0$ 并且 $t_0\sqrt{n} \leqslant t \leqslant t_0\sqrt{n+1}$，则

$$t^2P(\|d\|>t)\leqslant t^2P(\|d\|>t_0\sqrt{n})\leqslant\frac{t^2}{n}4\varepsilon t_0^{-2}\leqslant 8\varepsilon$$

于是$\lim\limits_{t\to\infty}t^2P(\|d\|>t)=0$. 对于$0<p<2$，不妨设$t\geqslant t_0$时$t^2P(\|d\|>t)<1$，此时

$$\begin{aligned}E\|d\|^p&=\int_0^\infty P(\|d\|>t)dt^p\\&=\int_0^{t_0}P(\|d\|>t)dt^p+\int_{t_0}^\infty P(\|d\|>t)dt^p\\&\leqslant t_0^p+\int_{t_0}^\infty\frac{1}{t^2}dt^p=t_0^p+\frac{p}{p-2}t_0^{p-2}<\infty.\end{aligned}$$

现在，若每个预 Gauss$R.V.$都满足中心极限定理，记

$$C_G(X)=\{x=(x_n)\in X^\infty,x_n\in X,\sum_{i=1}^\infty\xi_ix_i\ a.e.\ 收敛\}\tag{4.23}$$

其中$\{g_i\}$是对称 Gauss$R.V.$，由引理1，实际上$\sum\limits_{i=1}^n\xi_ix_i$以$L^2(\mu,X)$范数收敛. 设$g=\sum\limits_{i=1}^\infty\xi_ix_i$，则$g$的协方差泛函是

$$r_g(x^*,y^*)=Ex^*(g)y^*(g)=\sum_{i=1}^\infty x^*(x_i)y^*(x_i),\quad\forall\,x^*,y^*\in X^*.$$

记$r=\frac{2}{2-p}$. 设$\{\alpha_i\}$是一列正数，$\sum\limits_{i=1}^\infty\alpha_i^r=1$. 定义$d$使得

$$P(d=\pm\,\alpha_i^{(1-r)/p}x_i)=\frac{\alpha_i^r}{2},(i\geqslant 1)$$

则d是X值$R.V.$，其协方差与g相同($G(d)=g$)，

$$\begin{aligned}r_d(x^*,y^*)&=Ex^*(d)y^*(d)\\&=\sum_{i=1}^\infty x^*(x_i)y^*(x_i)\alpha_i^{2(1-r)/p}\alpha_i^r\\&=\sum_{i=1}^n x^*(x_i)y^*(x_i)\end{aligned}$$

上述证明表明$E\|d\|^p<\infty$，实际计算知道

$$E\|d\|^p = \Sigma\alpha_i^{1-r}\|x_i\|^p\alpha_i^r = \Sigma\alpha_i\|x_i\|^p < \infty.$$

α_i 是任意的，故最后有 $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2 < \infty$.

注意 $C_g(X)$ 是以 $\sup_{n\geqslant 1}(E\|\sum_{i=1}^{n}g_ix_i\|^2)^{1/2}$ 为范数的 Banach 空间，考虑映射 $I: C_G(X) \to l_2(X)$. 上述证明表明 I 有闭图象，于是 $\exists\, C > 0$，

$$(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant C(E\|\sum_{i=1}^{\infty}g_ix_i\|^2)^{1/2}, \quad \forall\ (x_i) \in C_G(X) \tag{4.24}$$

由引理 1，$E(\sup_{n\geqslant 1}|\xi_n|)^2 < \infty$，再由 ξ_i 的对称性和 §2 定理 6 得出

$$(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant C(E\|\sum_{i=1}^{\infty}r_i|\xi_i|x_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C'(E\|\sum_{i=1}^{\infty}r_ix_i\|^2)^{1/2}$$

所以 X 是 2 余型空间.

定理 3 设 X 是 Banach 空间，则以下两条等价：

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) 对于任何 X 值 $R.V.\,d$，d 满足中心极限定理当且仅当 $Ed = 0, E\|d\|^2 < \infty$.

证明 (i)⇒(ii) 若 X 同构于 Hilbert 空间，则 X 即是 2 型又是 2 余型的. 于是由定理 1(iii)，$Ed = 0, E\|d\|^2 < \infty$.

(ii)⇒(i) 注意每个满足中心极限定理的 $R.V.$ 是预 Gauss 的，从而由定理 2 知道 X 是 2 余型的又由定理 1，X 是 2 型的. 由 Kwapien 定理，X 同构于 Hilbert 空间.

现在让我们转到重对数率.

设 $\{d_n\}$ 是 0 均值独立 $R.V.$ 序列，$E\|d_i\|^2 < \infty$，记 $s_n^2 = \sum_{i=1}^{n}E\|d_i\|^2$ 并且设 $s_n \to \infty$. 对于实值 $R.V.$，Kolmogorov 证明了若存在正数序列 $\eta_n \to 0$ 使得

$$\|d_i\|_\infty \leqslant \eta_i s_i / (L_2 s_i^2)^{1/2}, \quad (i \geqslant 1)$$

则以概率 1

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2s_n^2 L_2 s_n^2)^{1/2}} = 1.$$

这里 $S_n = \sum_{i=1}^{n} d_i, L_2 t = L(Lt), Lt = 1 \vee \log t, t > 0.$

对于同分布的情况，Hartman 与 Wintner 证明了 d 满足重对数率当且仅当 $Ed = 0$ 并且 $Ed^2 = \sigma^2 < \infty$. 此时有

$$P(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2nL_2 n}} = \sigma) = P(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2nL_2 n}} = -\sigma) = 1. \tag{4.25}$$

Strassen 进一步证明了

$$P(\limsup_{n\to\infty} d(\frac{S_n}{\sqrt{2nL_2 n)}}, [-\sigma,\sigma]) = 0) = 1,$$

$$P(C\{\frac{S_n}{\sqrt{2nL_2 n}}\}) = [-\sigma,\sigma]) = 1 \tag{4.26}$$

其中 $d(x,K) = \inf\{|x-y|, y \in K\}$，即 x 到 K 的距离. $C\{x_n\}$ 表示序列 $\{x_n\}$ 的聚点全体.

对于 Banach 空间值 $R.V.$，有关结论要复杂得多. 首先类似于 (4.25) 的上下极限不再有意义，(4.26) 中的集合 $[-\sigma,\sigma]$ 现在应具有何种形式？其次 $Ed = 0$ 和 $E\|d\|^2 < \infty$ 能否保证有某种形式的结论成立？这些表达形式或结论都可能而且也应该反映出 Banach 空间的相应性质. 事实上，大致说来我们有两种形式的重对数率：

称 $R.V.\ d$ 满足有界重对数率：若对于 d 的独立 copy 序列，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|S_n\|}{\sqrt{2nL_2 n}} < \infty \quad a.e. \tag{4.27}$$

记为 $d \in BLIL$. 称 $R.V.\ d$ 满足紧重对数率：若存在紧集 $K \subset X$，

$$P(C\{\frac{S_n}{\sqrt{2nL_2 n}}\} \subset K) = 1 \tag{4.28}$$

(这里 $C\{\cdot\}$ 表示其中序列的聚点全体)，记为 $d \in CLIL$.

通常记 $a_n = \sqrt{2nL_2n}(n \geqslant 1)$.

Pisier，Acosta，Goodman，Kulbs，Zinn 对于 B 值情况都得到过深入的结果. 1988 年 Ledoux 与 Talagrand[1] 给出 B 值情况重对数率的等价条件：

定理 4 设 d 是取值于(可分)Banach 空间 X 的 $R.V.$，则 $d \in BLIL$ 当且仅当

(i) $E\dfrac{\|d\|^2}{L_2\|d\|} < \infty$,

(ii) 对于每个 $x^* \in X^*$, $Ex^*(d) = 0$, $E(x^*(d))^2 < \infty$,

(iii) $\{\dfrac{S_n}{\sqrt{2nL_2n}}\}$ 随机有界.

$d \in CLIL$ 当且仅当

(i) $E\dfrac{\|d\|^2}{L_2\|d\|} < \infty$,

(ii) 对于每个 $x^* \in X^*$, $Ex^*(d) = 0$, $\{(x^*(d))^2, \|x^*\| \leqslant 1\}$ 一致可积，

(iii) $\dfrac{S_n}{\sqrt{2nL_2n}} \to 0$ 依概率成立.

这是一个十分漂亮的结论，它包括了以往的许多结论. 这一结果对于任何 Banach 空间都是成立的. 这里我们不准备叙述这一定理的证明，我们将集中叙述与空间性质有关的结果. 不过为了帮助理解定理及其条件，我们有如下命题：

命题 1 (1) 若 d 满足重对数率，则 $x^*(d)$ 满足实值重对数率. (所以条件(ii) 从实值情况重对数率得到).

(2) $d \in BLIL$，则 $E\dfrac{\|d\|^2}{L_2\|d\|} < \infty$.

证明 1° (1) 是显然的

2° 若 $d \in BLIL$，则 $\tilde{d}^* = \sup\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\|d_n\|}{a_n} < \infty$ $a.e.$，取 $t > 0$ 使

$P(\widetilde{d}^* > t) \leqslant \frac{1}{2}$,类似于 §2 命题 1(i) 的证明可知

$$P(\widetilde{d}^* \leqslant t)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{\|d_n\|>a_n t\}}\chi_{\{\|d_n\|>a_n t\}}dP$$
$$\leqslant E\chi_{\{\widetilde{d}^*>t\}} = P(\widetilde{d}^* > t) \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (4.29)$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}P(\|d_n\| > a_n t) \leqslant 1$. 令 $\varphi(t) = t^2/L_2(t)$,由 $\varphi(t)$ 的递增性,

$$\varphi(t\|d\|) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi(t\|d\|)\chi_{\{ka\leqslant\varphi(t\|d\|)<(k+1)a\}}$$
$$\leqslant a + a\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\chi_{\{ka\leqslant\varphi(t\|d\|)<(k+1)a\}}$$
$$\leqslant a + a\sum_{k=0}^{\infty}\chi_{\{\varphi(t\|d\|)>ka\}},$$

这里 a 是使 $L_2 a_n \leqslant a_n$ 的正数,于是

$$E\varphi(\varepsilon\|d\|) \leqslant a + a\sum_{k=0}^{\infty}P(\varphi(\varepsilon\|d\|) \geqslant ka)$$
$$\leqslant a + a\sum_{k=0}^{\infty}P(\varphi(\varepsilon\|d\|) \geqslant \varphi(a_k))$$
$$\leqslant a + a\sum_{k=0}^{\infty}P(\varepsilon\|d\| \geqslant a_k)$$
$$= a + a\sum_{k=0}^{\infty}P(\|d_k\| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}a_k) \qquad (4.30)$$

取(4.29) 中的 $t = \frac{1}{\varepsilon}$. 则(4.29),(4.30) 给出 $E\varphi(\varepsilon\|d\|) < \infty$. 由 $\varphi(t)$ 的定义,这相当于 $E\frac{\|d\|^2}{L_2\|d\|} < \infty$. 命题得证.

现在考虑固定的 $R.V.d$, 若 $Ex^*(d) = 0, E(x^*(d))^2 < \infty (\forall\ x^* \in X^*)$. 考虑算子 $A: X^* \to L_2(P), x^* \to x^*(d)$,则 A 是闭算子从而是有界线性算子. A 的范数是 $\|A\| = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1}[E(x^*(d))^2]^{1/2}$,记后者为 $\sigma(d)$. 于是共轭算子 $A^*: L_2(P) \to X^{**}$ 也是有界的. 由于 X 可分,故 X 中存在紧集序列 K_n 使得 $P(d$

$\in K_n) \to 0$. 对于 $\xi \in L_2(P)$,

$$\langle x^*, A^*\xi\chi_{\{d\in K_n\}}\rangle = \langle Ax^*, \xi\chi_{\{d\in K_n\}}\rangle = Ex^*(d)\xi\chi_{\{d\in K_n\}}$$

x^* 是任意的,故 $A^*\xi\chi_{\{d\in K_n\}} = E\xi d\chi_{\{d\in K_n\}}$,后者是 X 中元,故由 $E\xi d\chi_{\{d\in K_n\}}$ 收敛于 $E\xi d$ 知道 $A^*\xi \in X$,即 $A^*(L_2) \subset X$.

在 $A^*(L_2)$ 上定义内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_d$ 使得 $x,y \in A^*(L_2)$ 并且 $x = A^*\xi, y = A^*\eta$ 时,$\langle x,y\rangle_d = \int_\Omega \xi\eta dP$. 容易验证此内积不因 ξ 或 η 的选取而改变. 称 $A^*(L_2)$ 上赋于此种内积的空间为 d 的再生核 Hilbert 空间(reproducing kernel Hilbert space),记为 H_d,其闭单位球记为 K_d. 当 $x = A^*\xi = E\xi d$ 时,$x^*(x) = E\xi x^*(d)$,$\xi \in L_2$,由上述定义 $\|x\|_d = \sqrt{\langle x,x\rangle_d} = \|\xi\|_2$,从而

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} x^*(x) = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} |E\xi x^*(d)| \\ &\leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \left(\int_\Omega |x^*(d)|^2 dP\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\xi|^2 dP\right)^{1/2} \\ &= \sigma(d)\|x\|_d. \end{aligned} \tag{4.31}$$

命题 2 (1) K_d 紧当且仅当 $\{(x^*(d))^2, \|x^*\| \leqslant 1\}$ 一致可积.

(2) d 是预 Gauss 的,则 K_d 相对紧.

证明 1° 若 K_d 紧,则 A 是紧算子,从而 $S = A^*A: X \to X^{**}$ 是紧算子,并且协方差函数 $r_d: X^* \times X^* \to R$,

$$r_d(x^*, y^*) = Ex^*(d)y^*(d)$$

是弱序列连续的,为此只须证明当 $x_n^* \xrightarrow{\omega} 0$ 时,$\|x_n^*(d)\|_2 \to 0$. 实际上,由共鸣定理不妨设 $\|x_n^*\| \leqslant 1$,则序列

$$\begin{aligned}E(x_n^*(d))^2 &= \langle x_n^*(d), x_n^*(d)\rangle = \langle Ax_n^*, Ax_n^*\rangle \\ &= \langle A^*Ax_n^*, x_n^*\rangle \leqslant \|A^*Ax_n^*\|.\end{aligned}$$

A^*A 是紧算子,x_n^* 弱收敛于 0,故 A^*Ax_n 范数收敛于 0.

若 $\{(x^*(d))^2, \|x^*\| \leqslant 1\}$ 不是一致可积的,则存在 $\varepsilon > 0$ 和 $C_n \uparrow \infty$,使得

$$\sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \int_{\{\|d\|>C_n\}} (x^*(d))^2 dP > \varepsilon.$$

从而必有 $\|x_n^*\| \leqslant 1$，使得

$$\int_{\{\|d\|>C_n\}} (x_n^*(d))^2 dP > \varepsilon. \tag{4.32}$$

由于 X^* 的单位球是 w^* 紧的，取 (x_n^*) 的子列，仍记为 $x_n^*(d)$ 使得 $x_n^*(d) \xrightarrow{w^*} x^*$，则 $\|x_n^*(d) - x^*(d)\|_2 \to 0$，于是 $x^*(d) \in L_2$，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{\|d\|>C_n\}} (x^*(d))^2 dP = 0$$

与(4.32)矛盾.

反过来由 $\{(x^*(d))^2, \|x^*\| \leqslant 1\}$ 的一致可积性直接得出 A 是紧的，从而 K_d 紧.

2° 若 d 是 Gauss$R.V.$，则 $E\|d\|^2 < \infty$，从而 $\{(x^*(d))^2, \|x^*\| \leqslant 1\}$ 一致可积，由上述证明 K_d 紧. 若 d 是预 Gauss 的，其相应的 Gauss$R.V.$ 是 $G(d)$，则 d 与 $G(d)$ 有相同的协方差泛函，而 K_d 仅与协方差有关，所以仍可得到 K_d 相对紧.

命题 3 若 $d \in CLIL$，则 $C\{\frac{S_n}{a_n}\} = K_d$，从而 $\{(x^*(d))^2, \|x^*\| \leqslant 1\}$ 一致可积.

证明 首先我们证明以概率1，$C\{\frac{S_n}{a_n}\} \subset K_d$. 由 K_d 定义，存在 $x_k^* \in X^*$，若 $x \in X$ 使得

$$x_k^*(x) \leqslant \|x_k^*(d)\|_2, \ \forall\, k \geqslant 1, \tag{4.33}$$

则 $x \in K_d$. 设 Ω_0 是这样的集合：$\omega \in \Omega_0$ 则 $\forall\, k \geqslant 1$，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|x_k^*(S_n(\omega))\|}{a_n} \leqslant \|x_k^*(d)\|_2.$$

当 $x \in C\{\frac{S_n}{a_n}\}$，$\omega \in \Omega_0$ 时，x 必满足(4.33)，从而 $x \in K_d$. 这说明我们的断言成立. 同时此时必有

$$\lim_{n\to\infty} d(\frac{S_n}{a_n}, K_d) = 0. \tag{4.34}$$

否则，由 $\{\frac{S_n}{a_n}\}$ 的相对紧性，必有子序列收敛于 K_d 之外的点，这是

不可能的.

现在证明 $K_d \subset C\{\frac{S_n}{a_n}\}$. 对于有限维空间,可以将问题归结为 X 是 Hilbert 空间,K_d 是其单位球的情况(因 d 的协方差阵正定,从而由某个正交基将其对角化). 设 $x \in X$, $|x| = 1$($|\cdot|$ 是其中的范数). 由(4.34),对于足够大的 n, $|\frac{S_n}{a_n}| < 1 + \varepsilon$, 由(4.27),关于一个子序列有

$$\langle \frac{S_n}{a_n}, x \rangle \geqslant \|\langle x, d \rangle\|_2 - \varepsilon = 1 - \varepsilon$$

于是对于充分大的 n,

$$\begin{aligned} |\frac{S_n}{a_n} - x|^2 &= |\frac{S_n}{a_n}|^2 + |x|^2 - 2\langle \frac{S_n}{a_n}, x \rangle \\ &\leqslant 1 + \varepsilon + 1 - 2 + 2\varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

从而 $x \in C\{\frac{S_n}{a_n}\}$. 对于 K_d 的每个内点 $|x| < 1$. 若 r 是与 d 独立的 Rademacher$R.V.$,定义 $\tilde{d} = (d, r)$,扩大 X 的维数成为 $X \times R$,此时对上述每个 x,$(x, (1 - |x|)^2)$ 是 $X \times R$ 的单位球面上元,由上述证明,此元属于 $X \times R$ 的聚点集 $C\{\frac{\tilde{S}_n}{a_n}\}$,从而 $x \in C\{\frac{S_n}{a_n}\}$.

对于无穷维的情况,仍可由定理 2 (ii)⇒(iii) 证明中的鞅逼近方法得到. 最后由 K_d 的紧性得到 $\{(x^*(d))^2, \|x^*\| \leqslant 1\}$ 一致可积.

应用定理 4 可得到与 2 型空间有关的结果.

定理 5 设 X 是可分的 2 型 Banach 空间,则 X 值 $R.V.\,d$ 满足有界重对数率当且仅当

(i) $E(\|d\|^2 / L_2\|d\|) < \infty$.

(ii) 对于每个 $x^* \in X^*$, $Ex^*(d) = 0$, $E(x^*(d))^2 < \infty$.

d 满足紧重对数率当且仅当上面(i) 和下面(ii′) 成立:

(ii′) 对于每个 $x^* \in X^*$, $Ex^*(d) = 0$ 并且 $\{(x^*(d))^2, \|x^*\| \leqslant 1\}$ 一致可积.

证明 由定理 4,只须证明充分性. 为此,只须证明对于 2 型

空间,一个 0 均值的 $R.V.d$ 只要满足(i),则$\frac{S_n}{a_n}$依概率收敛于 0(从而随机有界).

实际上不妨设 d 是对称的. 对于每个 n,

$$
\begin{aligned}
E\|S_n\| &\leqslant E\|\sum_{i=1}^{n} d_i \chi_{\{\|d_i\|\leqslant a_n\}}\| + E\|\sum_{i=1}^{n} d_i \chi_{\{\|d_i\|>a_n\}}\| \\
&\leqslant E\|\sum_{i=1}^{n} d_i \chi_{\{\|d_i\|\leqslant a_n\}}\| + nE\|d\chi_{\{\|d\|>a_n\}}\|
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

在条件(i) 之下,由分部积分可知

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} E(\|d\|\chi_{\{\|d\|>a_n\}}) = 0.
$$

又 X 是 2 型的,故

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_n}E\|\sum_{i=1}^{n} d_i \chi_{\{\|d_i\|\leqslant a_n\}}\| &\leqslant \frac{1}{a_n}\|\sum_{i=1}^{n} d_i \chi_{\{\|d_i\|\leqslant a_n\}}\|_2 \\
&\leqslant \frac{C}{a_n}(\sum_{i=1}^{n}\|d_i\chi_{\{\|d_i\|\leqslant a_n\}}\|_2^2)^{1/2} \\
&= \frac{Cn^{\frac{1}{2}}}{a_n}E(\|d\|^2\chi_{\{\|d\|\leqslant a_n\}}) \\
&\leqslant \frac{C}{\sqrt{2L_2 n}}E(t^2 + \|d\|^2\chi_{\{t\leqslant\|d\|\leqslant a_n\}}) \to 0\ (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

于是(4.35) 变为 $E\|\frac{S_n}{a_n}\| \to 0(n\to\infty)$. 故所说结论成立.

推论 设 $R.V.d$ 满足中心极限定理,则 $d \in CLIL$ 当且仅当 $E(\|d\|^2/L_2\|d\|) < \infty$.

证明 只须证明充分性. 由于 d 满足中心极限定理,所以 d 是予 Gauss 的并且

$$
\frac{S_n}{a_n} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2L_2 n}} \to 0
$$

依概率成立. 由命题 2,K_d 紧从而$\{(x^*(d))^2, \|x^*\| \leqslant 1\}$一致可积. 由定理 4 即得出 $d \in CLIL$.

最后让我们叙述一个加在空间上的条件使之成为每个 $d \in$

$L_2(\mu,X)$ 满足重对数律的等价条件.

定理 6 设 X 是 Banach 空间，以下条件等价：

(i) 存在 $C>0$ 使得任何 $n\geqslant 1, x_1,\cdots,x_n\in X$,

$$(E\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\|^2)^{1/2}\leqslant C\sqrt{L_2 n}(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2)^{1/2}. \tag{4.36}$$

(ii) 对于每个 X 值 $R.V.d$，若 $Ed=0, E\|d\|^2<\infty$，则 $d\in CLIL$.

证明 (i)⇒(ii) 由(i)，用与 §2 中一样的方法可证明，对于每个独立 0 均值 $R.V.$ 序列 $\{d_n\}$,

$$(E\|\sum_{i=1}^n d_i\|^2)^{1/2}\leqslant C\sqrt{L_2 n}(\sum_{i=1}^n E\|d_i\|^2)^{1/2} \tag{4.37}$$

特别对于与 $R.V.d$ 独立同分布的序列有

$$(E\|\sum_{i=1}^n d_i\|^2)^{1/2}\leqslant C\sqrt{nL_2 n}\|d\|_2 \tag{4.38}$$

此即 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|\frac{S_n}{\sqrt{2nL_2 n}}\|_2<\infty$. 我们证明依概率 $\frac{S_n}{\sqrt{2nL_2 n}}\to 0$，果真如此，则定理 4 中条件(i)，(ii′)，(iii′) 都成立，故 $d\in CLIL$.

实际上，对于每个 $x^*\in X^*$，$x^*(d)$ 甚至满足中心极限定理的条件，于是 $\frac{x^*(S_n)}{\sqrt{n}}\xrightarrow{\mathscr{D}}U_{x^*}$. 于是 $x^*(\frac{S_n}{a_n})\to 0$ 依概率成立. 这一事实对于有限维空间仍然成立. 现在应用在 §3 中证明 Acosta 定理的方法和上述已得到的条件可知 $\frac{S_n}{a_n}\to 0$ 依概率成立.

(ii)⇒(i) 我们知道 $d\in CLIL$ 时 $\frac{S_n}{a_n}\to 0$ 依概率成立并且 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|\frac{S_n}{a_n}\|<\infty$ $a.e.$ 现证明当 $E\|d\|^2<\infty$ 时，$\sup\limits_{n\geqslant 1}E\|\frac{S_n}{a_n}\|^2<\infty$.

实际上，不妨设 d 是对称的并且令 $d_n^*=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|d_i\|$，取 $M>0$ 使 $P(\frac{\|S_n\|}{a_n}>M)\leqslant\frac{1}{72}$，则

$$
\begin{aligned}
E\|S_n\|^2 &= \int_0^\infty P(\|S_n\|^2 > t)dt \\
&\leqslant 9\int_0^\infty P(d_n^* > \sqrt{t})dt \\
&\qquad + 36\int_0^\infty P(\|S_n\| > \sqrt{t})^2 dt \\
&\leqslant 5M^2 a_n^2 + \int_{M^2a_n^2}^\infty P(d_n^* > \sqrt{t})dt \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_{M^2a_n^2}^\infty P(\|S_n\| > \sqrt{t})dt \\
&\leqslant 90M^2a_n^2 + 18E(d_n^*)^2.
\end{aligned}
$$

$$
E(d_n^*)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n E\|d_i\|^2 = nE\|d\|^2 = 0(a_n^2)
$$

故

$$
E\|\frac{S_n}{a_n}\|^2 \leqslant 90M^2 + 0(1),
$$

得出上述所要的结论.

现在定义

$$
H(X) = \{d: d \text{ 取值于 } X \text{ 并且} \sup_{n\geqslant 1}\|\frac{S_n}{a_n}\|_2 < \infty\},
$$

以 $\|d\|_H = \sup_{n\geqslant 1}\|\frac{S_n}{a_n}\|_2$ 作为 $H(X)$ 上的范数，则 $H(X)$ 是 Banach 空间. 上述论证表明 $I: L_2(\mu, X) \to H(X), Id = d$ 具有闭图象从而是连续的. 故有 $C > 0$ 使得

$$
\sup_{n\geqslant 1}\|\frac{S_n}{a_n}\|_2 \leqslant C\|d\|_2
$$

或者

$$
\|\sum_{i=1}^n d_i\|_2 \leqslant C\sqrt{nL_2 n}\|d\|_2.
$$

仍用 §2 中证明 Acosta 定理的方法可得到(4.36).

§5 Gauss-p 型 Kwapien 定理

Rademacher 函数序列是一种特殊的对称独立 $R.V.$ 序列，实

际上借助于其它类型的对称独立 $R.V.$ 序列也可以类似地定义相应的型. 本节我们将讨论在局部理论中有重要作用的 Gauss 型(即平稳型),以及与之有关的问题. 此外我们还将证明我们已经不止一次用到过的 Kwapien 定理.

上一节我们已讲到 Gauss$R.V.$,对于 n 维标准 Gauss $R.V.$,$\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_n)$,若 $A \subset R^n$ 是 Borel 集,则

$$P((\xi_1,\cdots,\xi_n) \in A) = \frac{1}{(\sqrt{2n})^n}\int_A e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n t_i^2} dt_1,\cdots,dt_n. \quad (5.1)$$

Gauss $R.V.$ 是旋转不变的,即若 $(\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是正交矩阵,$\tilde{\xi}_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\xi_i, i = 1,\cdots,n$,则

$$P((\tilde{\xi}_1,\cdots,\tilde{\xi}_n) \in A) = P((\xi_1,\cdots,\xi_n) \in A).$$

由此可知

$$P(\sum_{i=1}^n \alpha_i\xi_i < t) = P((\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2)^{1/2}\xi_1 < t)$$

并且

$$\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\xi_i\|_p = (\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2)^{1/2}\|\xi_1\|_p, 0 < p < \infty.$$

此外注意在 $n = 1$ 的情况,(5.1) 实际上等价于 ξ 的 Fourier 变换

$$E\exp(it\xi) = \exp(-\frac{t^2}{2}).$$

定义 1 一个实值(对称)$R.V.\,\xi$ 称为是 p-Gauss 的:若 ξ 的 Fourier 变换满足

$$E\exp(it\xi) = \exp(-\frac{\sigma^p|t|^p}{2}), -\infty < t < \infty. \quad (5.2)$$

其中 σ 为某个常数,$\sigma = 1$ 时称 ξ 是标准 p-Gauss 的. 特别地,$p = 2$ 的情况就是通常的 Gauss$R.V.$ 实际上,指标 p 只能在 $0 < p \leqslant 2$ 中变化而且 $p = 2$ 与 $p < 2$ 两种情况也有相当的差异. 例如 $p = 2$,则 $E|\xi|^2 < \infty$. 但若 $p < 2$,则除非 $\xi \equiv 0$,都有 $E|\xi|^p = \infty$,即 ξ 不是 p 可积的,此时 ξ 仅仅是 r 可积的($r < p$) 并且 $\|\xi\|_r = C_{rp}\sigma, C_{rp}$

是仅与 r,p 有关的常数. 此外存在仅与 C 和 p 有关的常数 K 使得

$$\lim_{t\to\infty} t^p P(|\xi| > t) = K\sigma^p \tag{5.3}$$

一个 n 维 $R.V.\ \xi = (\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 称为是 p-Gauss 的若任意线性组合 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i$ 是 p-Gauss 的. p-Gauss$R.V.$ 又称为是 p 平稳的. 这是因为若 $\{\xi_i\}$ 是独立标准 p-Gauss R. V. 则

$$E\exp(it\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j) = \prod_{j=1}^{n} E\exp(it\alpha_j\xi_j) = \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^p|t|^p)$$

同时与 Gauss$R.V.$ 类似地有 $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j \backsim (\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^p)^{1/p}\xi_1$, 并且

$$\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\xi_j\|_r = (\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^p)^{1/p}\|\xi_1\|_r, \tag{5.4}$$

局部理论中常应用这一点建立空间 L_p 中由 $\{\xi_n\}$ 张成的子空间到 l_p 的等距同构.

今后我们说到标准 p-Gauss $R.V.$ 序列总是指相互独立的标准 p-Gauss$R.V.$

定义 2 设 X 是 Banach 空间, $1\leqslant p\leqslant 2$, $\{\xi_n\}$ 是标准 p-Gauss$R.V.$ 序列, 称 X 是 Gauss-p 型(G-p type)的, 若存在 $C>0$ 使得对于任何 n 和 $x_1,\cdots,x_n\in X$,

$$(E\|\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j\|^p)^{1/p}\leqslant C(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p)^{1/p}\quad(1<p\leqslant 2) \tag{5.5}$$

$$\sup_{t>0} tP(\|\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j\|>t)\leqslant C(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|)\quad(p=1) \tag{5.6}$$

为了把这两个式子的形式统一起来, 可以将(5.5)的左端换为

$$\sup_{t>0} tP(\|\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j\|>t))^{1/p} \triangleq \|\sum_{j=1}^{n}\xi_jx_j\|_{p\infty} \tag{5.7}$$

$\|\cdot\|_{p\infty}$ 是一个拟范数(代替三角不等式而成立 $\|x+y\|\leqslant K(\|x\|+\|y\|)$), 但 $p>1$ 时它等价于一个范数. 显然对于任一 $R.V.\ Z\in L_p(\mu,X)$, $\|Z\|_{p\infty}\leqslant\|Z\|_p$. 对于 p-Gauss$R.V.$, 实际上我们有下面

结果.

命题 设 $0<p<2$，d 是任一 X 值 p-Gauss$R.V.$，则 $\|d\|_{p\infty}<\infty$ 并且对于任何 $0<r<p$，存在 $C_{pr}>0$ 使得

$$C_{pr}^{-1}\|d\|_r\leqslant\|d\|_{p\infty}\leqslant C_{pr}\|d\|_r. \tag{5.8}$$

因此 d 的任何小于 p 阶的矩都等价.

证明 取 t_0 足够大使得 $P\left(\|d\|>\frac{t_0}{2}\right)<\frac{1}{4}$. 设 d_i 是 d 的独立 copy. 由于对于每个 n，$n^{-\frac{1}{p}}\sum_{i=1}^{n}d_i$ 与 d 有相同分布. 由(2.2)，

$$\begin{aligned}P\left(\max_{i\leqslant n}\|d_i\|>t_0n^{\frac{1}{p}}\right)&\leqslant P\left(2\max_{i\leqslant n}\|\sum_{j=1}^{n}d_i\|>t_0n^{\frac{1}{p}}\right)\\&\leqslant 2P\left(\max_{i\leqslant n}\|\sum_{j=1}^{n}d_i\|>\frac{t_0}{2}n^{\frac{1}{p}}\right)\\&=2P\left(\|d\|>\frac{t_0}{2}\right)<\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

由不等式 $1-t\leqslant e^{-t}$，$\frac{t}{1+t}\leqslant 1-e^{-t}(t\geqslant 0)$ 和独立性，

$$\begin{aligned}P\left(\max_{i\leqslant n}\|d_i\|>t\right)&=1-\prod_{i\leqslant n}(1-P(\|d_i\|>t))\\&\geqslant 1-\exp\left(-\sum_{i\leqslant n}P(\|d_i\|>t)\right)\\&\geqslant\sum_{i\leqslant n}P(\|d_i\|>t)/(1+\sum_{i\leqslant n}P(\|d_i\|>t))\end{aligned}$$

再由(5.9)式得到

$$P(\|d\|>t_0n^{\frac{1}{p}})\leqslant n^{-1},$$

由 $\|\cdot\|_{p\infty}$ 的定义不难得出 $\|d\|_{p\infty}\leqslant 2^{\frac{1}{p}}t_0<\infty$.

若 $\|d\|_r=4^{-\frac{1}{r}}t_0$，则有 $P(\|d\|>t_0)\leqslant\frac{1}{t_0^r}E\|d\|^r\leqslant\frac{1}{4}$，从而一方面

$$\begin{aligned}\|d\|_{p\infty}^p\geqslant t_0^pP(\|d\|>t_0)&=(4\|d\|_r^r)^{\frac{p}{r}}P(\|d\|>t_0)\\&=(4^{\frac{1}{r}}P(\|d\|>t_0)^{\frac{1}{p}})^p\|d\|_r^p,\end{aligned}$$

另一方面

$$\| d \|_{p\infty} \leqslant 2^{\frac{1}{p}} t_0 = 2^{\frac{1}{p}} 4^{\frac{1}{r}} \| d \|_r$$

即得出(5.8).

由此可以得到一个类似于 Kahane 定理的结论，它表明(5.5)与(5.6)的左端与指标 p 是无关的.

定理 1(Hoffmann-Jϕrgensen)　设(z_n)是实值标准 p-Gauss R.V.序列，$x_n \in X$，若$\sum_{n=1}^{\infty} z_n x_n$ a.e.收敛，则当 $q < p < 2$ 或 $q \leqslant p = 2$时，此级数q均方收敛，因此存在常数$c_{rp} > 0$使得只要$\max(r, q) < p < 2$ 或若 $\max(r,q) \leqslant p = 2$，则

$$(E \| \sum_{j=1}^{n} z_j x_j \|^r)^{1/r} \leqslant c_{rq} (E \| \sum_{j=1}^{n} z_j x_i \|^q)^{1/q}, n \geqslant 1. \quad (5.10)$$

证明　显然有 $d^* = \sup_{n \geqslant 1} \| z_n x_n \| < \infty$ a.e.，由 §2 命题 1(iii)，存在 $a > 0$ 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\| z_i x_i \| > a) = \sum_{i=1}^{\infty} P(|z_i| > \frac{a}{\| x_i \|})$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(|z_1| > \frac{a}{\| x_i \|}) < \infty,$$

所以必有$x_i \to 0$.现在先设$p = 2$，由 §4 引理 1 得到q平均收敛性.由 $E(d^*)^q < \infty$，根据 §2 定理 6 和 Kanane 不等式得到(5.10).

对于 $0 < p < 2$ 可使用上述命题.

实际上，若 $d_n = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i$ a.e.(甚至依概率)收敛于 d，则必有对任何 $t > 0$，$P(\| d_n \| > t) \to P(\| d \| > t)(n \to \infty)$，由 $\| \cdot \|_{p\infty}$ 定义，$\| d_n \|_{p\infty}$ 收敛于 $\| d \|_{p\infty}$.从而由命题中的等价关系，对于任何$r < p$，$\| d_n - d_\infty \|_r \to 0(n \to \infty)$.至于(5.10)式，可直接由(5.8)得出.

定理 2　设 X 是 Banach 空间，$1 \leqslant p_1 < p \leqslant 2$，则

(i) 若 X 是 G-p 型的，则 X 是 R-p 型的.

(ii) X 是 G-2 型的当且仅当 X 是 R-2 型的.

(iii) X 是 R-p 型的($p < 2$)，则 X 是 G-p_1 型的.

(iv) 若 X 是 $G\text{-}p$ 型的，则 X 是 $G\text{-}p_1$ 型的.

证明 1° 设 X 是 $G\text{-}p$ 型的，由于 $\{\xi_n\}$ 是对称独立的，$r_n(t)|\xi_n(\omega)|$ 与 $\xi_n(\omega)$ 有相同分布这里 $r_n(t)$ 是 Rademacher 函数，于是对于 $x_1,\cdots,x_n \in X$，

$$C\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^p \geqslant E\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\|^p = E_\omega\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j(\omega)x_j\|^p$$

$$= E_t E_\omega\|\sum_{j=1}^{n}r_j(t)|\xi_j(\omega)|x_j\|^p$$

$$\geqslant E_t\|E_\omega(\sum_{j=1}^{n}r_j(t)|\xi_j(\omega)|x_j)\|^p$$

$$= E_t\|\sum_{j=1}^{n}r_j(t)\|\xi_j\|_1 x_j\|^p$$

$$\geqslant \inf_{1\leqslant j\leqslant n}\|\xi_j\|_1 E_t\|\sum_{j=1}^{n}r_j(t)x_j\|^p$$

最后的式子用到收缩原理. 由此知道 X 是 $R\text{-}p$ 型的.

2° 只须证明 X 是 R-2 型的，则 X 是 G-2 型的. 实际上

$$(E\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\|^p)^{1/p} = (E_\omega\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\|^p)^{1/p}$$

$$= (E_\omega E_t\|\sum_{j=1}^{n}r_j(t)|\xi_j(\omega)|x_j\|^p)^{1/p}$$

$$\leqslant T_p(E_\omega\sum_{j=1}^{n}|\xi_j(\omega)|^2\|x_i\|^2)^{1/2}$$

$$\leqslant T_p\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\|\xi_j\|_2(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2)^{1/2}. \quad (5.11)$$

由此得出 X 是 G-2 型的.

3° 将上面(5.11)右端换为 p 是不行的. 因为 $p<2$ 时 $E|\xi_j|^2 = \infty$. 但对于 $p_1 < p$，先由定理 1 得到

$$(E\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\|^p)^{1/p} \leqslant C(E\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\|^{p_1})^{1/p_1}$$

然后由类似于(5.11) 的证明得到

$$(E\|\sum_{j=1}^{n}\xi_j x_j\|^{p_1})^{1/p_1}\leqslant T_{p_1}\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\|\xi_j\|_{p_1}(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^{p_1})^{1/p_1}$$

两式合并即得到所要的结论.

4° (iv) 由(i),(iii) 得到.

例 空间 $L^p[0,1]$,$l^p(1\leqslant p<2)$ 不是 G-p 型的.

实际上若不然,由上面定理2(iii) 的证明,必有某个 $\varepsilon>0$ 使得 $L^p[0,1]$,l^p 是 R-$(p+\varepsilon)$ 型的. 但由 §1 定理 4,这是不可能的.

此例还说明,与 R 型不同,G 型区间只能是开的,即若 $\bar{p}=\sup\{p,X$ 是G-p型的$\}$,则 X 的Gauss型区间只能是$(0,\bar{p})$,这一结论适用于 $p<2$ 的情况. 换句话说,若 X 是 G-p 型的,$p<2$,则存在 $p'>p$,使得 X 是 G-p' 型的. 当 $\bar{p}=2$ 时;Gauss 型区间可以开也可以闭.

定理 3 设 X 是 Banach 空间,$1\leqslant p<2$,则以下条件等价:

(i) X 是 G-p 型的.

(ii) 存在 $C>0$ 使得对于任一独立对称Radon$R.V.$序列 $\{d_n\}$,若 $d_n\in L_{p\infty}(X)$,则

$$\sup_{t>0}t^pP(\|\sum_{j=1}^{n}d_j\|>t)\leqslant C\sup_{t>0}t^p\sum_{j=1}^{n}P(\|d_j\|>t), \quad (5.12)$$

或者

$$\|\sum_{j=1}^{n}d_j\|_{p\infty}^{p}\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_{p\infty}^{p}, \quad (n\geqslant 1) \qquad (5.13)$$

回忆一个Borel可测随机变量 d 是Radon随机变量,若存在紧集序列 K_n,使得 $P(d\in\bigcup_{n\geqslant 1}^{\infty}K_n)=1$.

证明 (i)⇒(ii). 由拟范数的齐性,不妨设$\sup_{t>0}t^p\sum_{j=1}^{n}P(\|d_j\|>t)=1$. 固定 $t>0$,则 $t^pP(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|d_j\|>t)\leqslant 1$. 从而

$$t^pP(\|\sum_{j=1}^{n}d_j\|>t)\leqslant t^pP(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|d_j\|>t)$$

$$+t^pP(\|\sum_{j=1}^{n}d_j\chi_{(\|d_j\|\leqslant t)}\|>t)$$

$$\leqslant 1 + t^p P(\| \sum_{j=1}^{n} d_j \chi_{(\|d_j\| \leqslant t)} \| > t)$$

X 是 G-p 型的，从而存在 $p' > p$ 使得 X 是 R-p' 型的，于是

$$\begin{aligned} t^p P(\| \sum_{j=1}^{n} d_j \| > t) &\leqslant 1 + t^{p-p'} E \| \sum_{j=1}^{n} d_j \chi_{(\|d_j\| \leqslant t)} \|^{p'} \\ &\leqslant 1 + C t^{p-p'} \sum_{j=1}^{n} E \| d_j \chi_{(\|d_j\| \leqslant t)} \|^{p'} \\ &\leqslant 1 + C t^{p-p'} \int_0^t \sum_{j=1}^{n} P(\| d_j \| > s) d s^{p'} \\ &\leqslant 1 + C t^{p-p'} \int_0^t \frac{d s^{p'}}{s^p} \\ &= 1 + \frac{C p'}{p' - p} \end{aligned}$$

总之

$$t^p P(\| \sum_{j=1}^{n} d_j \| > t) \leqslant 1 + \frac{C p'}{p' - p}$$

或者

$$\| \sum_{j=1}^{n} d_j \|_{p\infty}^{p} \leqslant (1 + \frac{C p'}{p' - p}) \sup_{t>0} t^p \sum_{j=1}^{n} P(\| d_j \| > t).$$

(ii)⇒(i). 令 $d_j = \xi_j x_j$，容易由(5.12)得到(5.5)或(5.6)，所以 X 是 G-p 型的.

定理 4　设 X 是Banach空间，$1 \leqslant p < 2$，若 X 是 G-p 型的，则对于每个 X 值对称Radon$R.V.\, d$，d_i 是 d 的独立copy，$S_n = \sum_{j=1}^{n} d_j$，则$\frac{S_n}{n} \to 0$ 依概率成立当且仅当$\lim_{t\to\infty} t^p P(\| d \| > t) = 0$.

证明　首先注意在任何空间中，$\frac{S_n}{n^{1/p}} \to 0$ 依概率成立都意味着$\lim_{t\to\infty} t^p P(\| d \| > t) = 0$. 实际上，由(5.9)后面的证明可以得出，当 $P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} \| d_j \| > t) \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$\sum_{j=1}^{n} P(\| d_k \| > t) \leqslant 2P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} \| d_j \| > t)$，此时

$$\frac{1}{4} \geqslant P(\| S_n \| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}) \geqslant \frac{1}{2} P(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \| d_j \| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}})$$

$$\geqslant \frac{n}{4} P(\| d \| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}). \qquad (5.14)$$

于是

$$\lim_{n \to \infty} nP(\| d \| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}) = \lim_{n \to \infty} P(\| S_n \| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}) = 0.$$

后者是由于 $n^{-\frac{1}{p}} S_n$ 依概率收敛于 0. 对于 t, 取 n 使得 $n \leqslant t < n + 1$ 则

$$tP(\| d \| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}}) \leqslant \frac{n+1}{n} \cdot nP(\| d \| > \varepsilon n^{\frac{1}{p}})$$

即得出所要的结论.

其次, 在有限维空间中这一事实的逆也成立. 为此只须考虑实值 $R..V$ 的情况. 对于 $\forall\ \varepsilon, \delta > 0$,

$$P(|S_n| > 2\varepsilon n^{1/p}) \leqslant nP(|d| > \delta n^{\frac{1}{p}})$$

$$+ P(| \sum_{i=1}^{n} d_i \chi_{\{|d_i| \leqslant \delta n^{\frac{1}{p}}\}} | > 2\varepsilon n^{\frac{1}{p}})$$

由于 $Ed = 0$, 则

$$| \sum_{i=1}^{n} Ed_i \chi_{\{|d_i| \leqslant \delta n^{\frac{1}{p}}\}} | \leqslant nE|d| \chi_{\{|d| > \delta n^{\frac{1}{p}}\}}.$$

当 n 足够大时, 由所给条件第二部分可小于 $\varepsilon n^{\frac{1}{p}}$. 于是可以得到

$$P(| \sum_{j=1}^{n} d_j \chi_{\{|d_j| \leqslant \delta n^{\frac{1}{p}}\}} | > 2\varepsilon n^{\frac{1}{p}})$$

$$\leqslant P(| \sum_{j=1}^{n} (d_j \chi_{\{|d_j| \leqslant \delta n^{1/p}\}} - E(d_j \chi_{\{|d_j| \leqslant \delta n^{1/p}\}}) | > \varepsilon n^{\frac{1}{p}})$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 n^{2/p}} \sum_{j=1}^{n} E|d_j|^2 \chi_{\{|d_j| \leqslant \delta n^{1/p}\}} \qquad (5.15)$$

由分部积分

$$n^{1-\frac{2}{p}} E|d|^2 \chi_{\{|d| \leqslant \delta n^{\frac{1}{p}}\}} \leqslant \int_0^{\delta} nt^p P(|d| > tn^{\frac{1}{p}}) \frac{dt^2}{t^p}$$

$$= \frac{2}{2-p} \int_0^{\delta} nt^p P(|d| > tn^{\frac{1}{p}}) dt^{2-p} \qquad (5.16)$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} nt^p P(|d| > tn^{1/p}) = 0$,

对(5.16)以及 t^{-p} 应用控制收敛定理,则上述积分收敛于0.总之

$$\lim_{n\to\infty} P(|S_n| > 2\varepsilon n^{\frac{1}{p}}) = 0.$$

最后假定 X 是 G-p 型的,则类似于 §3 定理4(i)⇒(iii)的论证可知 $\frac{S_n}{n^{1/p}} \to 0$ 依概率成立.

现在让我们转到 Kwapien 定理.

以 $\{\xi_i\}$ 表示独立2-Gauss$R.V.$,(δ_i) 表示 Bernoulli 独立 $R.V.$ 序列,$P(\delta_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$.固定正整数 n,令

$$\delta_i^m = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{im+k}, i = 1,\cdots,n; m = 1,2,\cdots, \tag{5.17}$$

由概率论的基本定理知道当 $m \to \infty$ 时,$(\delta_1^m,\cdots,\delta_n^m)$ 的联合分布收敛于 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 的联合分布,或等价的,对于任一有界连续函数 h: $R^n \to R$

$$\lim_{m\to\infty} Eh(\delta_1^m,\cdots,\delta_n^m) = Eh(\xi_1,\cdots,\xi_n)$$

引理1 若 $h:R^n \to R$ 是连续函数,并且

$$h(s_1,\cdots,s_n)e^{-\sum\limits_{i=1}^n |s_i|} \to 0 \qquad (\sum_{i=1}^n |s_i| \to \infty) \tag{5.18}$$

则

$$\lim_{m\to\infty} Eh(\delta_1^m,\cdots,\delta_n^m) = Eh(\xi_1,\cdots,\xi_n) \tag{5.19}$$

证明 设 X 是满足(5.18)的所有连续函数 $h:R^n \to R$ 的空间,X 是线性空间.若以

$$\| h \| = \sup_{(s_1,\cdots,s_n)\in R^n} |h(s_1,\cdots,s_n)| e^{-\sum\limits_{i=1}^n |s_i|}$$

为 X 上的范数,则 X 是 Banach 空间并且有界连续函数全体在其中稠密.记

$F_m(h) = Eh(\delta_1^m,\cdots,\delta_n^m), h \in X$

$F(h) = Eh(\xi_1,\cdots,\xi_n)$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2}\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} h(s_1,\cdots,s_n)e^{-\sum_{i=1}^{n}|s_i|}ds_1,\cdots,ds_n,$$

对于有界连续函数 h，上面提到的依分布收敛将导致

$$\lim_{m\to\infty} F_m(h) = F(h).$$

注意 F_m, F 是 X 上的连续线性泛函，故为证明所要的结论，只须证明 F_m 的一致有界性. 然后通过稠密性得出(5.19). 利用(δ_i) 的独立性知道

$$\begin{aligned}
\| F_m \| &\leqslant E\exp(\sum_{i=1}^{n}|\delta_i^m|) = (E\exp|\delta_1^m|)^n \\
&\leqslant (E\exp\delta_1^m + E\exp(-\delta_1^m))^n \\
&= ((E\exp\frac{\delta_1}{\sqrt{m}})^m + (E\exp(-\frac{\delta_1}{\sqrt{m}}))^m)^n \\
&= 2^n(\frac{1}{2}(\exp\frac{1}{\sqrt{m}} + \exp(-\frac{1}{\sqrt{m}}))^{mn} \\
&\leqslant 2(2\sqrt{e})^n
\end{aligned}$$

故结论成立.

定理 5(Kwapien)　对于任何(实或复)Banach 空间 X，以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) $\exists\ C \geqslant 1$ 使得对于任何 $n, x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$C^{-1}\sum_{i=1}^{n}\| x_i \|^2 \leqslant E\| \sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i \|^2 \leqslant C\sum_{i=1}^{n}\| x_i \|^2 \quad (5.20)$$

其中$\{\delta_i\}$是独立 Bernoulli $R.V.$ 序列.

(iii) $\exists\ C \geqslant 1$ 使得对于任何 $n, x_1, \cdots, x_n \in X$,

$$C^{-1}\sum_{i=1}^{n}\| x_i \|^2 \leqslant E\| \sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i \|^2 \leqslant C\sum_{i=1}^{n}\| x_i \|^2 \quad (5.21)$$

其中$\{\xi_i\}$是独立 Gauss $R.V.$ 序列.

(iv) $\exists\ C \geqslant 1$ 使得对于任何 n 和 $x_1, \cdots, x_n \in X$ 以及满足

$$\sum_{j=1}^{n}|\sum_{i=1}^{n}a_{ij}s_j|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}|s_j|^2, \quad \forall\ (s_1,\cdots,s_n) \in R^n \quad (5.22)$$

的 n 阶矩阵(a_{ij}) 都有

$$\sum_{j=1}^{n}\|\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j\|^2\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2 \tag{5.23}$$

特别地,(i) 与(ii) 的等价性说明,同时是 2- 型和 2- 余型的空间必同构于 Hilbert 空间.

证明　(i)⇒(ii)　注意 Rademacher 函数列(r_n) 是独立 Bernoulli $R.V.$ 序列并且我们已证明了 Hilbert 空间即是 R-2 型又是 R-2 余型的. 型和余型又是同构不变的,于是(5.20) 成立.

(ii)⇒(iii)　令 $\widetilde{x}_{im+k}=\dfrac{x_i}{\sqrt{m}}(i=1,\cdots,n;k=0,1,\cdots;m=1,2,\cdots)$,则

$$\sum_{j=1}^{mn}\|\widetilde{x}_j\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.$$

并且

$$E\|\sum_{i=1}^{n}\delta_i^m x_i\|^2=E\|\sum_{j=1}^{mn}\delta_j\widetilde{x}_j\|^2,m=1,2,\cdots$$

将(5.20) 应用于 $x_j(1\leqslant j\leqslant mn)$ 得到

$$C^{-1}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\leqslant E\|\sum_{i=1}^{n}\delta_i^m x_i\|^2\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \tag{5.24}$$

令 $h(s_1,\cdots,s_n)=\|\sum_{i=1}^{n}s_ix_i\|^2$,由于

$$\|\sum_{i=1}^{n}s_ix_i\|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|s_i|^2\|x_i\|^2\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_i\|^2(\sum_{i=1}^{n}|s_i|)^2$$

所以

$$h(s_1,\cdots,s_n)e^{-\sum_{i=1}^{n}|s_i|}\to 0\quad(\sum_{i=1}^{n}|s_i|\to\infty)$$

应用引理 1 于(5.24) 便得到(5.21).

(iii)⇒(iv)　设(a_{ij}) 满足(5.22),则 $T=(a_{ij})$ 成为 $l_2^n\to l_2^n$ 的有界线性算子,这种算子全体构成 n^2 维的线性赋范空间 $\mathscr{T}$. $\mathscr{T}$ 的单位球 B 的每个元是 n^2+1 个 B 的端点的凸组合(Krein-Milman 定理与 Carathéodory 定理). 而 B 的每个端点恰是 l_2^n 的等距同构.

因此为证明(iv) 成立,只须对每个端点证明(5.23) 成立.

现设$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}s_i a_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{n}s_i^2, \forall\ (s_1,\cdots,s_n)\in l_2^n$并且$|\mathrm{Det}(a_{ij})| = 1$. 令$t_j = \sum_{i=1}^{n}s_i a_{ij}\quad (j=1,\cdots,n)$,利用(5.21)可知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\|^2 \leqslant CE\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\|^2 \\
&= \frac{C}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\|\sum_{i=1}^{n}s_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\|^2 e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}s_i^2}ds_1,\cdots,ds_n \\
&= \frac{C}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\|\sum_{j=1}^{n}t_j x_j\|^2 e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}t_j^2}|\mathrm{Det}(a_{ij})|^{-1}dt_1,\cdots,dt_n \\
&= CE\|\sum_{j=1}^{n}r_j x_j\|^2 \leqslant C^2\sum_{i=1}^{n}\|x_j\|^2.
\end{aligned}
$$

对于复空间,容易化为实部和虚部得到上述结果.

(iv)⇒(i)　设$y_j = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j (i=1,\cdots,n)$,其中$(a_{ij})$满足(5.22),则对于$\forall\ x^*\in X^*$.

$$
\sum_{i=1}^{n}|x^*(y_i)|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x^*(x_j)|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}|x^*(x_j)|^2 \quad (5.25)
$$

反之,若$x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$满足(5.25),设$t_j = x^*(x_j),(1\leqslant j\leqslant n)$

$$
F = \{(t_1,\cdots,t_n),x^*\in X^*\}
$$

则$F\subset l_2^n$并且是线性子空间.定义$A:F\to l_2^n$,

$$
A(t_1,\cdots,t_n) = (x^*(y_1),\cdots,x^*(y_n)),\forall\ (t_1,\cdots,t_n)\in F
$$

由(5.25),$\|A\|\leqslant 1$.令$\widetilde{A} = AP:l_2^n\to l_2^n$,其中$P$是从$l_2^n$到$F$的正交投影.若$A$关于单位向量基的表现矩阵是$(a_{ij})$,即

$$
A(t_1,\cdots,t_n) = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}t_j,(t_1,\cdots,t_n)\in l_2^n
$$

则(a_{ij})满足(5.22),因为$\|A\| = \|\widetilde{A}\|\leqslant 1$,并且对于任何$x^*\in X^*$有

$$(x^*(y_1),\cdots,x^*(y_n)) = A(x^*(x_1),\cdots,x^*(x_n))$$
$$= (\sum_{j=1}^n a_{1j}x^*(x_j),\cdots,\sum_{j=1}^n a_{nj}x^*(x_j)).$$

这说明 $x^*(y_i) = x^*(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)(\forall\ x^* \in X^*)$ 等价于 $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$，$(i = 1,\cdots,n)$. 于是(5.25) 意味着(5.23). 由下一节(§6) 将要证明的定理 11,X 同构于 Hilbert 空间.

引理 2 设 X 是(实或复)Banach 空间,$\{\theta_i\}$ 是$[0,1]$ 的完备正交系,若 $\exists\ C > 0$,使得 $\forall\ x_1,\cdots,x_n \in X$

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n \theta_i(t)x_i \|^2 dt \leqslant C\sum_{i=1}^n \| x_i \|^2 \tag{5.26}$$

则对于某个 $C > 0$ 有

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \|^2 dt \leqslant C\sum_{i=1}^n \| x_i \|^2 \tag{5.27}$$

这里$\{r_n\}$ 是 Rademacher 函数序列. 若同时将(5.26) 和(5.27) 的"$\leqslant$"换为"$\geqslant$",结论仍成立.

证明 由(θ_k) 的完备性,对于任何 $\varepsilon > 0$,可以找到正整数的增加序列$\{k_j\}$,$\{m_j\}$ 和规范正交序列$\{h_j\}$,使得

$$h_j = \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (h_j,\theta_k)\theta_k$$

$$\int_0^1 |h_j(t) - r_{m_j}(t)|^2 dt < \varepsilon/2^j \qquad (j = 1,2,\cdots)$$

对于 $\forall\ x_1,\cdots,x_n \in X$ 有

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \|^2 dt = \int_0^1 \| \sum_{j=1}^n r_{n_j}(t)x_j \|^2 dt$$

由三角不等式

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{j=1}^n r_{m_j}(t)x_j \|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant (\int_0^1 \| \sum_{j=1}^n (r_{m_j}(t)$$
$$- h_j(t))x_j \|^2 dt)^{1/2} + \left(\int_0^1 \| \sum_{j=1}^n h_j(t)x_j \|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \sqrt{\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\Big)^{1/2}+\Big(\int_0^1\|\sum_{j=1}^{n}h_j(t)x_j\|^2dt\Big)^{1/2}$$

由 $1=\|h_j\|_2^2=\sum\limits_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}|(h_j,\theta_k)|^2$，根据(5.26)得到

$$\begin{aligned}\int_0^1\|\sum_{j=1}^{n}h_j(t)x_j\|^2dt&=\int_0^1\|\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}(h_j,\theta_k)\theta_k\Big)x_j\|^2dt\\&\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}|(h_j,\theta_k)|^2\|x_j\|^2\\&=C\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2,\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1\|\sum_{j=1}^{n}r_j(t)x_j\|^2dt\leqslant(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{C})^2\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2.$$

逆向不等式证明与此类似.

推论 设 X 是(实或复)Banach 空间，$\{\theta_i\}$ 是 $L_2[0,1]$ 中的完备正交系，则 X 同构于 Hilbert 空间当且仅当存在 $C>0$，使得对于任何 $n\geqslant 1, x_1,\cdots,x_n\in X$

$$C^{-1}\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2\leqslant\int_0^1\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j(t)x_j\|^2dy\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2$$

§6 p 绝对可和算子

定义 1 设 X, Y 是 Banach 空间，$1\leqslant p<\infty$. $T:X\to Y$ 是线性算子，称 T 是 p 绝对可和的(p-absolutely summing)，若存在 $C>0$ 使得对于任何 n 和 $x_1,\cdots,x_n\in X$,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\|Tx_i\|^p\Big)^{1/p}\leqslant C\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\Big(\sum_{i=1}^{n}|x^*x_i|^p\Big)^{1/p}\qquad(6.1)$$

T 是 p 绝对可和的记为 $T\in\Pi_p(X,Y)$. 称满足(6.1)的最小常数 c 为 T 的 p 绝对可和范数(p-absolutely summing norm)，记为

$\Pi_p(T)$. 1 绝对可和算子又简称为绝对可和算子,见第 1 章 §2.

容易验证以下基本事实:

(i) p 绝对可和算子是有界算子,并且 $\|T\| \leqslant \Pi_p(T)$.

(ii) 也可以定义 ∞ 绝对可和算子,即满足

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n} \|Tx_i\| \leqslant c \sup_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ \|x^*\|\leqslant 1}} |x^* x_i|$$

的算子,但由共鸣定理知道,任何有界线性算子是 ∞ 绝对可和的.

(iii) $(\Pi_p(X,Y)、\Pi_p(\cdot))$ 是 Banach 空间.

(iv) 若 $T \in \Pi_p(X,Y)$, $S \in \mathscr{B}(Y,Z)$ 或 $S \in \mathscr{B}(Z,X)$,这里 X、Y、Z 都是 Banach 空间,则相应地 $ST \in \Pi_p(X,Z)$ 或 $TS \in \Pi_p(Z,Y)$ 并且 $\Pi_p(ST) \leqslant \|S\| \Pi_p(T)$, $\Pi_p(TS) \leqslant \Pi_p(T)\|S\|$.

(v) 序列 $\{x_n\} \subset X$ 称为是 wl^p 的,如果对于 $\forall\, x^* \in X^*$, $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p < \infty$. 由闭图象定理知道(6.1)的右端有限当且仅当 $\{x_n\}$ 是 wl^p 的. 所以 T 是 p 绝对可和算子当且仅当 T 将每个 wl^p 序列变为 l^p 序列.

例 1 对于任何无穷维空间 X 和 $0 < p < \infty$,单位算子 $I: X \to X$ 不是 p 绝对可和的. 例如 $X = l^2$, $\{e_n\}$ 是标准基. 容易知道不存在常数 $C > 0$ 使(6.1)成立.

例 2 设 Ω 是紧 Hausdorff 空间,μ 是 Ω 上的正则概率测度,则单位算子 $I: C(\Omega) \to L^p(\Omega)$ 是 p 绝对可和算子($1 \leqslant p < \infty$).

实际上,若 $f_1, \cdots, f_n \in C(\Omega)$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|If_i\|_p^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |f(\omega)|^p d\mu\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |\delta_\omega(f_i)|^p d\mu\right)^{1/p}$$

这里 $\delta_\omega \in C(\Omega)^*$, $\delta_\omega(f) = f(\omega)$,故上式

$$\leqslant \left[\int_\Omega \left(\sup_{\substack{x^* \in C(\Omega)^* \\ \|x^*\|\leqslant 1}} \sum_{i=1}^{n} |x^* f_i|^p\right) d\mu\right]^{1/p}$$

$$= \sup_{\substack{x^* \in C(\Omega)^* \\ \|x^*\| \leqslant 1}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^* f_i|^p \right)^{1/p} \tag{6.2}$$

于是 $I \in \Pi_p(C(\Omega), L_p(\Omega))$ 并且 $\Pi_p(I) \leqslant 1$.

例 3 自然包含算子 $l_1 \to l_2$ 是 1 绝对可和的. 实际上设 $x_1, \cdots, x_n \in l_1$, 应用 Khintchin 不等式, 仍记 $\{r_i\}$ 为 Rademacher 函数列,

$$\sum_{i=1}^{n} \| Ix_i \|_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{ij}|^2 \right)^{1/2} \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \| \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} r_j \|_1$$

$$= C \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 | \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} r_j | d\mu = C \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} | \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} r_j | d\mu.$$

注意 $l_1^* = l_\infty$. 对于每个 $t \in [0,1]$, $(r_i(t)) \in l_\infty$, 于是上式

$$\leqslant C \int_0^1 \left(\sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |x^* x_i| \right) d\mu$$

$$= C \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |x^* x_i|.$$

定理 1 设 X、Y 是 Banach 空间, $1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$, 则 $\Pi_{p_1}(X, Y) \subset \Pi_{p_2}(X, Y)$, 并且 $\Pi_{p_2}(T) \leqslant \Pi_{p_1}(T)$.

证明 设 $T \in \Pi_{p_1}(X, Y)$, $\dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2} = \dfrac{1}{r}$. 若 $x_1, \cdots, x_n \in X$, 并且 $x_i \neq 0$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是标量, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| \lambda_i T x_i \|^{p_1} \right)^{1/p_1} \leqslant \Pi_{p_1}(T) \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i x^* x_i|^{p_1} \right)^{1/p_1}$$

$$\leqslant \Pi_{p_1}(T) \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^r \right)^{\frac{1}{r}} \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^* x_i|^{p_2} \right)^{1/p_2}$$

特别地, 取 $\lambda_i = \| Tx_i \|^{p_2/r}$, 则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| \lambda_i T x_i \|^{p_1} \right)^{1/p_1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\| Tx_i \|^{p_2/r} \| Tx_i \|^{p_1} \right) \right)^{1/p_1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \| Tx_i \|^{p_2} \right)^{1/p_1},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^r \right)^{1/r} = \left(\sum_{i=1}^{n} \| Tx_i \|^{p_2} \right)^{1/r},$$

于是

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|Tx_i\|^{p_2}\right)^{1/p_2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\|Tx_i\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{r}}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i Tx_i\|^{p_1}\right)^{1/p_1}\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^{r}\right)^{1/r}$$

$$\leqslant \Pi_{p_1}(T)\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*x_i|^{p_2}\right)^{1/p_2}.$$

定理 2(Grothendieck-Pietsch)　设 $T:X\to Y$ 是 p 绝对可和的，则存在正则 Borel 概率测度 μ，定义在 $(B(X^*),w^*)$ 上，使得

$$\|Tx\|\leqslant \Pi_p(T)\left(\int_{B(X^*)}|x^*x|^p d\mu(x^*)\right)^{1/p} \tag{6.3}$$

$\forall\, x\in X$，其中 $B(X^*)=\{x^*\in X^*,\|x^*\|\leqslant 1\}$.

证明　对于 $x_1,\cdots,x_n$，定义函数

$$\varphi(x^*)=\Pi_p^p(T)\sum_{i=1}^{n}|x^*x_i|^p-\sum_{i=1}^{n}\|Tx_i\|^p \tag{6.4}$$

φ 在 $B(X^*)$ 的 w^* 拓朴下是连续的. 若 $\Phi\subset C(B(X^*),w^*)$ 是如此的 φ 的全体，由于 p 绝对可和性，每个 $\varphi\in\Phi$ 在 $(B(X^*),w^*)$ 的某个点上取非负值. 注意 Φ 还是一个凸锥，这一凸锥与在 $(B(X^*),w^*)$ 上全取负值的连续函数的凸锥 N 无公共点. 后者具有非空内部，于是由隔离定理，$\exists\,\mu\in C(B(X^*),w^*)^*$，使得

$$\mu(\psi)<0\leqslant\mu(\varphi),\quad \forall\,\varphi\in\Phi,\psi\in N \tag{6.5}$$

不妨设 $\|\mu\|=1$，$(B(X^*),w^*)$ 是紧的，由 Riesz 表现定理

$$\mu(\varphi)=\int_{B(X^*)}\varphi d\mu(x^*),\qquad \forall\,\varphi\in C(B(X^*),w^*).$$

(6.5) 表明 μ 在 $(B(X^*),w^*)$ 上是非负 Borel 测度. $\|\mu\|=1$ 表明 μ 是概率测度.

以 φ_x 表示由 x 确定的 $C(B(X^*),w^*)$ 中元，$\varphi_x(x^*)=x^*x$，则

$$\mu(\varphi_x)=\int_{B(X^*)}\varphi_x d\mu(x^*).$$

另一方面，由于 $\varphi_x\in\Phi$，$x_1=\cdots=x_n=x$，

$$\| Tx \|^p = \int_{B(X^*)} \| Tx \|^p d\mu(x^*) \leqslant \Pi_p^p(T) \int_{B(X^*)} |x^* x|^p d\mu(x^*)$$

从而

$$\| Tx \| \leqslant \Pi_p(T) \left(\int_{B(X^*)} |x^* x|^p d\mu(x^*) \right)^{1/p}. \qquad \forall\, x \in X$$

推论 1 设$T \in \mathscr{B}(X,Y)$是2绝对可和的，则存在$(B(X^*), w^*)$上的概率测度μ和算子$S: L_2(\mu) \to Y$，使得$\| S \| = \Pi_2(T)$，并且$T = SJI$. 其中$I: X \to C(B(X^*), w^*), x \to x^* x$; $J: C(B(X^*), w^*) \to L_2(\mu)$是自然包含映射.

证明 由 Grothendieck-Pietsch 不等式直接得出.

设X,Y是 Hilbert 空间，$T \in \mathscr{B}(X,Y)$，称T是 Hilbert-Schmidt 算子，若对于某个（从而任何一个）完备正交系$\{e_i\}$，$\sum_{i=1}^{\infty} \| Te_i \|^2 < \infty$. 称$\sigma(T) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \| Te_i \|^2 \right)^{1/2}$为$T$的 Hilbert-Schmidt 范数. 从$X$到$Y$的 Hilbert-Schmidt 算子全体记为$\Sigma(X, Y)$. 事实上，$\Pi_2(X,Y) = \Sigma(X,Y)$并且$\Pi_2(T) = \sigma(T)$.

每个 Hilbert-Schmidt 算子可表示为

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\cdot, e_n) f_n \tag{6.6}$$

其中λ_i是标量，$(\lambda_i) \in l_2$，$\{e_n\}$是X中的规范正交序列，$\{f_n\}$是Y中规范正交序列并且此时$\| (\lambda_i) \|_2 = \sigma(T)$.

定理 3 设X,Y是 Hilbert 空间，则

(i) $\Pi_2(X,Y) = \Sigma(X,Y)$并且$\Pi_2(T) = \sigma(T)$.

(ii) 若$1 \leqslant p \leqslant 2$，则$\Pi_p(X,Y) = \Pi_2(X,Y)$

证明 1° 若$T \in \Pi_2(X,Y)$，$e_1, \cdots, e_n \in X$是规范正交向量，则对于$\forall\, x \in X$，$\sum_{i=1}^{n} |(x,e_i)|^2 \leqslant \| x \|^2$，从而

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| Te_i \|^2 \right)^{1/2} \leqslant \Pi_2(T) \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^* e_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \Pi_2(T) \sup_{\| x \| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |(x,e_i)|^2 \right)^{1/2} \leqslant \Pi_2(T)$$

这说明 $T \in \Sigma(X,Y)$ 并且 $\sigma(T) \leqslant \Pi_2(T)$.

反之若 $T \in \Sigma(X,Y)$，假设

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) f_i$$

其中 $\|(\lambda_2)\|_2 = \sigma(T)$，注意$\{e_i\}$，$\{f_i\}$ 分别是 X，Y 中的规范正交系，故

$$\|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 |(x, e_i)|^2.$$

若 $x_1, \cdots, x_n \in X$，则

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \|Tx_j\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 |(x_j, e_i)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \sum_{j=1}^{n} |(x_j, e_i)|^2 \leqslant \sigma^2(T) \sup_{\|x\| \leqslant 1} \sum_{j=1}^{n} |(x_j, x)|^2\end{aligned}$$

故 $T \in \Pi_2(X,Y)$ 并且 $\Pi_2(T) \leqslant \sigma(T)$.

2° 只须证明 $\Pi_2(X,Y) \subset \Pi_p(X,Y)$，若 $T \in \Pi_2(X,Y)$，由 1°，T 可写成

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) f_n$$

其中符号意义同上，并且 $\sigma(T) = \|(\lambda_n)\|_2$. 定义算子 $T_1 : X \to l_1$,

$$T_1 x = (\lambda_1(x, e_1), \lambda_2(x, e_2), \cdots,), \qquad \forall\, x \in X$$

则

$$\begin{aligned}\|T_1 x\|_1 = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x, e_n)\Big| &\leqslant \|(\lambda_n)\|_2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2\Big)^{1/2} \\ &\leqslant \|(\lambda_n)\|_2 \|x\|.\end{aligned}$$

于是 $\|T_1\| \leqslant \sigma(T)$. 再定义 $S : l_2 \to Y$, $S((\alpha_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$, $\forall\, (\alpha_n) \in l_2$ 则 $\|S\| \leqslant 1$，于是

$$T = SIT_1\text{，其中 } I : l_1 \to l_2$$

为自然包含算子. 由例 3 知道 I 是 1 绝对可和的. 即 $T \in \Pi_1(X,Y)$. 从而 $\Pi_2(X,Y) \subset \Pi_1(X,Y) \subset \Pi_p(X,Y)$.

定理 4 若 Banach 空间 Y 是 R-2 余型的. 则对于任何 $q>2$ 和任何 Banach 空间 X, $\Pi_2(X,Y)=\Pi_q(X,Y)$.

证明 只须证明 $\Pi_q(X,Y)\subset\Pi_2(X,Y)$. 设 $T\in\Pi_q(X,Y)$, 由 Grothendieck-Pietsch 定理

$$\|Tx\|\leqslant\Pi_q(T)\left(\int_{B(X^*)}|x^*x|^q d\mu(x^*)\right)^{1/q}. \qquad \forall\, x\in X$$

由于 Y 是 R-2 余型的, 设 $C_2(Y)$ 是余型常数, 则

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^n\|Tx_j\|^2\right)^{1/2}&\leqslant C_2(Y)\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)Tx_j\right\|^2dt\right)^{1/2}\\
&\leqslant C_2(Y)\left(\int_0^1\left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)Tx_j\right\|^q dt\right)^{1/q}\\
&\leqslant C_2(Y)\Pi_q(T)\left(\int_0^1\int_{B(X^*)}\left|\sum_{j=1}^n r_j(t)x^*x_j\right|^q dt\,d\mu(x^*)\right)^{1/q}\\
&= C_2(Y)\Pi_q(T)\left(\int_{B(X^*)}\int_0^1\left|\sum_{j=1}^n r_j(t)x^*x_j\right|^q dt\,d\mu(x^*)\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

由 Khintchin 不等式, 最后的式子

$$\begin{aligned}
&\leqslant C_2(Y)\Pi_q(T)B_q\left(\int_{B(X^*)}\left(\sum_{j=1}^n|x^*x_j|^2\right)^{q/2}d\mu(x^*)\right)^{1/q}\\
&\leqslant C_2(Y)\Pi_q(T)B_q\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\left(\sum_{j=1}^n|x^*x_j|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

于是 $T\in\Pi_2(X,Y)$.

推论 2 设 X,Y 是 Hilbert 空间, 则对于任何 $1\leqslant p,q<\infty$, $\Pi_p(X,Y)=\Pi_q(X,Y)$.

定理 5 设 $1\leqslant p<\infty$, 则每个 p 绝对可和算子是 w 紧的和全连续的.

证明 由 Grothendieck-Pietsch 定理, (6.3) 成立. 记其中的 $B(X^*)=\Omega$, $\mu(x^*)=\mu$, $\omega=x^*$, $x^*x=x(\omega)$, 则

$$\|Tx\|\leqslant\Pi_p(T)\|x\|_{L_p(\mu)}. \tag{6.7}$$

于是 T 分解为两算子 SI 的乘积, 其中 $I: X\to L_p(\mu)$. $x\mapsto x^*x=x(\omega)$ 是从 X 到 $L_p(\mu)$ 的自然包含算子. $S: L_p(\mu)\to Y$, $x(\omega)\mapsto$

Tx. 上式表明 S 是有界算子，注意 $L_p(\mu)$ 是自反空间，于是作为子空间 X 是自反的，其单位球 w 紧. 从而 T 是 w 紧算子.

又若$\{x_n\}$是X中的w收敛列，不妨设$x_n w$收敛于0，即$\{x_n\}$在$B(X^*)$上点点收敛于0. 由 Grothendieck-Pietsch 不等式和控制收敛定理，$\{Tx_n\}$ 范数收敛于 0. 于是 T 全连续.

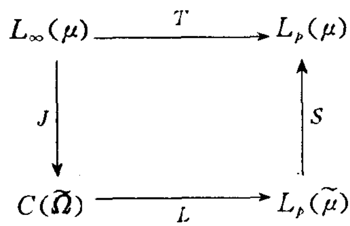
下面推论即 Dvoretzky-Rogers 定理，我们已数次用到过它.

推论 3 若对于某个 $1 \leqslant p < \infty$，由 $\sum_{n=1}^{\infty} |x^* x_n|^p < \infty (\forall x^* \in X^*)$ 恒可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^p < \infty$，则 $\dim X < \infty$.

证明 若所述条件为真，显然单位算子$I: X \to X$是p绝对可和的. 由定理 5，I 是 w 紧和全连续的. 若$\{x_n\}$是 X 中的无穷序列，$\| x_n \| \leqslant 1$，则$\{Ix_n\}$有子序列$\{Ix_{n_k}\}$弱收敛. 于是又有$\{I(Ix_{n_k})\}$范数收敛. 即$\{x_{n_k}\}$本身范数收敛. 于是 X 的单位球相对紧，这说明 $\dim X < \infty$.

定理 6 设(Ω, Σ, μ)是概率空间，$1 \leqslant p < \infty$. 则从 $L_\infty(\mu)$ 到 $L_p(\mu)$ 中的自然包含算子是 p 绝对可和的，并且 $\Pi_p(T) = 1$.

证明 这里将引用一个事实，它涉及到某些布尔代数的知识：即通过布尔代数的 Stone 表现定理，对于给定的概率空间(Ω, Σ, μ)可以建立一个由某个紧 Hausdorff 空间的全体既开又闭子集构成的 σ 代数，以及概率空间$(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$. 使得 $L_\infty(\mu)$ 等距同构于 $C(\widetilde{\Omega})$. 由此可以将 T 分解为 $T = SLJ$.



这里 $S: L_p(\widetilde{\mu}) \to L_p(\mu)$ 是经过一个保测变换得来的，故 S 是有界的. 在例 3 中已经证明过，$L: C(\widetilde{\Omega}) \to L_p(\widetilde{\mu})$ 是 p 绝对可和的. 于是

T p 绝对可和.

定理 7(Kwapien)　对于有限维 Banach 空间 X 上的恒等算子 I_X, $\Pi_2(I_X) = \sqrt{\dim X}$.

证明　1°　先证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\dim X} \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^* x_i|\right)^{1/2},$$

从而 $\Pi_2(I_X) \leqslant \sqrt{\dim X}$.

固定 $x_1, \cdots, x_n \in X$, 考虑 $T: l_2^n \to X$, $T(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\forall\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in l_2^n$. 此时必有

$T^*: X^* \to (l_2^n)^* = l_2^n$, $T^* x^* = (x^* x_1, \cdots, x^* x_n)$ 并且

$$\| T \| = \| T^* \| = \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^* x_i|^2\right)^{1/2}.$$

映射 T 可写成 $Q\hat{T}$, 这里 $Q: l_2^n \to l_2^n / KerT = l_2^m$, $KerT$ 是 T 的核, 即空间 $\{x \in l_2^n, Tx = 0\}$, Q 是商映射, $\| Q \| = 1$; $\hat{T}$ 是一一映射与 T 有同一范数, 故

$$\begin{aligned}\Pi_2(T) &= \Pi_2(\hat{T} I_{l_2^m} Q) \leqslant \| \hat{T} \| \Pi_2(I_{l_2^m}) \| Q \| \\ &= \| T \| \Pi_2(I_{l_2^m}) = \| T \| \sqrt{m} \leqslant \| T \| \sqrt{\dim X}.\end{aligned}$$

上式中倒数第二步是由于 l_2^m 是 Hilbert 空间, 由定理 3 后面的说明知道

$$\Pi_2(I_{l_2^m}) = \sigma(I_{l_2^m}) = \left(\sum_{i=1}^{m} \| e_i \|^2\right)^{1/2} = \sqrt{m}$$

于是

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2\right)^{1/2} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \| Te_i \|^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \Pi_2(T) \sup_{\| e^* \|_{l_2^n} \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |e^* e_i|^2\right)^{1/2} \\ &= \Pi_2(T) \leqslant \| T \| \sqrt{\dim X} \\ &= \sqrt{\dim X} \sup_{\| x^* \| \leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^* x_i|^2\right)^{1/2}\end{aligned}$$

2° 由推论 1,对于 $I_X:X\to X$,存在紧 Hausdorff 空间 Ω 和 Ω 上的正则概率测度 μ,使得 $I_X = SJI$. 其中 $I:X\to C(\Omega)$,$J:C(\Omega)\to L_2(\mu)$,$S:L_2(\mu)\to X$. 注意 $JI(X) = L_2(\mu)$,X 是有限维空间,从而 $L_2(\mu) = l_2^{\dim X}$,记 $JI = A$,则 $A^{-1} = S$,由推论 1 知道,$\|I\|\leqslant 1$,$\Pi_2(J)\leqslant 1$,$\|S\| = \Pi_2(I_X)$,从而

$$\begin{aligned}\sqrt{\dim X} &= \Pi_2\left(I_{l_2^{\dim X}}\right) = \Pi_2(AA^{-1}) \leqslant \Pi_2(JI)\|A^{-1}\| \\ &\leqslant \|I\|\Pi_2(J)\|S\| \leqslant \Pi_2(I_X).\end{aligned}$$

定理得证.

为了下面的内容,我们需要一个引理. 设 S^n 是 n 维实欧氏空间的单位球面,$S^n = \{x\in\Phi^n, \|x\| = 1\}$,$m$ 是 S^n 上旋转不变的 Borel 测度,$m(S^n) = 1$. $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$,是通常的内积. 其中 $x = (x_1,\cdots,_n)$,$y = (y_1,\cdots,y_n)$, 对于实数 t, 令 $\mathrm{sign}\ t = \frac{t}{|t|}$, $(\mathrm{sign}o = 0)$.

引理 对于任何 $x,y\in S^n$,

$$\int_{S^n}\mathrm{sign}(x,u)\mathrm{sign}(y,u)dm(u) = 1 - \frac{2}{\Pi}\theta(x,y) \qquad (6.8)$$

其中 $\theta(x,y) = \theta$ 满足 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,$\cos\theta = (x,y)$.

证明 此结果通过一系列变换和计算得到. 选取 Φ^n 的一组基,使 x 在其中有表达式 $x = (1,0,\cdots,0)$,y 有表达式$(\cos\theta,\sin\theta,0,\cdots,0)$,然后应用 S^n 上点的极坐标 $\varphi = (\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})$. 此时上述积分表达为 $n-1$ 维 Lebesgue 积分

$$\int_{S^n} g(u)dm(u) = \frac{1}{|S^n|}\int_{I^{n-1}} g(u(\varphi))J(\varphi)d\varphi,$$

其中

$$I^{n-1}\{\varphi: 0\leqslant\varphi_1 < 2\pi, 0\leqslant\varphi_i\leqslant\pi, 2\leqslant i\leqslant n-1\}$$

$$u(\varphi) = (u_1(\varphi),\cdots,u_n(\varphi))$$

$$u_1(\varphi) = \prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i,\ u_k(\varphi) = \cos\varphi_{k-1}\prod_{i=1}^{n-1}\sin\varphi_i, 2\leqslant k\leqslant n-1$$

$$u_n(\varphi) = \cos\varphi_{n-1}$$

$$J(\varphi) = \prod_{i=2}^{n-1}(\sin\varphi_i)^{i-1}$$

$$|S^n| = \int_{I^{n-1}} J(\varphi)d\varphi = 2\pi\prod_{i=2}^{n-1}\int_0^\pi (\sin\varphi_i)^{i-1}d\varphi_i.$$

设 $h(u) = (x,u)(y,u) = u_1(u_1\cos\theta + u_2\sin\theta)$，则将 u_1, u_2 代入得

$$h(u(\varphi)) = (\prod_{i=2}^{n-1}\sin\varphi_1)^2\sin\varphi_1(\sin\varphi_1\cos\theta + \cos\varphi_1\sin\theta)$$

于是

$$\begin{aligned} g(u) &= \mathrm{sign}h(u(\varphi)) = \mathrm{sign}\sin\varphi_1(\sin\varphi_1\cos\theta + \cos\varphi_1\sin\theta) \\ &= \mathrm{sign}\sin\varphi_1\sin(\varphi_1 + \theta) \\ &= \begin{cases} 1 & \varphi_1 \in (0, \pi - \theta) \cup (\pi, 2\pi - \theta) \\ -1 & \varphi_1 \in (\pi - \theta, \pi) \cup (2\pi - \theta, 2\pi) \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned} \int_{S^n} g(u)dm(u) &= \frac{1}{|S^n|}\int_{I^{n-1}} \mathrm{sign}\sin\varphi_1\sin(\varphi_1 + \theta)J(\varphi)d\varphi \\ &= \frac{1}{|S^n|}\int_0^{2\pi} \mathrm{sign}\sin\varphi_1\sin(\varphi_1 + \theta)d\varphi_1 \cdot \\ &\qquad \prod_{i=2}^{n-1}\int_0^\pi (\sin\varphi_i)^{i-1}d\varphi_i \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{sing}\sin\varphi_1\sin(\varphi_1 + \theta)d\varphi_1 \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\theta. \end{aligned}$$

定理 8 设 $(a_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ 是实矩阵，M 是一正数，使得对于任何实数 $t_1, \cdots, t_n, s_1, \cdots, s_n$，当 $|t_i| \leqslant 1, |s_j| \leqslant 1$ 时，

$$|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}t_is_j| \leqslant M \tag{6.9}$$

则存在常数 K_G 使得对于实 Hilbert 空间 X 中的任何向量 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$，当 $\| x_i \| \leqslant 1, \| y_j \| \leqslant 1$ 时

$$\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_i, y_j)\right| \leqslant K_G M \tag{6.10}$$

$\left(\text{称 } K_G \text{ 是 Grothendieck 常数}, K_G \leqslant \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)$.

证明 由(6.10)式的齐性，不妨设 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in X$，$\| x_i \| = \| y_i \| = 1$，对于任何 $u \in S^{2n}$，这里 S^{2n} 是 Φ^{2n} 的单位球面，令 $t_i(u) = \operatorname{sign}(u, x_i), s_j(u) = \operatorname{sign}(u, y_j), 1 \leqslant i, j \leqslant n$，由(6.9)式

$$-M \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i(u) s_j(u) \leqslant M, \qquad u \in S^{2n}.$$

对此式各部分关于旋转不变测度积分，由引理得到

$$-\frac{\pi}{2}M \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\pi}{2} - \theta(x_i, y_i)\right) \leqslant \frac{\pi}{2}M$$

令 $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}\left(\frac{\pi}{2} - \theta(x_i, y_i)\right), 1 \leqslant i, j \leqslant n$，以 $\frac{\pi}{2}M$ 代替 M，则类似于(6.9)的式子成立. 对新的不等式再积分，得到

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 M \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\pi}{2} - \theta(x_i, y_i)\right)^2 \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 M.$$

连续这一过程，对于任何自然数 n 有

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^n M \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\pi}{2} - \theta(x_i, y_j)\right)^n \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^n M \tag{6.11}$$

由于

$$\begin{aligned}(x_i, y_i) &= \cos\theta(x_i, y_i) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta(x_i, y_j)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}\left(\frac{\pi}{2} - \theta(x_i, y_i)\right)^{2n+1},\end{aligned}$$

于是从(6.11)得出

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i, y_j)\right| \leqslant M \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!!} = \frac{M}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right).$$

推论 4 设 $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ 是满足(6.9)的实矩阵，则对于内积空间中的任何向量 $x_1, \cdots, x_n$，

$$\sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right\| \leqslant K_G M \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \| x_i \|. \tag{6.12}$$

证明 取 $y_j, \| y_j \| = 1$ 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i, y_j\right) = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \right\|,$$

代入(6.10)即得到(6.12).

让我们转到 $\mathscr{L}_p$ 空间之间可和算子的关系. $\mathscr{L}_p$ 空间是 Lindenstrauss, Pelczynski 等在研究 Grothendieck 不等式与绝对可和算子时提出的一类空间.

定义 2 Banach 空间 X 称为是 $\mathscr{L}_{p,\lambda}$ 空间($1 \leqslant p \leqslant \infty, 1 \leqslant \lambda < \infty$):若对于 X 的每个有限维空间 B, X 中存在包含 B 的有限维子空间 E(例如 $\dim E = n$),使得 $d(E, l_p^n) \leqslant \lambda$. X 称为 $\mathscr{L}_p$ 空间:若对于某个 λ, X 是 $\mathscr{L}_{p,\lambda}$ 空间.

这里 l_p^n 是赋予 l_p 范数的 n 维空间,

$d(E, l_p^n) = \inf\{\|T\| \|T^{-1}\|, T: E \to l_p^n$ 为同构映射$\}$.

其中 inf 是关于全体同构映射取的.

一些基本的事实可以得到. 例如 $L_p(\mu)$($1 \leqslant p < \infty$)对于任何 $\lambda > 1$ 是 $\mathscr{L}_{p,\lambda}$ 空间. 若 Ω 是某个紧 Hausdorff 空间, 则 $C(\Omega)$ 对于任何 $\lambda > 1$ 是 $\mathscr{L}_{\infty,\lambda}$ 空间. 反过来, 每个 $\mathscr{L}_p$ 空间对于适当的测度 μ 同构于 $L_p(\mu)$ 的某个子空间, 而 $\mathscr{L}_2$ 空间类与 Hilbert 空间类相同.

定理 9 设 X 是 $\mathscr{L}_1$ 空间, Y 是 Hilbert 空间, 则 $\mathscr{B}(X,Y) \subset \Pi_1(X,Y)$, 这里 $\mathscr{B}(X,Y)$ 仍表示从 X 到 Y 的有界线性算子全体.

证明 设 X 是 $\mathscr{L}_{1,\lambda}$ 空间, 对于 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, 不妨设 $x_1, \cdots, x_n$ 使得

$$\sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |x^* x_i| = 1.$$

由 $\mathscr{L}_{1,\lambda}$ 的定义, X 中存在子空间 E, $\dim E = m < \infty$ 和同构映射 S: $l_1^m \to E$ 使得 $\|S\| = 1$, $\|S^{-1}\| \leqslant \lambda$. 令 $y_i = S^{-1}x_i$ 若

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}e_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

其中 e_j 是 l_1^m 的标准基, 如果 $t_1, \cdots, t_m$ 与 $s_1, \cdots, s_m$ 是任意实数, $|t_i| \leqslant 1$, $|s_j| \leqslant 1$ 注意 $(l_1^m)^* = l_\infty^m$, 取 $y^* \in l_\infty^m$, $y^* = (s_1, \cdots, s_m)$, 则 $\|y^*\| \leqslant 1$,

$$|\sum_{i,j}a_{ij}t_is_j| \leqslant \sum_i |t_i||\sum_j a_{ij}s_j| \leqslant \sum_i |\sum_j a_{ij}s_j|$$
$$= \sum_i |y^*(y_i)| = \sum_i |y^*(S^{-1}x_i)|$$
$$= \sum_i |(S^{-1})^*y^*x_i| \leqslant \|(S^{-1})^*y^*\| \leqslant \lambda.$$

现在设 $u_i = Tx_i = TSy_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}TSe_j, 1 \leqslant i \leqslant n$，则

$$\sum_i \|u_i\| = \sum_i \|\sum_j a_{ij}TSe_j\|.$$

由定理 8 知道

$$\sum_{i=1}^n \|Tx_i\| \leqslant K_G\lambda \sup_{1\leqslant j\leqslant m} \|TSe_i\| \leqslant K_G\lambda\|TS\| \leqslant K_G\lambda\|T\|.$$

定理得证.

定理 10 设 X,Y 是无穷维 Banach 空间，X 具有无条件基，若 $\mathscr{B}(X,Y) \subset \Pi_1(X,Y)$，则 X 必同构于某个 $l_1(\Gamma)$，Y 必同构于 Hilbert 空间.

证明 $\mathscr{B}(X,Y)$，$\Pi_1(X,Y)$ 都是 Banach 空间，于是必有 $K>0$ 使得

$$\Pi_1(T) \leqslant K\|T\|. \qquad \forall\, T \in \mathscr{B}(X,Y)$$

不妨设 $\{x_n\}$ 是 X 的规范无条件基(这当然要求 X 是可分的，但对于不可分的情况，也可作适当处理，使之变为可分情况. 注意我们这里是 $l_1(\Gamma)$，Γ 是任意指标集). 由 Dvoretzky-Rogers 定理，对于每个 n，存在 $y_1,\cdots,y_n \in Y$，$\|y_i\| = 1$ 使得

$$\|\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\| \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right)^{1/2} \tag{6.13}$$

$\forall\, \lambda_i \in R, (1 \leqslant i \leqslant n)$. 若 u_i 为 n 个正数，$\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$，定义

$$T: X \to Y, Tx = \sum_{i=1}^n u_ia_iy_i, \forall\, x = \sum_{i=1}^n a_ix_i.$$

由无条件性，有 $C > 0$ 使得

$$\| \sum_i \pm a_i x_i \| \leqslant C \| \sum_i a_i x_i \|.$$

显然 $|a_i| \leqslant C \| \sum_i a_i x_i \|$,$i = 1,2\cdots$,从而

$$\| Tx \| \leqslant 2\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i u_i|^2 \Big)^{1/2} = 2C \| x \|,$$

故 $\| T \| \leqslant 2C, \Pi_1(T) \leqslant K \| T \| \leqslant 2CK.$

又由于每个 $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$ 满足 $\| \sum_{i=1}^{n} \pm a_i x_i \| \leqslant C \| x \|$.

注意对于任何 $x_1, \cdots, x_n$, $\sup\limits_{\|x^*\| \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n} |x^* x_i| = \max\limits_{\varepsilon_i = \pm 1} \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \|$,于是

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| u_i = \sum_{i=1}^{n} \| T a_i x_i \| \leqslant \Pi_1(T) C \| x \| \leqslant 2C^2 K \| x \|.$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \Big)^{1/2} = \sup\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i| u_i, \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 = 1 \Big) \leqslant 2C^2 K \| x \|.$$

$$\forall\, x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in X.$$

现在定义 $S: X \to Y, x_i \mapsto y_i (1 \leqslant i \leqslant n)$,则由(6.13)

$$\| Sx \| \leqslant 2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \Big)^{1/2} \leqslant 4C^2 K \| x \|.$$

由此知 $\Pi_1(S) \leqslant K \| S \| \leqslant 4C^2 K^2$ 并且

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |a_i| = \sum_{i=1}^{n} \| S a_i x_i \| &\leqslant \Pi_1(S) \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i x_i \| \\ &\leqslant \Pi_1(S) C \| x \| \leqslant 4C^3 K^3 \| x \|.\end{aligned}$$

所以对于任何 $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$,

$$\| x \| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leqslant 4C^3 K^2 \| x \|.$$

X 同构于 l_1.

为了证明 Y 同构于 Hilbert 空间,我们只须对于 Y 的每个可分

子空间 Y_0 加以证明. 我们知道每个可分 Banach 空间是 l_1 的商空间. 于是存在到上有界算子 $T_0: X \to Y_0$. 由假设 T_0 是 1 绝对可和的,从而是 2 绝对可和的. 由推论 1,存在 $T_1: X \to L_2(\mu), T_2: L_2(\mu) \to Y_0$,使得 $T = T_2 T_1$. 由于 T_0 到上,T_2 必是商映射,因此 Y_0 同构于 Hilbert 空间的商空间. 从而自身同构于一个 Hilbert 空间.

定理 11(Grothendieck-Pelczynski) 设 X 是 Banach 空间,若存在常数 K 使得对于每个只要 $|t_i| \leqslant 1, |s_j| \leqslant 1 (1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 就有

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_j \right| \leqslant 1$$

的实矩阵 $(a_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ 都满足

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j^* x_i \right| \leqslant K \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \| x_i \| \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \| x_j^* \|, \quad \forall\, x_i \in X, x_j^* \in X^*. \tag{6.14}$$

则 X 同构于 Hilbert 空间.

证明 利用条件(6.14),与定理 8 一样的证明可知每个 $T \in \mathscr{B}(l_1, Y)$ 是绝对可和的. 由定理 9,Y 同构于 Hilbert 空间.

Ⅵ. 局部理论简介

Banach 空间的局部理论是近年来得到蓬勃发展的 Banach 空间 理论的重要分支. 局部理论针对从有限维空间过渡到无穷维空间这一近代数学的重要课题,研究这一过程中的空间结构问题,其最终目的是将无穷维空间的结构性质与其有限维子空间的结构紧密 联系在一起. 这一理论的特色之一在于包含一系列精细的估值和重要的不等式,它们在多种学科领域都是有意义的. 这里我们仅通过介绍等周不等式,Dvoretzky 定理的证明,K 凸性与一致包含 l_p^n 空间,有限维空间的几乎 Enclid 部分,弱型与弱 Hilbert 空间等问题进行基本的了解并作为进一步研究的基础.

§1 等周不等式与 Dvoretzky 定理

我们先介绍几个基本概念和基础不等式,特别是偏差不等式,等周不等式和体积不等式,而后证明 Dvoretzky 定理.

定义 1 设 E,F 是 Banach 空间, $\lambda \geqslant 1$, 称 E,F 是 λ 同构的:若存在同构映射 $T:E \to F$ 使得 $\|T\|\;\|T^{-1}\| \leqslant \lambda$, 记为 $E \overset{\lambda}{\sim} F$. 定义

$$d(E,F) = \inf\{\lambda, E \overset{\lambda}{\sim} F\}.$$

称 $d(E,F)$ 是 E 与 F 的 Banach-Mazur 距离.

容易验证,对于三个空间 E,F,G, 则

$$d(E,G) \leqslant d(E,F)d(F,G).$$

Banach-Mazur 距离的直观意义在于,如果 B_E, B_F 分别是 E,F 的单位球,则存在同构映射 T 使得

$$B_F \subset T(B_E) \subset d(E,F)B_F.$$

仍然记

$$l_p^n = \{x = (x_1,\cdots,x_n), x_i \in R,$$

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\}, 1 \leqslant p < \infty$$

$$l_\infty^n = \{x = (x_1,\cdots,x_n), x_i \in R, \|x\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\}.$$

定义 2 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty, \lambda > 1$,称 Banach 空间 X 是 λ—致包含 l_p^n 的:若对于每个 n,X 中存在子空间 X_n 使得 $X_n \overset{\lambda}{\sim} l_p^n$(并 不要求 $X_n \subset X_{n+1}$). 称 X 一致包含 l_p^n:若对于任何 $\lambda > 1$,上述事实成立.

Dvoretzky 定理是说,对于 $\forall\ \varepsilon > 0$,任一无穷维 Banach 空间 X $(1+\varepsilon)$ 一致包含 l_2^n. 为证明此结论我们需要关于 Gauss$R.V$ 的偏差不等式. 为此考虑 X 值 Gauss$R.V.\xi$. 我们记

$\sigma(\xi) = \sup\{\|x^*(\xi)\|_2, x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1\}$. 定义

$$d(\xi) = \left(\frac{\|\xi\|_2}{\sigma(\xi)}\right)^2 \tag{1.1}$$

为 ξ 的维数. 若 $X = l_2^n$,ξ 是 R^n 上的标准 Gauss $R.V.$, $\xi = (\xi_1, \cdots\xi_n)$, ξ_i 是标准正态分布独立 $R.V.$, 若 e_i 是第 i 个标准基底元素, $x^* \in X^*$, 则 $x^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*$, 其中 $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, $\|x^*\| = 1$ 时, $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1$, 此时

$$E|x^*(\xi)|^2 = E|\sum_{i=1}^n \alpha_i\xi_i|^2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\alpha_j E\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1.$$

$$E\|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^n E|\xi_i|^2 = n.$$

于是 $d(\xi) = n$ 恰与 l_2^n 的维数相等. 注意当空间范数改变时,维数可能不保持同一值,另外,$d(\xi)$ 也不必是整数.

命题 $d(\xi) \leqslant dimX$.

证明 不妨设 $dimX = n$,由第 V 章 §6 定理 7,$\Pi_2(I_X) = \sqrt{n}$,即

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{n}\sup_{\|x^2\|\leqslant 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^* x_i|^2\right)^{1/2}$$

这说明对于每个 X 值简单函数 ξ

$$\|\xi\|_2 \leqslant \sqrt{n}\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}|x^*(\xi)|_2 = \sqrt{n}\,\sigma(\xi)$$

从而过渡到 $L_2(P,X)$ 可积函数也成立，于是

$$d(\xi) = \left(\frac{\|\xi\|_2}{\sigma(\xi)}\right)^2 \leqslant n.$$

引理 1 设 $f:E\to F$ 为局部Lipschitz函数，这里 E,F 是有限维空间，f 几乎在每一点有有限导数，

$$f'(x)y = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t} \tag{1.2}$$

$\forall\ y\in E$. ξ 是 E 值 Gauss $R.V.$，η 是 ξ 的独立 $copy$，$\Phi:F\to R$ 是可测凸函数，则

$$E\Phi((f(\xi)-Ef(\xi))\leqslant E\Phi\left(\frac{\pi}{2}f'(\xi)\eta)\right). \tag{1.3}$$

证明 令 $G(\theta)=\xi\sin\theta+\eta\cos\theta$, $H(\theta)=\xi\cos\theta-\eta\sin\theta$ 则 $\dfrac{dG(\theta)}{d\theta}=H(\theta)$. 由(1.2)

$$\frac{d}{d\theta}f(G(\theta)) = f'(G(\theta))\frac{dG(\theta)}{d\theta} = f'(G(\theta)H(\theta)$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(G(\theta))H(\theta)d(\theta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{d\theta}f(G(\theta))d\theta = f(G(\theta))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= f(\xi)-f(\eta).\end{aligned}$$

对于 η 应用 Jensen 不等式，

$$\begin{aligned}E\Phi(f(\xi)-Ef(\xi)) &= E\Phi(f(\xi)-Ef(\eta))\\ &\leqslant E\Phi(f(\xi)-f(\eta))\\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}E\Phi(\frac{\pi}{2}f'(G(\theta))H(\theta))d\theta\end{aligned}$$

注意 Gauss $R.V.$ 是旋转不变的，故两正交 $R.V.$ $(G(\theta),H(\theta))$ 与

(ξ,η) 是同分布的. 故

$$E\Phi\left(\frac{\pi}{2}f'(G(\theta),H(\theta)\right)=E\Phi\left(\frac{\pi}{2}f'(\xi)\eta\right)$$

从而

$$E\Phi(f(\xi)-Ef(\xi))\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}E\Phi(\frac{\pi}{2}f'(\xi)\eta)d\theta=E\left(\frac{\pi}{2}f'(\eta)\right).$$

下面定理中不等式称为偏差不等式. 设 f 是有限维空间 E 上的实值 Lipschitz 函数,以 $|\cdot|$ 表示 E 中的范数,我们记

$$\|f\|_{Lip}=\sup\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|},x,y\in E\}.$$

定理 1 设 X 是可分 Banach 空间,ξ 是 X 值 Gauss $R.V.$,则对于任何 $t>0$,

$$P(|\|\xi\|-E\|\xi\||>tE\|\xi\|)\leqslant 2exp(-Kt^2d(\xi)) \tag{1.4}$$

其中 K 可取为 $\frac{2}{\pi^2}$.

证明 先假设 X 是有限维空间,f 是如上的 Lipschitz 函数 $\Phi(t)=e^{\lambda t}$. 由(1.3)

$$E\Phi(f(\xi)-Ef(\xi))\leqslant E\Phi\left(\frac{\pi}{2}f'(\xi)\eta\right)$$

$$=Eexp\left(\frac{\pi\lambda}{2}\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)\eta_i\right)=exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2\|f\|_{Lip}^2\right)$$

这里 $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ 为标准 Gauss $R.V.$ 最后一步是由于将其中每项的期望看成 Fourier 变换,再由 $\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)\right)^2\leqslant\|f\|_{Lip}^2$ 得到的. 由此知道对于 $t,\lambda>0$,

$$\begin{aligned}P(f(\xi)-Ef(\xi)>t)&=P(exp(f(\xi)-Ef(\xi)-t)\lambda>1)\\&\leqslant E\,exp(f(\xi)-Ef(\xi)-t)\lambda\\&\leqslant exp\left(-\lambda t+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2\|f\|_{Lip}^2\right)\end{aligned}$$

取最优的 λ 得到

$$P(f(\xi)-Ef(\xi)>t)\leqslant exp(-Kt^2\|f\|_{Lip}^{-2}).$$

其中 $K = \frac{2}{\pi^2}$. 将 f 换为 $-f$，即得到对于 $\forall\, t > 0$，

$$P(|f(\xi) - Ef(\xi)| > t) \leqslant 2exp(-Kt^2 \| f \|_{Lip}^{-2}) \quad (1.5)$$

现在转到一般可分Banach空间，首先我们证明有表达式 $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(\omega) x_i, a.e.$ 成立. 这里 $x_i \in X, \theta_i$ 是实值 $i.i.d.$ 标准Gauss $R.V.$ 实际上设 $H = \overline{\text{span}}\{x^*(\xi), \| x^* \| \leqslant 1\}$，由于Gauss $R.V.$ 的线性 组合及极限均为Gauss $R.V.$，故 H 中的元全都是Gauss. $R.V$. 若 $\{\theta_i, i \geqslant 1\}$ 是 H 中的正交基而 $\mathscr{B}_n$ 是由 $(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ 生成的 σ 代数，注意正交性即独立性，将 $E(\xi | \mathscr{B}_n)$ 表示成 $\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i$，容易计算出 $x_i = E\xi\theta_i$. 由 Levy 关于正则鞅的定理，$E(\xi | \mathscr{B}_n) a.e$ 且 L_1 收敛于 ξ. 对于 $\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i$，(1.5) 适用. 设

$$f(\alpha) = \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \|, \quad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in R^n$$

由于当 $\alpha, \beta \in R^n$ 时

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leqslant \| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) x_i \|$$

$$\leqslant (\sum |\alpha_i - \beta_i|^2)^{1/2} \sup\{ \| \sum_{i=1}^{n} (\alpha'_i - \beta'_i) x_i \|, \sum_{i=1}^{n} |\alpha'_i - \beta'_i|^2 \leqslant 1\}$$

$$= |\alpha - \beta| \sup\{ (\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^2)^{1/2}, \| x^* \| \leqslant 1\} = |\alpha - \beta| \sigma(\xi)$$

即 $\| f \|_{Lip} \leqslant \sigma(\xi)$，于是对于 $\xi_n = E(\xi | \mathscr{B}_n)$ 有

$$P(\| \xi_n \| - E \| \xi_n \| > tE \| \xi \|) \leqslant 2exp(-Kt^2 d(\xi))$$

由于 $\xi_n \to \xi\ a.e$(或 L_1)，对上式取极限即得到(1.4).

推论 设 ξ 是取值于 X 的 Gauss $R.V.$，则 $\exists\, C_p > 0$ 使得

$$\| \xi \|_1 \leqslant \| \xi \|_p \leqslant C_p \| \xi \|_1 \quad (1 < p < \infty) \quad (1.6)$$

证明 对于一个实值 $R.V.\ x^*(\xi)$，我们知道

$$\| x^*(\xi) \|_1 = (\frac{2}{\pi})^{1/2} \| x^*(\xi) \|_2$$

从而

$$\sigma(\xi) = \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \| x^*(\xi) \|_2 \leqslant (\frac{\pi}{2})^{1/2} \| \xi \|_1.$$

不妨设 $\| \xi \|_1 = 1$，则由定理 1

$$P(\| \xi \| - E\| \xi \| > t) = P(\| \xi \| > t + 1) \leqslant 2\exp(\frac{-2Kt^2}{\pi}),$$

于是

$$E\| \xi \|^p = \int_0^\infty P(\| \xi \| > t)dt^p$$
$$\leqslant 2\int_0^\infty \exp(\frac{-2K}{\pi})(t-1)^2 dt^p \triangleq K_p^p < \infty.$$

下面不等式称为球面上的等周不等式.

设 S^{n-1} 是 R^n 中的单位球面，$S^{n-1} = \{x = (x,\cdots,x_n), \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$. μ_{n-1} 是 S^{n-1} 上的旋转不变测度，$\mu_{n-1}(S^{n-1}) = 1$. 以 ζ 表示 S^{n-1} 上的测地距离，即 $\zeta(x,y)$ 表示 x 与 y 的极径的夹角，$0 \leqslant \zeta(x,y) \leqslant \pi$. S^{n-1} 上的球 $B(r) = \{x \in S^{n-1}, \zeta(x,x_0) \leqslant r\}$ 称为一个冠(cap). 对于度量空间 (S^{n-1},ζ) 的子集 $A \subset S^{n-1}$ 和 $\varepsilon > 0$，记 $A_\varepsilon = \{x \in S^{n-1}, \zeta(x,A) < \varepsilon\}$. *E*. Schmidt(见 Milman, Schechtman[1]) 证明了若 $A \subset S^{n-1}$ 是闭集，B 是 S^{n-1} 上的一个冠，$\mu(A) = \mu(B)$，则 $\mu_{n-1}(A_\varepsilon) \geqslant \mu_{n-1}(B_\varepsilon)$.

定理 2(Levy)　设 $A \subset S^{n-1}$，$\mu_{n-1}(A) \geqslant \frac{1}{2}$，则

$$\mu_{n-1}(A_\varepsilon) \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{\frac{-\varepsilon^2(n-2)}{2}} \tag{1.7}$$

证明　由上面所述 Schmidt 的结论，只须对于 $B(\frac{\pi}{2}) = \{x \in S^{n-1}, \zeta(x,x_0) \doteq \frac{\pi}{2}\}$ 证明 $B(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)$ 满足(1.7). 由 n 维空间球面面积公式

$$\mu_{n-1}(B(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)) = I_{n-1}^{-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} \cos^{n-2}\theta d\theta.$$

其中 $I_{n-1}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta d\theta=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta d\theta$. 注意 $\cos\theta\leqslant e^{-\frac{\theta^2}{2}}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. 实际计算

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta &= \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}}\cos^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leqslant\frac{e^{\frac{-\varepsilon^2 n}{2}}}{\sqrt{n}}\int_0^{\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sqrt{n}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}e^{\frac{-\varepsilon^2 n}{2}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}e^{\frac{-\varepsilon^2 n}{2}}.\end{aligned}$$

对于积分 $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$ 直接计算或查表可知

$$\sqrt{\frac{\pi n}{2(n+1)}}\leqslant\sqrt{n}J_n\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \text{所以}\ \sqrt{n}J_n\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

换回原积分得到

$$1-\mu_{n-1}(B(\frac{\pi}{2}+\varepsilon))=\frac{1}{2I_{n-1}}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta d\theta\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{-(n-2)\varepsilon^2}{2}}.$$

引理 2(Brunn-Minkowski)　设 A,B 是 R^n 中紧集,则

(i)　$\mathrm{Vol}(\lambda A+(1-\lambda)B)\geqslant(\mathrm{Vol}A)^{\lambda}(\mathrm{Vol}B)^{1-\lambda}, 0\leqslant\lambda\leqslant1$.

(ii)　$\mathrm{Vol}(A+B)^{1/n}\geqslant(\mathrm{Vol}A)^{1/n}+(\mathrm{Vol}B)^{1/n}$.

其中 $\mathrm{Vol}A$ 表示 A 的体积(其余类推),$A+B$ 表示 A 与 B 的线性和集,即 $A+B=\{x+y, x\in A, y\in B\}$.

证明　设有可测函数 $f,g,\varphi: R^n\to R^+$ 使得对于任何 $s,t\in R^n$ 和某个 $0<\lambda<1$ 有

$$\varphi(\lambda s+(1-\lambda)t)\geqslant f(s)^{\lambda}g(t)^{1-\lambda}. \tag{1.8}$$

我们证明对于 R^n 上的 Lebesgue 测度 μ_n,记 E_n 是关于 μ_n 的积分,则

$$E_n\varphi\geqslant(E_nf)^{\lambda}(E_ng)^{1-\lambda} \tag{1.9}$$

实际上不妨设 f,g 有界,由齐性又可设 $\|f\|_{\infty}=\|g\|_{\infty}=1$,对于 $0\leqslant a\leqslant1$,则容易知道在 $n=1$ 情况

$$\{\varphi \geqslant a\} \supset \lambda\{f \geqslant a\} + (1-\lambda)\{g \geqslant a\},$$

于是

$$\begin{aligned} E\varphi &= \int_0^\infty \mu(\varphi \geqslant a)da \\ &\geqslant \lambda\int_0^\infty \mu(f \geqslant a)da + (1-\lambda)\int_0^\infty \mu(g \geqslant a)da \\ &= \lambda Ef + (1-\lambda)Eg \geqslant (Ef)^\lambda (Eg)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

假设在 $n-1$ 维情况(1.9) 成立,记成

$$E_{n-1}\varphi \geqslant (E_{n-1}f)^\lambda (E_{n-1}g)^{1-\lambda}$$

对于 $y \in R$,记 $\varphi_y: R^{n-1} \to R^+, \varphi_y(t) = \varphi(t,y)$. 同样地定义 f_y, g_y,由(1.8) 可知若 $y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_0$,则

$$\varphi_y(\lambda s + (1-\lambda)t) \geqslant f_{y_1}(s)^\lambda g_{y_0}(t)^{1-\lambda}.$$

从而由归纳假设

$$E_{n-1}\varphi_y \geqslant (E_{n-1}f_{y_1})^\lambda (E_{n-1}g_{y_0})^{1-\lambda}.$$

利用 $n=1$ 时的不等式得出

$$\begin{aligned} E_n\varphi = \int E_{n-1}\varphi_y dy &\geqslant \left(\int E_{n-1}f_{y_1}dy_1\right)^\lambda \left(\int E_{n-1}g_{y_0}dy_0\right)^{1-\lambda} \\ &= (E_nf)^\lambda (E_ng)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

现在设 $\varphi = \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}, f = \chi_A, g = \chi_B$,

$$\lambda = (\mathrm{Vol}A)^{1/n}((\mathrm{Vol}A)^{1/n} + (\mathrm{Vol}B)^{1/n})^{-1}$$

$$A_1 = (\mathrm{Vol}A)^{-\frac{1}{n}}A, B_1 = (\mathrm{Vol}B)^{-\frac{1}{n}}B$$

注意到 $\mathrm{Vol}A = E_n\chi_A$,由(1.9) 立即得到(i),由此式得到

$$\mathrm{Vol}(\lambda A_1 + (1-\lambda)B_1) \geqslant (\mathrm{Vol}A_1)^\lambda(\mathrm{Vol}B_1)^{1-\lambda} \geqslant 1.$$

但由 λ 的值可知

$$\begin{aligned} \lambda A_1 + (1-\lambda)B_1 &= \frac{\lambda A}{(\mathrm{Vol}A)^{1/n}} + \frac{(1-\lambda)B}{(\mathrm{Vol}B)^{1/n}} \\ &= \frac{A+B}{(\mathrm{Vol}A)^{1/n} + (\mathrm{Vol}B)^{1/n}} \end{aligned}$$

从而(ii) 成立.

下面定理称为空间等周不等式.

定理 3 设 $C \subset R^n$ 是内部非空的紧凸集,以 $\sigma(C)$ 表示 C 的

边界 ∂C 的面积. 若 B 是 R^n 中的单位球,则

$$\left(\frac{\mathrm{Vol}C}{\mathrm{Vol}B}\right)^{1/n} \leqslant \left(\frac{\sigma(C)}{\sigma(B)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{1.10}$$

证明 注意

$$\sigma(C) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{Vol}(C+tB)-\mathrm{Vol}C}{t},$$

首先令 $C = B$ 则得

$$\begin{aligned}\sigma(B) &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{Vol}(1+t)B-\mathrm{Vol}B}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{((1+t)^n-1)\mathrm{Vol}B}{t} = n\mathrm{Vol}B.\end{aligned}$$

其次由引理 2(ii),

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(C+tB) &\geqslant ((\mathrm{Vol}C)^{1/n}+t(\mathrm{Vol}B)^{1/n})^n \\ &\geqslant \mathrm{Vol}C + nt(\mathrm{Vol}C)^{\frac{n-1}{n}}(\mathrm{Vol}B)^{1/n}+0(t)^2\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\mathrm{Vol}(C+tB)-\mathrm{Vol}C}{t} \geqslant \sigma(B)(\mathrm{Vol}C)^{\frac{n-1}{n}}(\mathrm{Vol}B)^{\frac{1-n}{n}}+0(t)$$

令 $t\to 0$ 得到(1.10).

引理 3 对于 R^n 上的任一范数 $|\cdot|$, $S^{n-1}=\{x\in R^n, |x|=1\}$ 中 δ 网的基数 $N\leqslant(1+\frac{2}{\delta})^n$.

证明 设 $\{y_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 S^{n-1} 中的最大子集,它使得任意两个 $i\neq j$, $|y_i-y_j|>\delta$. 显然 $\{y_i\}$ 是 S^{n-1} 的 δ 网. 注意球 $y_i+\frac{\delta}{2}B$ 互不相交,其中 B 为单位球 $\{x, |x|<1\}$,并且所有这些球都包含在 $(1+\frac{\delta}{2})B$ 中. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Vol}(y_i+\frac{\delta}{2}B)\leqslant\mathrm{Vol}((1+\frac{\delta}{2})B)=(1+\frac{\delta}{2})^n\mathrm{Vol}B,$$

或者

$$N(\frac{\delta}{2})^n\mathrm{Vol}B\leqslant(1+\frac{\delta}{2})^n\mathrm{Vol}B.$$

从而

$$N \leqslant (1+\frac{2}{\delta})^n. \tag{1.11}$$

现在我们可以叙述并证明著名的 Dvoretzky 定理了，这一定理有几种不同形式的表述.

定理 4 对于每个 $\varepsilon > 0$，任何无穷维 Banach 空间 $(1+\varepsilon)$ 一致包含 l_2^n.

定理 5 对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta(\varepsilon) > 0$，若 X 是 Banach 空间，$\dim X = N$，则存在子空间 $E \subset X$，E 的维数 $n = [\eta(\varepsilon)\log N]$ 使得 $E \overset{1+\varepsilon}{\sim} l_2^n$，其中 $[a]$ 表示不大于实数 a 的自然数.

定理 5 蕴含定理 4，实际上若 $\dim X = \infty$，可考虑它的维数任意大的子空间，然后由 $n = [\eta(\varepsilon)\log N]$ 确定与 l_2^n $(1+\varepsilon)$ 同构的子空间，由 $(1+\varepsilon)$ 一致包含的定义即得出定理 4. 顺便地，$\log N$ 这一增长速度是不能再改进的，除非对空间 X 再加以限制.

为证明定理 5 还需要一个引理.

引理 4 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对于任何 Banach 空间 X 和 $x_1, \cdots, x_n \in X$，若 Q 是 $(R^n, |\cdot|)$ 的单位球面的 δ 网，并且当 $\alpha \in Q$ 时 $1-\delta \leqslant \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\| \leqslant 1+\delta$，则

$$(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}|\alpha| \leqslant \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\| \leqslant (1+\varepsilon)^{1/2}|\alpha|, \forall\, \alpha \in R^n \tag{1.12}$$

也就是说，若 $E = \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$，则 $E \overset{1+\varepsilon}{\sim} l_2^n$.

证明 设 $|\alpha| = 1$，取 $y^{(0)} \in Q$，使得 $|\alpha - y^{(0)}| < \delta$ 故 $\alpha = y^{(0)} + \lambda_1\alpha_1$，其中 $|\lambda_1| < \delta$，$|\alpha_1| = 1$. 又取 $y^{(1)} \in K$ 使得 $|\alpha_1 - y^{(1)}| < \delta, \cdots$ 于是 $\alpha = y^{(0)} + \lambda_1 y^{(1)} + \lambda_2 y^{(2)} + \cdots$ 其中 $|\lambda_j| \leqslant \delta^j$，由此得到

$$\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\| \leqslant \sum_{j\geqslant 0}\delta^j \|\sum_{i=1}^{n} y_i^{(j)} x_i\| \leqslant (1-\delta)^{-1}(1+\delta)$$

又 $\quad \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \| = \| \sum_{i=1}^{n} (y_i^{(0)} + \lambda \alpha_{1i}) x_i \|$

$$\geqslant 1 - \delta - \delta(1-\delta)^{-1}(1+\delta) = (1-\delta)^{-1}(1-3\delta)$$

取 ε 使 $(1-\delta)^{-1}(1+\delta) \leqslant (1+\varepsilon)^{1/2} \leqslant (1-\delta)(1-3\delta)^{-1}$

即得出所要的结论.

下面定理把寻求有限维空间 $E \overset{1+\varepsilon}{\sim} l_2^n$ 的问题转变为寻求 Gauss $R.V.$ 的问题.

定理 6 对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得对于任一 Banach 空间 X，X 包含子空间 $E \overset{1+\varepsilon}{\sim} l_2^n$ 的必充条件是存在 X 值 Gauss $R.V.\ \xi$ 满足 $d(\xi) \geqslant (1+\varepsilon)^{-2} n$，其中 $n = [\delta(\varepsilon) d(\xi)]$.

证明 充分性. 设 ξ 是 X 值 Gauss $R.V.$，$d(\xi) \geqslant (1+\varepsilon)^{-2} n$. 若 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是 ξ 的独立 copy，我们证明存在集合 A，$P(A) > 0$ 使得 $\{(\xi_1(\omega), \cdots, \xi_n(\omega)), \omega \in A\}$ 张成子空间 E，$E \overset{1+\varepsilon}{\sim} l_2^n$. 为此以 $|\alpha| = (\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2)^{1/2}$ 作为 R^n 上的欧氏范数，先设 $|\alpha| = 1$. 此时 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$ 与 ξ 同分布从而 $E \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i \| = E \| \xi \|$. 由偏差不等式

$$P(| \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i \| - E \| \xi \| | > \delta E \| \xi \|) \leqslant 2exp(-K\delta^2 d(\xi))$$

记 $M = E \| \xi \|$，Q 如引理 4 中所述，则上式表明

$$P\{\exists\ \alpha \in Q, | M^{-1} \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i \| - 1 | > \delta\} \leqslant 2\overline{\overline{Q}} exp(-K\delta^2 d(\xi))$$

其中 $\overline{\overline{Q}}$ 是 Q 的基数. 由引理 3，上式

$$\leqslant 2(1 + \frac{2}{\delta})^n exp(-K\delta^2 d(\xi))$$

$$\leqslant 2exp(\frac{2n}{\delta} - K\delta^2 d(\xi)).$$

事实上可以假定 $d(\xi)$ 相当大. 从而，例如 $2exp(\frac{2n}{\delta} - K\delta^2 d(\xi)) < 1$. 这说明有正概率集 A 使得 $\alpha \in Q$，$M^{-1} | \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i \| - 1 | \leqslant \delta$. 以

$x_i = \xi_i(\omega), \omega \in A$，则 $x_1, \cdots, x_n$ 满足引理 4，特别地若 $E = \text{span}\{(\xi_1(\omega), \cdots, \xi_n(\omega))\}$，则 $E \overset{1+\varepsilon}{\sim} l_2^n$.

反过来，若 $E \subset X, E \overset{1+\varepsilon}{\sim} l_2^n$，令 $T: l_2^n \to E$，使得 $\| T \| \| T^{-1} \| < 1 + \varepsilon$，令 ξ 为 l_2^n 值的标准 Gauss $R.V.$ 以前对于 l_2^n 值的 Gauss $R.V.$ 我们已计算过 $d(\xi) = n$. 而 $\tilde{\xi} = T(\xi)$，则 $\sigma(\tilde{\xi}) \leqslant \| T \|$，

$$\| T^{-1} \|^2 E \| \tilde{\xi} \|^2 \geqslant E \| T^{-1}(\tilde{\xi}) \|^2 = E \| \xi \|^2 = 1,$$

从而 $d(\tilde{\xi}) \geqslant \dfrac{d(\xi)}{\| T \|^2 \| T^{-1} \|^2} \geqslant \dfrac{n}{(1+\varepsilon)^2}$. 定理证毕.

考虑算子空间 $\mathscr{B}(R^n, E)$ 及其共轭空间 $B(E, R^n)$，以 $\| u \|$ 及 $\| v \|^*$ 分别表示 $u \in \mathscr{B}(R^n, E)$ 和 $v \in \mathscr{B}(E, R^n)$ 的范数. 我们知道 u, v 都可用矩阵来表示，此时用 v 与 u 的乘积矩阵的行列式的迹（主对角线上各元素之和）表示 v 作用到 u 上的值. 即 $\langle v, u \rangle = \text{tr}\, vu$.

引理 5　设 E 是向量空间，$\dim E = n$，$\| \cdot \|$ 是 $L(R^n, E)$ 上的范数，则存在同构映射 $u: R^n \to E$ 使得 $\| u \| = 1, \| u^{-1} \|^* = n$.

证明　设 $K = \{u \in \mathscr{B}(R^n, E), \| u \| \leqslant 1\}$，则 K 是紧集，令 $\varphi(u) = det\, u$，后者是 u 的行列式的值，则在 K 上 $\varphi(u)$ 可达到最大值，即 $\exists\, u_0 \in K$,

$$|det\, u_0| = \sup\{|det\, u|, u \in K\}.$$

从而

$$|det(\frac{u_0 + u}{\| u_0 + u \|})| \leqslant |det u_0|.$$

或　　$$|\det(u_0 + u)| \leqslant |det u_0| \, \| u_0 + u \|^n$$

显然　$|\det u_0| \neq 0$，因此 u_0 可逆，注意 $u_0^{-1} \in \mathscr{B}(E, R^n)$，上式两边除以 $|det u_0|$，则

$$|\det(1 + u_0^{-1}u)| \leqslant \| I + u_0^{-1}u \|^n.$$

u 是任意的，又可得出对于 $\forall\, \varepsilon > 0$

$$|\det(1 + \varepsilon u_0^{-1}u)| \leqslant (1 + \varepsilon \| u \|)^n.$$

由于 $\det(1+\varepsilon u_0^{-1}u)=1+\varepsilon\mathrm{tr}u_0^{-1}u+0(\varepsilon)$,故上式意味着 $\varepsilon\to 0$ 时 $\mathrm{tr}\ u_0^{-1}u\leqslant n\|u\|$. 根据范数共轭性

$$\|u_0^{-1}\|^*=\sup\{\mathrm{tr}u_0^{-1}u,\ \|u\|\leqslant 1\}\leqslant n.$$

另一方面,不失一般性,若采用正交基底,则有 $n=\mathrm{tr}u_0^{-1}u_0\leqslant\|u_0^{-1}\|^*\|u_0\|$,得证.

设 X,Y 是 Banach 空间,$T:X\to Y$ 是线性算子,记

$$\alpha_n(T)=\inf\{\|T-S\|,S:X\to Y\text{ 是秩}\leqslant n\text{ 的算子}\}\quad(1.13)$$

称 $\alpha_n(T)$ 是 T 的 n 次逼近数(approximation number).

引理 6 设 H 是 Hilbtrt 空间,X 是 Banach 空间 $T:H\to X$ 是一算子,则对于 $\forall\ \varepsilon>0$. 存在 H 中规范正交系 $\{e_n,n\geqslant 1\}$ 使得 $\|Te_n\|\geqslant\alpha_n(T)-\varepsilon$,其中 $\alpha_n(T)$ 如上定义并且若 $\dim H<\infty$,则可取 $\varepsilon=0$.

证明 容易知道 $\alpha_1(T)\geqslant\alpha_2(T)\geqslant\cdots$,取 $e_1\in H$, $\|e_1\|=1$ 并且 $\|Te_1\|\geqslant\|T\|-\varepsilon=\alpha_1(T)-\varepsilon$,记 $S_1=[e_1]^\perp$ 为 e_1 张成子空间的直交补空间,则 $\|T|S_1\|\geqslant\alpha_2(T)$. 于是存在 $e_2\in S_1$, $\|e_2\|=1$,使得

$$\|Te_2\|\geqslant\alpha_2(T)-\varepsilon.$$

然后再对 $S_2=[e_1,e_2]^\perp$ 考虑类似的问题直到得到所要的叙列. 当 $\dim H<\infty$ 时,由单位球的紧性得出 $\varepsilon=0$.

引理 7(Lewis) 设 $\dim E=N,n=[\frac{N}{2}]$,则存在 $x_1,\cdots x_n\in E$ 使得 $\|x_i\|\geqslant\frac{1}{2}(1\leqslant i\leqslant n)$ 并且 $\forall\ \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in R^n$

$$\|\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i\|\leqslant(\sum_{i=1}^n|\alpha_i|^2)^{1/2}.\quad(1.14)$$

证明 由引理 5,取 $u:l_2^N\to E$,使得 $\|u\|=1$, $\|u^{-1}\|^*=N$. 则必有 $\alpha_k(u)\geqslant 1-\frac{k}{n}$, $1\leqslant k\leqslant N$. 实际上若 P 是 l_2^N 上的正交投影并且 P 的秩小于 k,则

$$N-k<\mathrm{rank}(I-P)=\mathrm{tr}(I-P)=\mathrm{tr}u^{-1}u(I-P)$$

$$\leqslant \| u^{-1} \|^{*} \| u(I-p) \| = N \| u(I-P) \|$$

从而 $\| u - uP \| > 1 - \frac{k}{N}$,故 $a_k(u) \geqslant 1 - \frac{k}{N}$. 由引理6,∃ $e_1, \cdots,$ $e_N \in l_2^N$ 使得 $\| ue_k \| \geqslant a_k(u) \geqslant 1 - \frac{k}{N}$,令 $x_k = u(e_k), k = 1, \cdots,$ N,则对于 $\forall\ \alpha \in R^N$,

$$\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x_k \| \leqslant (\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

若 $k \leqslant n = [\frac{N}{2}]$,则 $\| x_k \| \geqslant \frac{1}{2}$.

最后我们来证明定理 5.

设 θ_k 是独立同分布实值标准Gauss $R.V.$,令 $\xi = \sum_{k=1}^{n} \theta_k x_k$,其中 $x_k \in X$,n 的大小与引理 7 一样,我们证明

$$d(\xi) \geqslant C(\log N)^{1/2},$$

这样由定理 6 立即得出定理 5.

由(1.14)可知 $\sigma(\xi) \leqslant 1$. 另一方面,若 A_k 是概率空间 Ω 的一个分划

$$A_k \subset \{\omega, |\theta_k(\omega)| \| x_k \| = \sup_{i \leqslant n} \| \theta_i(\omega) x_i \| \},$$

则

$$\sup_{i \leqslant n} |\theta_i(\omega)| \| x_i \| = \| \sum_k \theta_k \chi_{A_k} x_k \|.$$

从而

$$E \sup_{i \leqslant k} \| \theta_i x_i \| = E \| \sum_k \theta_k \chi_{A_k} x_k \| \leqslant E \| \sum_k \theta_k x_k \| = E \| \xi \|$$

(注意 $\sum \theta_k (1 - 2\chi_{A_k}) x_k$ 与 ξ 同分布).

现在引理 7 的条件说明

$$\frac{1}{2} E \sup_{k \leqslant n} |\theta_k| \leqslant E \| \xi \|.$$

对于 θ_1,容易知道,存在 $\alpha > 0$ 使得

$$P(\theta_1 > \alpha \log n^{1/2}) \geqslant \frac{1}{n}, \qquad \forall\ n \geqslant 1$$

从而

$$P(\sup_{k\leq n}\theta_k \leqslant \alpha(\log n^{1/2}) = [P(\theta_1 \leqslant \alpha(\log n)^{1/2}]^n$$

$$\leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{-1}.$$

故 ∃ C' 使得

$$E\sup_{k\leqslant n}|\theta_k| \geqslant C'(\log n)^{1/2}$$

最后得到

$$d(\xi) = \frac{\|\xi\|_2^2}{\sigma(\xi)^2} \geqslant \left(\frac{1}{2}E\sup_{k\leqslant n}|\theta_k|\right)^2 \geqslant \frac{C'^2}{4}\log n \geqslant C''\log n.$$

§2 K 凸性与一致包含 l_p^n

本节将叙述关于 Banach 空间的下述几种条件的等价性：(1) K 凸性，(2) B 凸性，(3) 不一致包含 l_p^n，(4) R-p 型($p>1$). 这些性质有各自不同的来源. 例如，K 凸性来自于算子的有界延拓，B 凸性来自大数定律的考察，至于 l_1^n 一致包含和 Rademacher p 型前面都已讨论过. 此外我们还将讨论 l_∞^n 的一致包含性质以及 R-p 型与 R-q 余型的对偶性质.

我们知道 Rademacher 序列 $\{r_n, n\geqslant 1\}$ 是 $L_2(\mu)$ 中的正交函数系，但它并非完备的. 记 R_1 是 $L_2(\mu)$ 到由 $\{r_n, n\geqslant 1\}$ 张成的闭子空间上的投影算子. 此外记 I_X 是 Banach 空间 X 上的恒等算子，现在考虑 $L_2(u)\otimes X$ 上的算子 $R_1\otimes I_X$：

$$(R_1\otimes I_X)(\sum_{i=1}^n \varphi_i x_i) = \sum_{i=1}^n (R_1\varphi_i)x_i,\ \forall\ \varphi_i \in L_2(\mu), x_i\in X.$$

定义 1 Banach 空间 X 称为是 K 凸的：若 $R_1\otimes I_X$ 可延拓为 $L_2(\mu,X)$ 上的有界算子. 此时记 $K(X)$ 是 $R_1\otimes I_X$ 在 $L_2(\mu,X)$ 上的范数，即 $K(X) = \|R_1\otimes I_X\|_{L_2(\mu,X)\to L_2(\mu,X)}$.

例 1 设 $X = l_1^k, k = 2^n$，记 $D_n = \{-1,1\}^n$，以 μ 为 D_n 上的 Haar 测度(参见 Ⅱ. §2 例 4)，以 b_i 记 D_n 上的第 i 个坐标，注意 $l_1^{2^n}$

可以与 $L_1(D_n)$ 建立等距同构关系. 将 b_i 看成 $L_1(D_n)$ 的元素, 对于函数

$$F(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 + r_i(t)b_i),$$

则 $\| F(t) \|_X = 1$, 从而 $\| F \|_{L_2(\mu,X)} = 1$, 但

$$((R_1 \otimes I_X)F)(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(t)b_i$$

$$\| (R_1 \otimes I_X)F \| L_2(\mu,X) = E \| \sum_{i=1}^{n} r_i \| \geqslant A_1 n^{1/2}$$

后者是根据 Khintchin 不等式, 于是 $K(l_1^{2^n}) \geqslant A_1 n^{1/2} \to \infty (n \to \infty)$. 由此知道一个 K 凸空间 X 不可能一致包含 l_1^n. 因为 l_1^n 作为 X 的闭子空间必有 $K(l_1^n) \leqslant K(X)$, 得出矛盾.

由此还可以知道 $l_1, L_1, l_\infty, L_\infty, c_0$ 都不是 K 凸的.

例 2 空间 l_2 是 K 凸的.

设 $f \in L_2(\mu) \otimes l_2$, 若 $\{e_i\}$ 是 l_2 的标准基, 令 $\varphi_i = \langle f, e_i \rangle$, 则

$$\| f \|_{L_2(l_2)} = (E \| f \|^2)^{1/2} = (E \sum_{i=1}^{\infty} \| \varphi_i \|^2)^{1/2} = (\sum_{i=1}^{\infty} \| \varphi_i \|_2^2)^{1/2}.$$

另一方面,

$$\langle (R_1 \otimes I_{l_2}) f(\omega), e_i \rangle = R_1 \langle I_{l_2} f(\omega), e_i \rangle = R_1 \varphi_i$$

所以

$$\| (R_1 \otimes I_{l_2}) f \|_{l_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |R_1 \varphi_i|^2 \right)^{1/2},$$

$$\| (R_1 \otimes I_{l_2}) f \| L_2(l_2) = \left[E\left(\sum_{i=1}^{\infty} (R_1 \varphi_i)^2 \right) \right]^{1/2}$$

$$\leqslant \| R_1 \| \left(E \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i|^2 \right)^{1/2} \doteq \| R_1 \| \, \| f \|_{L_2(l_2)}.$$

从而

$$\| R_1 \otimes I_{l_2} \|_{L_2(l_2) \to L_2(l_2)} \leqslant \| R_1 \| < \infty.$$

由此还容易得出, 同构于 Hilbert 空间的 Banach 空间是 K 凸的.

下面定理可以看成是上一章 §1 定理 4(3) 的逆, 但需要对空

间补充 K 凸条件.

定理 1(Maurey,Pisier)　设 X 是 K 凸 Banach 空间,X^* 是 X 的共轭,若 X^* 是 R-q 余型的($2 \leqslant q \leqslant \infty$),则 X 是 R-p 型的,这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

证明　设 X^* 是 R-q 余型的,故存在 $C > 0$ 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i^* \|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i^* \right\|_{L_2(X^*)}, \tag{2.1}$$

$$\forall\, n \geqslant 1, x_1^*, \cdots, x_n^* \in X^*$$

对于 $\forall\, x_1, \cdots, x_n \in X$,记 $x = (x_1, \cdots, x_n)$,

$$|||x||| = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i,\ \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i^* \right\|_{L_2(X^*)} \leqslant 1 \right\}. \tag{2.2}$$

设 $S = \{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i^*, t \in [0,1] \}$,$S \subset L_2(X^*)$. 注意 S 是闭子空间,故

$$S = S^{\perp\perp} = \left(\frac{L_2(X)}{S^{\perp}} \right)^*.$$

注意(2.2)又可写成 $|||x||| = \sup\{ E\sum_{i=1}^{n} (r_i x_i)(r_j x_j^*),\ \| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i^* \|_{L_2(X^*)} \leqslant 1 \}$,$|||\cdot|||$ 是共轭范数,因此根据商范数得到

$$|||x||| = \inf\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + \Phi \right\|_{L_2(X)}, \Phi \in L_2(X), E\varepsilon_i \Phi = 0,\ i = 1, \cdots, n \right\}. \tag{2.3}$$

现在由(2.2)和(2.1)知道

$$\begin{aligned} |||x||| &\leqslant \sup\left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i^* \|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i^* \right\|_{L_2(X^*)} \leqslant 1 \right\} \\ &\leqslant C \left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

不妨设 $\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p \leqslant 1$,由(2.3),存在 $\Phi \in L_2(X)$,$E\varepsilon_i \Phi = 0(i =$

$1,\cdots,n)$ 使得 $\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i + \Phi \|_{L_2(X)} \leqslant C$. 但

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i = (R_1 \otimes I_X)\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i + \Phi \right)$$

所以

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \|_{L_2(X)} \leqslant \| R_1 \otimes I_X \| \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i + \Phi \|_{L_2(X)} \leqslant K(X)C.$$

由范数的齐性得到

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \|_{L_2(X)} \leqslant K(X)C\left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.4)$$

X 是 p 型空间.

推论 1 (1) 若 X^* 是 R-p 型,则 X 为 R-q 余型的.

(2) 若 X 是 K 凸空间并且是 R-q 余型的,则 X^* 是 R-p 型的. 这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证明 (1) 可以根据上一章 §1 定理 4(3) 得到. 实际上,若 X^* 是 p 型的,则 X^{**} 是 q 余型的,作为子空间 X 是 q 余型的.

为证明(2),只须注意到 $L_2(\mu,X)^* = L_2(\mu,X^*)$ 并且 $R_1 \otimes I_X$ 在 $L_2(\mu,X)$ 上有界当且仅当 $R_2 \otimes I_{X^*}$ 在 $L_2(\mu,X^*)$ 上有界,因此 $X K$ 凸当且仅当 X^* K 凸,剩下的证明与定理 1 类似.

定理 2(Pisier) Banach 空间 X 是 K 凸的当且仅当 X 不一致包含 l_1^n.

这一定理的必要性已在例 1 末尾说明了. 关于充分性的证明是这里的实质部分. Pisier 不仅证明了充分性成立,而且证明了 K 凸性与一种特殊类型的算子半群的解析性,以及空间的局部 π—Euclid 性质等价. 由于涉及其它基础知识,这里就不拟叙述了.

定义 2(Beck) Banach 空间 X 称为是 B 凸空间:若存在自然数 k 和 $\varepsilon > 0$,对于 X 的单位球中的任何元素 $x_1,\cdots,x_k$ 都可取一组"+","−"符号使得

$$\| x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_k \| < k(1-\varepsilon) \qquad (2.5)$$

定义 3 称Banach 空间满足(B)型大数定律:若对于任何 X 值独立 $R.V.$ 序列$\{d_n\}$,$Ed_n = 0$,$E\|d_n\|^2 \leqslant M < \infty$,则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \to 0, a.e. \tag{2.6}$$

Beck 证明了上述两类空间是一致的.

定理 3 设 X 是 Banach 空间,则以下条件等价:

(i)X 是 B 凸的.

(ii)X 满足(B)型大数定律.

(iii)X 是 R-p 型的并且 $p > 1$.

(iv)X 不一致包含 l_1^n.

证明 (iii)⇒(ii) 容易由 Hoffmann-Jφrgensen,Pisier 定理得到(见 V. §3 定理 1).实际上,例如 X 是 $p(>1)$ 型的,$\{d_n\}$ 满足(B)型大数定律的条件,则由于 $E\|d_n\|^p \leqslant (E\|d_n\|^2)^{\frac{p}{2}} \leqslant M^{\frac{p}{2}} < \infty$,于是 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}E\|d_n\|^p \leqslant M^{\frac{p}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} < \infty$. 从而$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \to 0$ $a.e.$ (B)型大数定律的结论成立.

(ii)⇒(i) 若 X 不是 B 凸的,由定义对于任何自然数 k 和 $\varepsilon > 0$,存在 $x_1,\cdots,x_k$,$\|x_i\| \leqslant 1(1 \leqslant i \leqslant k)$,对于 ± 号的任何选择都有

$$\|x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_k\| \geqslant k(1-\varepsilon).$$

选取正数序列 ε_i 和 δ_i,$\varepsilon_i \to 0$,$\delta_i \to 0$,而后取自然数 $k_1 > \delta_1^{-1}(1-\delta_1)$ 和 $x_1^{(1)},\cdots,x_{k_1}^{(1)}$ 使得

$$\|x_1^{(1)} \pm \cdots \pm x_{k_1}^{(1)}\| \geqslant k_1(1-\varepsilon_1)$$

其中 $\|x_i^{(1)}\| \leqslant 1$,± 号任意选取将不再复述.归纳地进行这一过程,对于每个 $n > 1$,令 $m_n = \sum_{i=1}^{n-1} k_i$,取 $k_n > \delta_n^{-1}(1-\delta_n)m_n$ 和相应元素 $x_1^{(n)},\cdots,x_{k_n}^{(n)}$ 使得

$$\|x_1^{(n)} \pm \cdots \pm x_{k_n}^{(n)}\| \geqslant k_n(1-\varepsilon_n),$$

注意$\frac{k_n}{m_{n+1}} > 1 - \delta_n, \frac{m_n}{m_{n+1}} < \delta_n$.

现在定义独立 $R.V.$ 序列$\{d_i\}$. 对于每个自然数 i,若有 $m_j < i \leqslant m_{j+1}$,即 $i = m_{j+r}$,其中 $1 \leqslant r \leqslant k_j$,则令 $x_i = x_r^{(j)}$. 再令 $P(d_i = x_i) = P(d_i = - x_i) = \frac{1}{2}$ 且$\{d_i\}$彼此独立,则 $Ed_i = 0$ 并且 $E\|d_i\|^2 = \|x_i\|^2 \leqslant 1$. 但

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{m_{j+1}} \sum_{i=1}^{m_{j+1}} d_i(\omega) \right\| &\geqslant \left\| \frac{1}{m_{j+1}} \sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} d_i(\omega) \right\| - \left\| \frac{1}{m_{j+1}} \sum_{i=1}^{m_j} d_i(\omega) \right\| \\ &\geqslant \frac{1}{m_{j+1}} \| x_1^{(j)} \pm \cdots \pm x_{k_j}^{(j)} \| - \frac{1}{m_{j+1}} m_j \\ &\geqslant \frac{1}{m_{j+1}} k_j(1 - \varepsilon_j) - \frac{m_j}{m_{j+1}} \\ &\geqslant (1 - \delta_j)(1 - \varepsilon_j) - \delta_j,\end{aligned}$$

从而$\limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i(\omega) \right\| = 1 \ a.e.$,与(ii)矛盾.

(i)⇒(iv) 反设 X 一致包含 l_1^n,则对于 $\forall \varepsilon > 0$ 和 $n \geqslant 1$,$\exists\ x_1, \cdots, x_n$,不妨设 $\|x_i\| = 1$,使得任何标量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 有

$$(1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|,$$

此时无论 $\alpha_i = \pm 1$ 都有

$$(1 - \varepsilon)k \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} \pm x_i \right\| \leqslant k$$

与 B 凸性矛盾.

(iv)⇒(iii) 对于自然数 n,记

$$\lambda_n = \inf\left\{\lambda, \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant \lambda \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{1/2}, \forall\ x_1, \cdots, x_n \in X\right\} \tag{2.7}$$

$(\inf\varnothing = \infty)$. 我们首先证明,对于任何自然数 n,k,

$$\lambda_{nk} \leqslant \lambda_n \lambda_k \tag{2.8}$$

为此设 $x_1, \cdots, x_{nk} \in X$,令

$$x_i(\theta) = \sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} r_j(\theta)x_j. \quad \theta \in [0,1], i = 1,\cdots,n.$$

则

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\theta) \right\|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \lambda_n \sqrt{n}\left(\left(\sum_{i=1}^n \| x_i(\theta) \|^2\right)\right)^{1/2},$$

于是

$$\left(\int_0^1\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\theta) \right\|^2 dtd\theta\right)^{1/2} \leqslant \lambda_n \sqrt{n}\left(\int_0^1 \sum_{i=1}^n \| x_i(\theta) \|^2 d\theta\right)^{1/2}.$$

最后有

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{nk} r_j(t)x_j \right\|^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i(\theta) \right\|^2 dtd\theta\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \lambda_n \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n \int_0^1 \left\| \sum_{j=(i-1)k+1}^{ik} r_i(\theta)x_j \right\|^2 d\theta\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \lambda_n\lambda_k \sqrt{nk}\left(\sum_{j=1}^{nk} \| x_j \|^2\right)^{1/2}.$$

故得到(2.8).

现在有两种情况:(1) 若对于任何 $n \geqslant 1, \lambda_n = 1$,则对于任何 $\varepsilon > 0$,$\exists\ x_1,\cdots,x_n$ 使得

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \right\|^2 dt \geqslant (1-\varepsilon)n\sum_{i=1}^n \| x_i \|^2. \qquad (2.9)$$

注意 $\left(\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t)x_i \right\|^2 dt\right)^{1/2}$. 对于 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 有 2^n 种选择,设有 K 个满足

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 \leqslant (1-\sqrt{\varepsilon})n\sum_{i=1}^n \| x_i \|^2,$$

对于(2.9) 有

$$(1-\varepsilon)n\sum_{i=1}^n \| x_i \|^2 \leqslant \frac{1}{2^n}K(1-\sqrt{\varepsilon})n\sum_{i=1}^n \| x_i \|^2 + \frac{1}{2^n}(2^n - K)\left(\sum_{i=1}^n \| x_i \|\right)^2.$$

由 $\left(\sum_{i=1}^n \| x_i \|\right)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^n \| x_i \|^2$ 得出 $K \leqslant 2^n\sqrt{\varepsilon}$. 对于 $\varepsilon < 2^{-2n}$ 知

道 $K=0$,于是不论 $\varepsilon_i=\pm 1$ 如何,相应的 $x_1,\cdots,x_n$ 都有

$$\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\|^2 \geqslant (1-\sqrt{\varepsilon})n\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.$$

仍将 $\sqrt{\varepsilon}$ 换为 ε,若 $\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2=n$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\right)^2 \geqslant (1-\varepsilon)n^2.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\|x_i\|-\|x_j\|)^2\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\|x_i\|^2-2\|x_i\|\|x_j\|+\|x_j\|^2)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(n\|x_i\|^2-2\|x_i\|(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|)+\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2)\\
&=\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|\right)+\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\|x_i\|-\|x_j\|)^2 &= n\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\right)^2\\
&\leqslant \varepsilon n^2. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

故 $\max\|x_i\|-\min\|x_i\|\leqslant\sqrt{2\varepsilon}n$. 这说明 x_i 的范数都非常接近从而接近于 1,特别地

$$1-\sqrt{2\varepsilon}n\leqslant\|x_i\|\leqslant 1+\sqrt{2\varepsilon}n. \qquad (2.11)$$

现在令 $y_i=\dfrac{x_i}{\|x_i\|}$,对于 $\forall\ \alpha_i\in R$,若 $\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|=1$,取 $\beta_i=\dfrac{(1-\sqrt{2\varepsilon}n)\alpha_i}{\|x_i\|}$,$\varepsilon_i=\mathrm{sign}\beta_i$,则 $|\beta_i|\leqslant 1$ 并且

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon)^{1/2}n\leqslant\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\| &= \|\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-|\beta_i|)x_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\|\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}(1-|\beta_i|)\|x_i\|+\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\|
\end{aligned}$$

$$\leqslant n(1+\sqrt{2\varepsilon n})+(1-\sqrt{2\varepsilon n})\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\|$$

或者

$$1=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\geqslant\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\|\geqslant\frac{(1-\varepsilon)^{1/2}n-n(1-\sqrt{2n\varepsilon}}{1-\sqrt{2\varepsilon n}}.$$

令 $\delta=\dfrac{1-\sqrt{2\varepsilon n}-(1-\varepsilon)^{1/2}n+n(1+\sqrt{2n\varepsilon})}{1-\sqrt{2\varepsilon n}}$,当 $\varepsilon\to0$ 时 $\delta\to1$,故总可得到 $\delta>0$. 由范数的齐次性,对任何 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in R$,

$$(1-\delta)\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\leqslant\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|.$$

(由此式还可知 $y_1,\cdots,y_n$ 是线性无关的),X 一致包含 l_1^n,与条件(iv) 矛盾.

(2) 存在自然数 k 使得 $\lambda_k<1$,取 $q\geqslant2$,使得 $\lambda_k=k^{-\frac{1}{q}}$,则由(2.7),

$$\lambda_{k^n}\leqslant(\lambda_k)^n=k^{-\frac{n}{q}}\tag{2.12}$$

令 $p=\dfrac{q}{q-1}$,我们证明对于任何 $1<r<p$,X 具有 R-p 型.

实际上,对于每个 n 和 $x_1,\cdots,x_n\in X$,$i\geqslant0$,记

$$A_i=\{j,\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^r\right)^{\frac{1}{r}}}{k^{(i+1)/r}}<\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^r\right)^{1/r}}{k^{i/r}}\},$$

若以 $\overline{A}_i$ 记 A_i 的基数,则

$$\left(\int_0^1\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)x_i\|^2dt\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{i\geqslant0}\int_0^1\|\sum_{j\in A_i}r_j(t)x_j\|^2dt\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\sum_{i\geqslant0}\left(\int_0^1\|\sum_{j\in A_i}r_j(t)x_j\|^2dt\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\sum_{i\geqslant0}\lambda_{\overline{A}_i}\sqrt{\overline{A}_i}\left(\sum_{j\in A_i}\|x_j\|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\sum_{i\geqslant0}\lambda_{\overline{A}_i}\sqrt{\overline{A}_i}\sqrt{\overline{A}_i}\frac{1}{k^{i/r}}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^r\right)^{1/r}\tag{2.13}$$

又 $\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^r\right)^{1/r}\geqslant\left(\sum_{j\in A_i}\|x_j\|^r\right)^{1/r}\geqslant\overline{A}_i\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j^r\right)^{1/r}/k^{(i+1)/r}$，从而 $\overline{A}_i^{1/r}\leqslant k^{(i+1)/r}$，此外显然由 λ_n 的定义，当 $m\leqslant n$ 时 $\sqrt{m}\lambda_m\leqslant\sqrt{n}\lambda_n$. 故由(2.12)

$$\sum_{i\geqslant 0}\lambda_{\overline{A}_i}\overline{A}_i k^{-i/r}\leqslant\sum_{i\geqslant 0}\lambda_{k^{(i+1)}}k^{i+1}k^{-i/r}\leqslant\sum_{i\geqslant 0}k^{-(i+1)/q}k^{(i+1)}k^{-i/r}$$
$$\leqslant\sum_{i\geqslant 0}k^{i(1-\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}=\sum_{i\geqslant 0}k^{i(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}<\infty.$$

由定理 2 可得到

推论 2 设 X 是 Banach 空间，则 X B 凸当且仅当 X K 凸.

在第 V 章 §1 我们引进过记号 p_X 和 q_X，现在我们有

定理 4 设 X 是 Banach 空间，若 $p_X>1$，则 $\frac{1}{p_X}+\frac{1}{q_{X^*}}=1$.

因为此时 X 是 K 凸的，由推论 1 得出所要的结论.

$p_X>1$ 的条件不能少. 例如 l_1 有 2 余型，c_0 仅有 1 型.

定理 5 (Maurey-Pisier-Krivine) 设 X 是无穷维 Banach 空间，则

(i) X 一致包含 $l_{\bar p}^n$，其中 $\bar p=\sup\{p,X$ 是 p 型的$\}$.

(ii) X 一致包含 $l_{\bar q}^n$，其中 $\bar q=\inf\{q,X$ 是 q 余型的$\}$.

在证明此定理之前，让我们给出定理 5 的几种等价形式. 首先，若 X 一致包含 l_p^n，即对于 $\forall\ \varepsilon>0$ 和 $n\geqslant 1$，存在 $x_1,\cdots,x_n\in X$，$\|x_i\|=1(1\leqslant i\leqslant n)$ 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|\leqslant(1+\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\right)^{1/p}\qquad(2.14)$$

将 α_i 换为 r_i，再积分有

$$n^{1/p}\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{n}r_i x_i\right\|_2\leqslant(1+\varepsilon)n^{1/p}.$$

注意 $\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^r\right)^{1/r}=n^{1/r}$，所以 X 不可能有大于 p 的型和小于 p 的余型，因此由定理 5 可以得出

$$p_X = \inf\{p, X \text{ 一致包含 } l_p^n\},$$
$$q_X = \sup\{p, X \text{ 一致包含 } l_p^n\}. \tag{2.15}$$

由此可以得出定理 5 的等价叙述：

定理 6 设 X 是 Banach 空间，$1 < p \leqslant q < \infty$，则

(i) X 是 p 型的当且仅当 X 不一致包含 l_1^n.

(ii) X 是 q 余型的当且仅当 X 不一致包含 l_∞^n.

另外对于定理 5，当 $p_X = 2$ 时，其结果已包含在 Dvoretzky 定理中. 当 $p = 1$ 或 $q = \infty$ 时，即定理 6，是 Maurey 与 Pisier 的结果. 在上一章中我们讲过 Gauss-p 型，根据那里 §5 定理 2，对于一个 Banach 空间 X 还有 $p_X = \sup\{p, X \text{ 是G-}p \text{ 型的}\}$. 我们下面将证明定理 6 的(i)，而将(ii) 的证明略去. 为此只须证明：

定理 7 设 $1 \leqslant p \leqslant 2$，则对于 Banach 空间 X，以下条件等价：

(i) X 是 G-p 型的.

(ii) 对某个 $\varepsilon > 0$，X 不$(1+\varepsilon)$ 一致包含 l_p^n.

(iii) 对每个 $\varepsilon > 0$，X 不$(1+\varepsilon)$ 一致包含 l_p^n.

一旦定理 7 得到证明，定理 5(i) 便可得到. 实际上，若 $p_X < p \leqslant 2$，则由(2.15)，X 不是 G-p 型的，于是定理结论说明 X 一致包含 l_p^n. 若 $p = p_X$，则有某个 $p_1 > p$ 使得 X 是 G-p_1 型的，同样可得到 X 一致包含 l_p^n. 至于 $p = 2$ 的情况同样包含在 Dvoretzky 定理中.

为证明定理 7 的(i)⇒(ii)，我们有下面更细致的结论.

定理 8 设 $1 < p < 2$，$q = \dfrac{p}{p-1}$，对于每个 $\varepsilon > 0$，$\exists\ \eta_p(\varepsilon) > 0$，使得对于任何 G-p 型 Banach 空间 X，都存在维数是 $n = [\eta_p(\varepsilon) ST_p(X)^q]$ 的子空间 E 使得 $E \overset{1+\varepsilon}{\sim} l_p^n$. 这里 $ST_p(X)$ 是 X 的 G-p 型常数.

定理 7 的证明 (i)⇒(ii) 注意 X 的 R 型和 G 型都是由 X 的有限维子空间族决定的性质. 若 X 一致包含 l_p^n，但 l_p 本身并不是 G-p 型的，所以 X 也不是 G-p 型的.

(ii)⇒(i)　若定理8成立，当 X 不是 G-p 型时，$ST_p(X)=\infty$. 此时可找到 X 的子空间 X_n，其 G-p 常数任意大. 若 $1<p<2$，由定理8，$X_n \overset{1+\epsilon}{\sim} l_p^n$，与(ii)矛盾. 对于 $p=1$ 的情况，由于区间[1,2]中使 X 一致包含 l_p^n 的 p 是闭集(可直接验证)，故 $p=1$ 一定包含在其中.

剩下只须证明定理8. 为此需要一些关于 Gauss $R.V.$ 的引理. 首先，假定 $\{\lambda_i\}$ 是一列独立同分布的实值 $R.V.$，$P(\lambda_i>t)=e^{-t}$，$t\geqslant 0$. 记 $\Gamma_j=\sum_{i=1}^{j}\lambda_i\quad(j\geqslant 1)$，则

$$P(\Gamma_j\leqslant t)=\int_0^t \frac{s^{j-1}}{(j-1)!}e^{-s}ds,\quad t\geqslant 0$$

特别地，$P(\Gamma_j^{-1/p}>t)\leqslant \frac{1}{j!t^{pj}}$，$0<p<\infty$，$j\geqslant 1$，$t>0$. $j=1$ 时

$$\lim_{t\to\infty} t^p P(\Gamma_1^{-1/p}>t)=1. \tag{2.16}$$

$j\geqslant 2$ 时，$\|\Gamma_j^{-1/p}\|_p<\infty$，从而

$$\lim_{t\to\infty} t^p P(\Gamma_j^{-1/p}>t)=0. \tag{2.17}$$

由强大数定律 $j^{-1}\Gamma_j\to 1$ $a.e.$ 故对于 $\forall\,\alpha>0$，只要 $j>\alpha$，由 Stirling 公式

$$E(\Gamma_j^{-\alpha})=\frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j)}\sim\frac{1}{j^\alpha} \tag{2.18}.$$

同时

$$E\sum_{j=1}^{\infty}|\Gamma_j^{-1/p}-j^{-1/p}|=\int_0^\infty\sum_{j=1}^{\infty}|s^{-1/p}-j^{-1/p}|\frac{s^{j-1}}{(j-1)!}e^{-s}ds. \tag{2.19}$$

引理1　设 $0<p<2$，η 是实值对称 $R.V.$，$E|\eta|^p<\infty$，$\{\eta_i\}$ 是与 η 同分布的独立 $R.V.$ 序列，$\{\eta_i\}$ 与 $\{\Gamma_i\}$ 独立，则级数

$$Y=\sum_{j=1}^{\infty}\Gamma_j^{-1/p}\eta_i$$

$a.e.$ 收敛，并且 Y 是 p-G $R.V.$，Y 的参数 $\sigma=C_p^{-1}\|\eta\|_p$，其中 C_p

满足

$$\lim_{t\to\infty} t^p P(|\eta| > t) = C_p^p \sigma^p. \tag{2.20}$$

证明 对于 $t > 0$ 和 $2 \leqslant j \leqslant n$,

$$P\left(\left|\sum_{j=j_0}^{n} \Gamma_j^{-1/p}\eta_j\right| > t\right) \leqslant P(\exists\ j \geqslant j_0, |\eta_j| > tj^{1/p})$$

$$+ \frac{1}{t^2}\sum_{j\geqslant j_0} E\Gamma_j^{-\frac{2}{p}}\eta_j^2\chi_{\{|\eta_j|\leqslant tj^{1/p}\}} = I_1 + I_2.$$

其中

$$I_1 \leqslant \sum_{j\geqslant j_0} P(|\eta| > tj^{1/p}) \leqslant \frac{1}{t^p}E|\eta|^p\chi\{|\eta| > tj_0^{1/p}\}.$$

若 j_0 足够大,根据(2.18),存在 C 和 C' 使得

$$I_2 \leqslant \frac{C}{t^2}E\eta^2\sum_{j\geqslant j_0} j^{-2/p}\chi_{\{j\geqslant|\eta|^p/t^p\}}$$

$$\leqslant \frac{C'}{t^2}\frac{1}{j_0^{2/p-1}}E|\eta|^2\chi_{\{|\eta|\leqslant tj_0^{1/p}\}} + \frac{C'}{t^p}E|\eta|^p\chi_{\{|\eta|>tj_0^{1/p}\}}.$$

对每个固定的 t,令 $j_0 \to \infty$,则 I_1 与 I_2 各部分均趋于 0,于是 $\sum_{j=1}^{\infty}\Gamma_j^{-1/p}\eta_j$ 依概率收敛. 由于各项独立,故 $a.e.$ 收敛.

为验证 Y 的 G-p 型,只须验证若 Y_1, Y_2 是 Y 的独立 copy,则 $\alpha_1Y_1 + \alpha_2Y_2 \backsim (|\alpha_1|^p + |\alpha_2|^p)^{1/p}Y$. 现在设 $Y_i = \sum_{j=1}^{\infty}\Gamma_{ji}^{-1/p}\eta_{ji}, i = 1, 2$. 其中 $\{(\Gamma_{ji}), (\eta_{ji})\} \backsim \{(\Gamma_j), (\eta_j)\}\ (i = 1,2)$. 令 $\beta_i = |\alpha_i|^p$,考虑 $\{\Gamma_{ji}\beta_i^{-1}, j \geqslant 1, i = 1,2\}$ 的非增重排 $\{\gamma_j^*, j \geqslant 1\}$. $\{\Gamma_{ji}\beta_i^{-1}, j \geqslant 1\}$ 是以 β_i 为参数的 Poisson 过程的跳跃. 记这些过程为 $N^i, i = 1,2$,则 $\{\gamma_j^*, j \geqslant 1\}$ 是 $N^1 + N^2$ 的顺时跳跃,$N^1 + N^2$ 是以 $\beta_1 + \beta_2$ 为参数的 Poisson 过程. 于是它与 $\{(\beta_1 + \beta_2)^{-1}\Gamma_j, j \geqslant 1\}$ 有同分布,从而

$$\alpha_1Y_1 + \alpha_2Y_2 \overset{=}{\backsim} \sum_{j=1}^{\infty}(\gamma_j^*)^{-1/p}\eta_j = (\beta_1 + \beta_2)^{1/p}\sum_{j=1}^{\infty}\Gamma_j^{-1/p}\eta_j$$

$$= (|\alpha_1|^p + |\alpha_2|^p)^{1/p}Y$$

所以 Y 是 p-Gauss $R.V.$ 当 $j = 1$ 时,由(2.16)得出

$$\lim_{t\to\infty} t^p P(\Gamma_1^{-\frac{1}{p}}|\eta_1| > t) = E|\eta|^p.$$

当 $j \geqslant 2$ 时由(2.17)以及 $E|\eta|^p < \infty$ 得出

$$\lim_{t\to\infty} t^p P(|\sum_{j=1}^{\infty}\Gamma_j^{-1/p}\eta_j| > t) = 0.$$

故

$$\lim_{t\to\infty} t^p P(|Y| > t) = E|\eta|^p.$$

所以 G-p 常数为 $C_p^{-1}\|\eta\|_p$.

引理 2　设$\{Y_i\}$是独立 X 值 R.V. 序列，$\|Y_i\| < 1$. $\{\beta_i\}$ 是实数，$|\beta_i| \leqslant i^{-1/p}$，则 $S = \sum\beta_i Y_i$ 满足对于任何 $t > 0$,

$$P(|\|S\| - E\|S\|| > t) \leqslant 2exp(-K_p t^q). \quad (2.21)$$

这里 $1 < p \leqslant 2, q = \dfrac{p}{p-1}$.

证明　在 V. §1 我们证明过关于鞅的不等式

$$P(\|\sum d_i\| - E\|\sum d_i\| > t) \leqslant 2exp(-\frac{t^2}{8\Sigma\|d_i\|_\infty^2}) \quad (2.22)$$

假设$\sup_i i^{1/p}\|d_i\|_\infty = 1$，考虑 $t = t_m = 1 + 2^{-1/p} + \cdots + m^{-1/p} \sim qm^{1/q}$，若 $S_m = \sum_{i=1}^{m} d_i, R_m = \sum_{i>m} d_i$，则

$$\begin{aligned}|\|\sum d_i\| - E\|\sum d_i\|| &\leqslant |\|\sum_{j>m} d_i\| - \|\sum_{i>m} d_i\|| \\ &\quad + |\|\sum_{i\leqslant m} d_i\| - E\|\sum_{i\leqslant m} d_i\|| \\ &\leqslant |\|R_m\| - E\|R_m\|| + 2t_m.\end{aligned}$$

所以由(2.22)

$$\begin{aligned}P(|\|S\| - E\|S\|| > 3t_m) &\leqslant P(|\|R_m\| - E\|R_m\|| > t_m) \\ &\leqslant 2exp(-\frac{t_m^2}{8\sum_{i>m} i^{-2/p}}),\end{aligned}$$

存在常数 C 使得 $\sum_{i>m} i^{-\frac{2}{p}} \leqslant Cm^{1-\frac{2}{p}}$，于是上式最后小于 $2exp(-C'$

t_m^q). 对于任意的 t,取 m 使 $t_m < t \leqslant t_{m+1}$ 则可得出

$$P(|\| \sum d_i \| - E \| \sum d_i \| | > t) \leqslant$$

$$2exp(-\frac{K_p t^q}{(\sup i^{1/p} \| d_i \|_\infty)^q}). \qquad (2.23)$$

对于 $S = \sum \beta_i Y_i, |\beta_i| \leqslant i^{-\frac{1}{p}}$ 代入上式可得(2.21).

定理 8 的证明 设 $ST_p(X) < \infty$, 令 $s = \frac{1}{2} ST_p(X)$, 由 $ST_p(X)$ 的定义,存在非 0 的向量 $x_1, \cdots, x_n \in X$ 使得

$$\sum_{j=1}^{n} \| x_i \|^p = 1, E \| \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \| > s.$$

这里$\{\theta_i\}$是p-G $R.V.$ 序列,设Y是定义在X单位球面上的$R.V.$,

$$P(Y = \pm \frac{x_i}{\| x_i \|}) = \frac{\| x_i \|^p}{2}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

若 $\{Y_j\}$ 是 Y 的独立 copy, 由上面引理 2, $\widetilde{Y} = C_p^{-1} \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i$ 与 $\sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{-\frac{1}{p}} Y_j$ 同分布. 令 $Z = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\frac{1}{p}} Y_j$ 并且设 $\{\widetilde{Y}_j\}, \{Z_j\}$ 分别是 $\widetilde{Y}$ 与 Z 的独立 copy. 若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in R$, $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p = 1$. 取 $\{\widetilde{Y}_j\}$ 的独立 copy$\{\widetilde{Y}_{ji}\}, i \geqslant 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Z_i = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i j^{-1/p} \widetilde{Y}_{ji}.$$

由于 Y_{ji} 的独立同分布和对称性,它与 $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_i \widetilde{Y}_j$ 有相同分布,这里 β_j 是集合 $\{|\alpha_i| j^{-\frac{1}{p}}, j \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 的非增重排,于是 $\beta_i \leqslant j^{-\frac{1}{p}}$. 注意 $\| Y \|_\infty \leqslant 1$,由(2.21) 得出

$$P(|\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Z_i \| - E \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Z_i \| | > t) \geqslant 2exp(-\frac{t^q}{C_q}), \qquad (2.24)$$

C_q 为某个常数.

以下的证明和 §1 定理 5 的证明类似而且与 l_p^n 同构的子空间

可以通过一个 X 值 $R.V.$ 找出来. 实际上,设 $\widetilde{Y}_i$ 是如上的 p-G $R.V.$,$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in R$, $\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p=1$,则

$$E\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\widetilde{Y}_i\| = E\|\widetilde{Y}\| > C_p^{-1}s \tag{2.25}$$

$\widetilde{Y}$ 与 Z 不同,但由(2.19)

$$E\|\sum_{j=1}^{n}Y_j(\Gamma_j^{-\frac{1}{p}}-j^{-\frac{1}{p}})\| \leqslant E\sum_{j=1}^{\infty}|\Gamma_j^{-\frac{1}{p}}-j^{-\frac{1}{p}}| \triangleq D_p<\infty.$$

从而由三角不等式和 Hölder 不等式

$$|E\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\widetilde{Y}_i\| - E\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_iZ_i\||\leqslant D_p\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| = D_pn^{\frac{1}{q}}.$$

设 $\delta>0$ 满足 $D_pn^{1/p}\leqslant\delta s/2C_p$,若 $M=E\|\widetilde{Y}\|$,则(2.25) 表明

$$|E\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_iZ_i\| - M|\leqslant\frac{\delta M}{2}.$$

取 $t=\frac{\delta M}{2}$,由(2.24) 得到

$$\begin{aligned}P(|\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_iZ_i\| - M|>\delta M) &\leqslant 2exp(-\delta^qM^q/2^qC_q)\\ &\leqslant 2exp(-\delta^qS^q/2^qC_p^qC_q).\end{aligned}$$

设 K 是 l_p^n 的单位球面的 δ 网,其基数小于 $exp(2n/\delta)$,则

$$\begin{aligned}&P(\forall\ \alpha\in K,|\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_iZ_i\| - M|\leqslant\delta M)\\ &\qquad\geqslant 1-2exp\left(\frac{2n}{\delta}-\frac{\delta^qS^q}{2^qC_p^qC_q}\right).\end{aligned}$$

对于 $\varepsilon>0$,取 $\delta>0$ 足够小,由 δ 作成 δ 网再取 $\eta=\eta_p(\delta)$(或 $\eta_p(\varepsilon)$),$n=[\eta ST_p(X)^q]$ 可使上式严格大于 0. 于是对于适当的 ω

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p)^{1/p} &\leqslant \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_iM^{-1}Z_i(\omega)\|\\ &\leqslant(1+\varepsilon)^{1/2}(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p)^{1/p}\end{aligned}$$

($\forall\ \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in K$). 整个定理得证.

§ 3 有限维空间的几乎 Euclid 部分

局部理论的发展引起了对有限维空间新的研究兴趣. 这一研究 的特色之一是严格精细地估计有关的数据,例如凸体的体积和球形部分的维数,n 维空间的距离,l_p^n 到 l_q^n 的嵌入,几乎 Euclid 子空间等.

R^n 中的一个集合 E 称为凸体(convex body),若 E 是对称的闭凸 子集并且其内部不是空集. 特别地,椭球(ellipsoid) 是指形如 $A = \{x = (x_1,\cdots,x_n) \in R^n, \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 \leqslant 1\}$ 的集合,其中 $0 < a_i < \infty, 1 \leqslant i \leqslant n$. 容易验证 A 是欧氏空间 l_2^n 的闭单位球在某个线性变换之下的象. 并且 A 的 Minkowski 泛函必导致一个内积范数. 现在我们假设 R^n 赋有范数 $\|\cdot\|$,而 $|\cdot|$ 是 R^n 上的欧氏范数,即它是由某个内积 $(\cdot,\cdot)$ 诱导的,$|x|^2 = (x,x)$. 对于 $x \in R^n$,定义 x 的共轭范数(dualnorm)

$$\| x \|^* = \sup_{y\neq 0} \frac{|(x,y)|}{\| y \|} = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |(x,y)| \tag{3.1}$$

容易知道,若存在 $a,b > 0$ 使得 $\forall\, x \in R^n$ 有

$$a^{-1}|x| \leqslant \| x \| \leqslant b|x|$$

则

$$b^{-1}|x| \leqslant \| x \|^* \leqslant a|x|, \quad \forall\, x \in R^n \tag{3.2}$$

实际上通过不等式 $|x|^2 = (x,x) \leqslant \| x \| \, \| x \|^*$ 即可得到所要的结论.

首先我们来判定 n 维空间之间的距离,在这方面内积空间有着良好的性质. 我们知道维数相同的两个内积空间 E,F 是等距同构的,故 $d(E,F) = 1$. 对于更广泛一些的情况,我们有 F · John 1948 年得出的一个结论. 以下以 $B(X)$ 表示 X 的闭单位球.

定理 1(John) 设 X 是 n 维线性赋范空间,则 $d(X,l_2^n) \leqslant \sqrt{n}$. 详细地说,若 $\dim X = n, u: l_2^n \to X$ 是一线性算子,$\| u \| \leqslant 1$,

使得 $u(B(l_2^n))$ 是包含在 $B(X)$ 中的体积最大的凸体，则必有 $\Pi_2(u^{-1}) = \sqrt{n}$，这里 Π_2 是 2 绝对可和范数.

证明 我们利用 §1 引理 5，设 $u: l_2^n \to X$ 满足 $\|u\| = 1$，$\|u^{-1}\|^* = n$，其中 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{B}(l_2^n, X)$ 的范数. $\|\cdot\|^*$ 是 $\mathscr{B}(X, l_2^n)$ 上的与 $\|\cdot\|$ 共轭的范数. 回忆引理 5 的证明，其中用到范数最大的算子 u 存在这一事实. 现在 X 与 l_2^n 都是有限维空间，因此 $\|\cdot\|^*$ 是核范数. 即

$$\|v\|^* = \inf \sum_{i=1}^{m} \|x_i^*\| \, \|y_i\| \tag{3.3}$$

这里下确界是对于所有满足 $v(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^*(x) y_i \ (\forall\, x \in X)$ 的 $\{x_i^*\} \subset X^*$，$\{y_i\} \in l_2^n$ 而取的.

由 Carathéodory 定理，有至多 $n^2 + 1$ 个 $\mathscr{B}(X, l_2^n)$ 中的元作为其单位球的端点. 我们现在在(3.3) 中审查这 $m \leqslant n^2 + 1$ 个端点的情况. 设 u^{-1} 是这样的一个，此时可以找到 $\{x_i^*\} \subset X^*$，$\{y_i\} \subset l_2^n$ 使得

$$u^{-1}(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^*(x) y_i, \qquad \forall\, x \in X,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \|x_i^*\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|y_i\|^2 = n \tag{3.4}$$

若 $T: X \to l_2^m$，$S: l_2^m \to l_2^n$ 如此定义：$T(x) = \{x_i^*(x)\}$，$S(e_i) = y_i$，则容易验证 $ST = u^{-1}$. 由(3.10)，$\|S\|_{HS} = \sqrt{n}$，($\|\cdot\|_{HS}$ 定义见 V. §6) 并且

$$\Pi_2(T) \leqslant \left(\sum \|x_i^*\|^2 \right)^{1/2} \leqslant n^{1/2}.$$

考虑到 X 是 n 维空间，故可以将一个算子 T 与正交投影(正交矩阵) 复合. 因此可改写

$$u^{-1} = \beta\alpha$$

其中 $\alpha: X \to l_2^n$，$\Pi_2(\alpha) \leqslant n^{1/2}$；$\beta: l_2^n \to l_2^n$，$\|\beta\|_{HS} = \sqrt{n}$. 由于

$$\|\alpha u\|_{HS} \leqslant \Pi_2(\alpha u) \leqslant \Pi_2(\alpha) \|u\| \leqslant n^{1/2},$$

$$n = tru^{-1}u = tr\beta(\alpha u)$$

于是 $tr\beta(\alpha u) \geqslant \|\alpha u\|_{HS}\|\beta\|_{HS}$，这说明在算子的标量积 $\langle A, B\rangle = trB^{*}A$ 的情况，Cauchy-Schwartz 不等式中等号成立. 以 $B^{*} = \beta^{*}, A = \alpha u$，则 $\beta^{*} = \alpha u$. 但 $u^{-1} = \alpha\beta$，故 $\beta^{-1} = \alpha u$，从而 $\beta^{*} = \beta^{-1}$，β 是正交矩阵，$\|\beta\| = 1$. 总之

$$\Pi_2(u^{-1}) = \Pi_2(\beta\alpha) \leqslant \|\beta\|\Pi_2(\alpha) \leqslant n^{1/2}.$$

另一方面，

$$n^{\frac{1}{2}} = \|I\|_{HS} = \Pi_2(u^{-1}u) \leqslant \Pi_2(u^{-1})\|u\| \leqslant \Pi_2(u^{-1})$$

故 $\Pi_2(u^{-1}) = n^{\frac{1}{2}}$. 由 $\|u^{-1}\|^{*} \leqslant \Pi_2(u^{-1}) \leqslant \sqrt{n}$，最后得出

$$d(X, l_2^n) \leqslant \|u\|\,\|u^{-1}\|^{*} \leqslant n^{\frac{1}{2}}.$$

推论 1 对于任何两个 n 维赋范空间 X, Y，$d(X,Y) \leqslant n$.

定理 2 $d(l_p^n, l_2^n) \leqslant n^{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right|} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

证明 首先设 $1 \leqslant p \leqslant 2$，由 Hölder 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.5)$$

根据 Banach-Mazur 距离的定义有 $d(l_p^n, l_2^n) \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$. 对于 $2 \leqslant p \leqslant \infty$ 的情况利用共轭性以及 $d(X,Y) = d(X^{*}, Y^{*})$ 的事实得到. 当然也可以用类似于(3.5)的式子得到.

对于 $p = \infty$，由于

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)^{1/2} \leqslant n^{1/2}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|$$

得到 $d(l_\infty^n, l_2^n) \leqslant n^{1/2}$.

现在由距离的次可乘性立即得出

推论 2 对于任何 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$，$d(l_p^n, l_q^n) \leqslant n^{\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right|}$

对于给定的一个 n 维赋范空间 X，其中能包含多大维数的子空间 E 使其 $1+\varepsilon$ 同构于一个 Hilbert 空间，$E \overset{1+\varepsilon}{\sim} l_2^k$，这一问题即所谓寻找 n 维空间的几乎 Euclid 部分或球形部分. 让我们先介绍两个具有特征性的数字.

考虑n维欧氏空间R^n的单位球面$S^{n-1}=\{x\in R^n,\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2=1\}$，这里象本节开头所说的那种用$|x|$表示欧氏范数. 采用$S^{n-1}$上的旋转不变测度$\mu_{n-1}$，$\mu_{n-1}(S^{n-1})=1$. 设$f$是在$S^{n-1}$上定义的连续实函数，称$M_f$是$f$的中位数，若

$$\mu_{n-1}\{x\in S^{n-1},f(x)\leqslant M_f\}\geqslant 1/2,$$
$$\mu_{n-1}\{x\in S^{n-1},f(x)\geqslant M_f\}\geqslant 1/2.$$

设$\|\cdot\|$是R^n上的另一范数，满足(3.2)则$r(x)=\|x\|$是S^{n-1}上的连续函数. 我们定义$f(x)=r(x)$时的M_f为M_r. 此外对于$1\leqslant p<\infty$定义

$$A_r^{(p)}=\left(\int_{S^{n-1}}\|x\|^p d\mu_{n-1}(x)\right)^{1/p} \tag{3.6}$$

(记$A_r^{(1)}=A_r$).

引理 1 设f是S^{n-1}上的连续函数，M_f是f的中位数，$A^f=\{x\in S^{n-1},f(x)=M_f\}$，则对于$\forall\ 0<\varepsilon\leqslant 1$，

$$\mu_{n-1}(A_\varepsilon^f)\geqslant 1-4e^{-n^2\varepsilon/2} \tag{3.7}$$

这里$A_\varepsilon^f=\{x\in S^{n-1};d(x,A^f)<\varepsilon\}$，$d$是$S^{n-1}$上的测地距离.

证明 记$A_+^f=\{x\in S^{n-1},f(x)\geqslant M_f\}$，$A_-^f=\{x\in S^{n-1},f(x)\leqslant M_f\}$则$A^f=A_+^f\cap A_-^f$. 显然，$A_\varepsilon^f=(A_+^f)_\varepsilon\cap(A_-^f)_\varepsilon$. 由等周不等式及其证明知道

$$1-\mu_{n-1}(A_\varepsilon^f)\leqslant(1-\mu_{n-1}((A_+^f)_\varepsilon))+(1-\mu_{n-1}((A_-^f)_\varepsilon))$$
$$\leqslant 2(1-\sqrt{\frac{\pi}{8}}e^{-\varepsilon^2(n-2)/2})$$

所以

$$\mu_{n-1}(A_\varepsilon^f)\geqslant 1-\sqrt{\frac{n-1}{n-2}}e^{-(n-2)\varepsilon^2/2}\geqslant 1-4e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

引理 2 设$(X,\|\cdot\|)$是Banach空间. $|\cdot|$是满足(3.2)的内积范数，$0<\delta,\eta<1$，K_0是$B=\{x,|x|=1\}$的δ网. 若对于每个$x\in K_0$，$1-\eta\leqslant\|x\|\leqslant 1+\eta$，则存在函数$f(\delta,\eta)>0$使得

$\lim\limits_{\delta,\eta\to 0} f(\delta,\eta) = 1$ 并且

$$f(\delta,\eta)^{-1}|x| \leqslant \|x\| \leqslant f(\delta,\eta)|x|, \forall\, x \in X \qquad (3.8)$$

证明 设 $x_0 \in B$，记 $x_0 = x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + \cdots$，其中 $x_i \in K_0 (i \geqslant 1)$. 则 $\|x^0\| \leqslant (1+\eta)(1-\delta)^{-1}$. 对于每个 $x \in X, x \neq 0, \frac{x}{|x|} \in B$ 故

$$\|x\| \leqslant (1+\eta)(1-\delta)^{-1}|x|$$

令 $X_* = X$，X_* 中范数是共轭范数 $\|\cdot\|^*$（见(3.1)），对于 $x \in K_0$，取 $y_x \in X, (y_x, x) = 1, \|y_x\|^* < (1-\eta)^{-1}$. 则

$$1 \leqslant |x||y_x| = |y_x| \leqslant (1+\eta)(1-\delta)^{-1}(1-\eta)^{-1},$$

$$|x + y_x|^2 = |x|^2 + 2(x, y_x) + |y_x|^2 \geqslant 4,$$

$$\begin{aligned}|x - y_x|^2 &= |x|^2 - 2(x, y_x) + |y_x|^2 \\ &= 1 + (1+\eta)(1-\delta)^{-1}(1-\eta)^{-1} - 2 = \Delta(\delta,\eta)\end{aligned}$$

易知，$\lim\limits_{\delta,\eta\to 0} \Delta(\delta,\eta) = 0$.

令 $\tilde{y} = \frac{y_x}{|y_x|}$，则 $|\tilde{y}_x - x| \leqslant \Delta(\delta,\eta)$，于是 $\{\tilde{y}_x : x \in K_0\}$ 构成 B 的 $\delta + \Delta(\delta,\eta)$ 网. 由于 $x \in K_0$ 时，$\|y_x\|^* \leqslant (1-\eta)^{-1}$，故根据前面所证对于 $y \in X$，

$$\|y\|^* \leqslant (1+\eta)(1-\delta-\Delta(\delta,\eta))^{-1}|y|, \qquad y \in X$$

从而

$$\|x\| \geqslant (1-\eta)(1-\delta-\Delta(\delta,\eta))|x|, \qquad x \in X$$

适当规定 $f(\delta,\eta)$ 可得到不等式(3.8).

引理 3 设 $\dim X = n$，其范数 $\|\cdot\|$ 满足(3.2)，$|\cdot|$ 是 X 上的内积范数，$0 < \varepsilon \leqslant 1, m \leqslant \frac{1}{4}e^{n\varepsilon^2/2}$，$y_1, \cdots, y_m$ 是 l_2^n 中的任意 m 个范数为 1 的点，则存在等距同构 $U: l_2^n \to (X, |\cdot|)$ 使得

$$M_r - b\varepsilon \leqslant |Uy_i| \leqslant M_r + b\varepsilon \quad i = 1, \cdots, m \qquad (3.9)$$

证明 若 $A = \{x \in S^{n-1}, |x| = 1, \|x\| = M_r\}$，则对于 A_ε 中的任一点 y 有 A 中的点 x 使得 $d(x,y) < \varepsilon$. 注意 d 是测地距离，故

$$|x-y| \leqslant d(x,y) < \varepsilon,$$

从而

$$\|x-y\| \leqslant b|x-y| < b\varepsilon, \quad |\|y\| - M_r| < b\varepsilon.$$

由不等式(3.7),

$$\mu_{n-1}\{y, |y|=1, |\|y\|-M_r|<b\varepsilon\} \geqslant \mu_{n-1}(A_\varepsilon) \geqslant 1-4e^{-n\varepsilon^2/2}$$

设 $U_0: l_2^n \to (X, |\cdot|)$ 是等距同构(注意二者均为 Hilbert 空间),固定 l_2^n 中的一个单位向量 y, $U_0 y \in S^{n-1}$. 对于 S^{n-1} 上每个旋转 V, $VU_0 y \in S^{n-1}$ 并且任何 $|y|=1$ 都可以由某个旋转从 y_0 得到. 由于 μ_{n-1} 的旋转不变性,若 $(X, |\cdot|)$ 上的正交变换(或旋转)的全体为 $\{V\}$. 上式说明:

$$\sigma\{V, |\|VU_0 y\| - M_r| < b\varepsilon\} \geqslant 1 - 4e^{-n\varepsilon^2/2} > 1 - \frac{1}{m}$$

σ 是 $\{V\}$ 上规范 Haar 测度,所以至少有一个 V_0 使得 $U = V_0 U_0$ 时,(3.9) 式成立.

引理 4 设 A_r 如(3.6)式,若(3.2)成立并且 $b \leqslant \sqrt{n}$,则存在 $C>0$ 使得

$$|A_r - M_r| \leqslant C. \tag{3.10}$$

若 $ab < \sqrt{n}$ 则

$$\frac{1}{2} \leqslant A_r M_r^{-1} \leqslant C. \tag{3.11}$$

证明 由(3.7),

$$\mu_{n-1}\{x \in S^{n-1}, |\|x\| - M_r| > bt\} \leqslant 4e^{-nt^2/2}.$$

由 $b \leqslant \sqrt{n}$ 得出

$$\mu_{n-1}\{|\|x\| - M_r| > t\} \leqslant 4e^{t^2/2},$$

从而

$$|A_r - M_r| \leqslant \int_{S^{n-1}} |\|x\| - M_r| > t) d\mu_{n-1}(x)$$

$$= \int_0^\infty \mu_{n-1}(|\|x\| - M_r| > t) dt$$

$$\leqslant 4\int_0^{\infty} e^{-t^2/2}dt = 4\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{8\pi}.$$

为证(3.11)不妨设 $a\leqslant 1, b\leqslant \sqrt{n}$，此时 $M_r \geqslant a^{-1} \geqslant 1$，所以上面证明表明

$$|A_r - M_r| \leqslant \sqrt{8\pi} \leqslant \sqrt{8\pi}M_r.$$

所以 $\quad A_r \leqslant (1+\sqrt{8\pi})M_r.$

另半边不等式是显然的.

定理 3 对于任何 $\delta > o$，$\exists\ \eta = \eta(\delta) > 0$ 使得若 $\dim(X, \|\cdot\|) = n$. $|x|$ 是与 $\|\cdot\|$ 等价的内积范数，则当 $k = [\eta n M_r^2 b^{-2}]$ 时，存在子空间 $Y\subset X$，$\dim Y = k$，使得 $Y \overset{1+\delta}{\sim} l_2^k$.

证明 对于 $\delta > 0$，取 $\delta' = \delta'(\delta) > 0$ 和 $\eta' = \eta(\delta') = \eta(\delta) > 0$，使得 $f^2(\delta', \eta') < 1+\delta$，$f(\delta', \eta')$ 是引理 2 中定义的函数，往证 $\eta = \frac{\eta'}{4}\log\left(\frac{3}{\delta'}\right)$ 即是所求. 由引理 3，令 $\varepsilon = \eta' M_r b^{-1}$，取 $y_1, \cdots, y_m$ 是 l_2^n 中的单位向量，其中 $m = [\frac{1}{4}exp(\frac{1}{2}n\eta'^2 M_r^2 b^{-2}]$ 并且取等距同构 $U: l_2^n \to (X, M_r^{-1}|\cdot|)$ 使得

$$1-\varepsilon \leqslant \|Uy_i\| \leqslant 1+\varepsilon, \quad (1\leqslant i\leqslant m)$$

根据 §1 引理 3 和 η 的值得出

$$\left(1+\frac{2}{\delta'}\right)^k \leqslant \left(\frac{3}{\delta'}\right)^k = \exp(k\log\frac{3}{\delta'}) \leqslant m.$$

若 $y_1, \cdots, y_m$ 构成 l_2^n 的 k 维子空间 Y_0 的单位球面的 δ 网，则由引理 3，$d(UY_0, l_2^k) < 1+\delta$.

对于线性赋范空间 $X(\dim X < \infty)$ 和 $\varepsilon > 0$，记 $k(X, \varepsilon)$ 是最大的 Hilbert 空间 E 的维数，使得 E $1+\varepsilon$ 同构于 X 的一个子空间，并且记 $k(X) = k(X, 1)$.

定理 4 若 $X = (R^n, \|\cdot\|)$，$d(X, l_2^n) \leqslant d_n$ 则

$$k(X, \varepsilon) \geqslant \eta(\varepsilon) n d_n^{-2}, \tag{3.12}$$

这里 $\eta(\varepsilon) \geqslant C\varepsilon^2/\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$，$C$ 是绝对常数.

证明 由 $d(X,l_2^n)\leqslant d_n$，R^n 上存在内积范数 $|\cdot|$ 等价于 $\|\cdot\|$ 并且(3.2)中的常数满足 $ab\leqslant d_n$. 显然 $M_r\geqslant\min\{\|x\|,|x|=1\}\geqslant a^{-1}$，于是 $M_rb^{-1}\geqslant d_n^{-1}$. 由定理3，存在子空间 Y，$\dim Y=k$，$Y\overset{1+\epsilon}{\sim}l_2^n$ 并且

$$k\geqslant\eta nM_r^2b^{-2}\geqslant\eta nd_n^{-2}.$$

故(3.12)成立.

定理5 对于 $\forall\,\delta>0$，$\exists\,\eta=\eta(\delta)>0$ 使得对于任何 n 维赋范空间 X，

$$k(X,\delta)k(X^*,\delta)\geqslant\eta n^2\|P\|^{-2}d_n^{-2}.\tag{3.13}$$

这里 $d_n=d(X,l_2^n)$，P 是一个投影：若 $k_1=k(X,\delta)\leqslant k(X^*,\delta)=k_2$，则 P 是从 X 到子空间 Y 上的投影，其中 $d(Y,l_2^{k_1})\leqslant1+\delta$；反之若 $k_2<k_1$ 则 P 是从 X^* 到子空间 Z 上的投影，其中 $d(Z,l_2^{k_2})\leqslant1+\delta$.

证明 设 M_r 和 M_{r^*} 分别是 $r(x)=\|x\|$ 和 $r^*(x)=\|x\|^*$ 在 S^{n-1} 上的中位数，这里 $\|x\|^*$ 是由(3.1)定义的共轭范数并且有 $b^{-1}|x|\leqslant\|x\|^*\leqslant a|x|$. 由定理4，分别存在 $Y\subset X$，$Z\subset X^*$ 使得 $d(Y,l_2^{k_1})\leqslant1+\delta$，$d(Z,l_2^{k_2})\leqslant1+\delta$，其中 $k_1\geqslant\eta nM_r^2b^{-2}$，$k_2\geqslant\eta nM_{r^*}^2a^{-2}$. 为证明(3.13)，只需证明存在投影 P，$\|P\|\leqslant CM_rM_{r^*}$，$C$ 为绝对常数.

回忆引理3和定理3的证明，若 $\eta(\delta)$ 足够小，不仅保证 $d(Y,l_2^n)\leqslant1+\delta$，而且使 $(X,|\cdot|)$ 上的满足 $d(UY,l_2^{k_2})\geqslant1+\delta$ 的正交变换集合的Haar测度大于 $\frac{1}{2}$. 比如说 $k_1\leqslant k_2$，不妨设 $Y\subset Z$，此时 $P:X\to Y$ 必有 $\|P\|\leqslant(1+\delta)^2M_rM_{r^*}$.

实际上对于每个 $y\in Y$，

$$\|y\|\leqslant M_r(1+\delta)|y|,\qquad\|y\|^*\leqslant M_{r^*}(1+\delta)|y|.$$

于是对于每个 $x\in X$，

$$\begin{aligned}|Px|^2&=(Px,Px)=(Px,x)\\&\leqslant\|Px\|^*\|x\|\leqslant M_{r^*}(1+\delta)|Px|\,\|x\|\end{aligned}$$

或 $\| Px \| > M_r(1+\delta)|Px| \leqslant M_r \| x \| M_{r^*}(1+\delta)^2$，即得之.

推论 3 设 $\dim X = n$，则

(i) $k(X,\delta)k(X^*,\delta) \geqslant \eta(\delta)n$.

(ii) $\max(k(X,\delta),k(X^*,\delta)) \geqslant (\eta(\delta)n)^{1/2}$.

证明 实际上总有 $\| P \| \geqslant 1$，又 $d(X,l_2^n) \leqslant \sqrt{n}$. 故得到(i). (ii)是(i)的直接推论. 另外也可通过证明 $M_rM_{r^*} \geqslant 1$ 得到：实际上由 M_r 和 M_{r^*} 的定义，必有 $x \in S^{n-1}$ 使得 $\| x \| \leqslant M_r$，$\| x \|^* \leqslant M_{r^*}$，于是 $M_rM_{r^*} \geqslant \| x \| \| x \|^* = (x,x) = 1$.

定理 6

$$k(l_p^n) = \begin{cases} cn, & 1 \leqslant p \leqslant 2 \\ cn^{2/p}, & 2 \leqslant p < \infty \\ c\log n. & p = \infty \end{cases}$$

其中 c 为某个常数(三种情况的常数不必相同). 这些估计还是最优的，即 n 的指数不能再改进了.

证明 对于 $x = (x_1,\cdots,x_n) \in R^n$，由于当 $p \geqslant 2$ 时

$$\| x \|_p \leqslant \| x \|_2 \leqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \| x \|_p$$

故有 $d(l_p^n,l_2^n) \leqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$，由定理 4，$k(l_p^n) \geqslant \eta n^{2/p}$

对于 $1 \leqslant p \leqslant 2$，则有

$$\| x \|_2 \leqslant \| x \|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \| x \|_2.$$

我们计算 M_r

$$M_r^p \sim \int_{S^{n-1}} \| x \|_p^p d\mu_{n-1}(x) = n\int_{S^{n-1}} |x_1|^p d\mu_{n-1}(x)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \int_{S^{n-1}} |x_1| d\mu_{n-1}(x) \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} |x_1|^p d\mu_{n-1}(x)\right)^{1/p}$$

$$\leqslant \left(\int_{S^{n-1}} |x_1|^2 d\mu_{n-1}(x)\right)^{1/2} = \sqrt{n}$$

所以 $M_r \sim n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$. 由定理 2.3，

$$k(l_p^n) \geqslant \eta n M_r^2 b^{-2} \sim cn \cdot n^{\frac{2}{p}-1} \cdot n^{-\frac{2}{p}+1} = cn.$$

在证明第三种情况之前，让我们先论证第一，二种情况的最优

性.

第一种情况：由 $k(l_p^n)\leqslant n$，最优性显然.

第二种情况：若 $u_j=(a_{j1},\cdots,a_{jn})\in l_p^n(1\leqslant j\leqslant k)$ 其中 $k=k(l_p^n)$，则

$$\Big(\sum_{j=1}^k\lambda_j^2\Big)^{1/2}\leqslant\|\sum_{j=1}^k\lambda_ju_j\|_p\leqslant 2\Big(\sum_{j=1}^k\lambda_j^2\Big)^{1/2}.$$

对于每个 $t\in[0,1]$

$$k^{p/2}=\Big(\sum_{j=1}^k r_j^2(t)\Big)^{1/2}\leqslant\|\sum_{j=1}^k r_j(t)u_j\|_p^p=\sum_{i=1}^n|\sum_{j=1}^k r_j(t)u_{ji}|^p.$$

在[0,1]上积分并应用 Khintchin 不等式得出

$$k^{p/2}\leqslant\sum_{i=1}^n\int_0^1|\sum_{j=1}^k r_j(t)u_{ji}|^pdt\leqslant B_p^p\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^k u_{ji}^2)^{p/2}$$

$$\leqslant 2B_p^p(\sum_{j=1}^k u_{ji}^2)^{1/2}\leqslant 2B_p^pn.$$

于是

$$k(l_p^n)\leqslant(2B_p)^2n^{2/p}=c_pn^{2/p}.$$

对于第三种情况，注意到 $\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_p\leqslant n^{1/p}\|x\|_\infty$，特别地取 $p=\log n$，则有

$$d(l_\infty^n,l_{\log n}^n)\leqslant n^{\frac{1}{\log n}}=e$$

所以 $k(l_\infty^n)\sim k(l_{\log n}^n)$. 由上面 $p>2$ 情况的结论，取 $p=\log n$ 则

$$k(l_{\log n}^n)\leqslant(2B_{\log n})^2n^{2/p}=(2\sqrt{\log n})^2n^{1/\log n}=c\log n.$$

为证明最优性只须应用下面引理.

引理 5 若 $T:l_2^k\to l_\infty^n$ 是线性算子，$\|T\|\ \|T^{-1}\|\leqslant\lambda$，则 $\exists\, c=c(\lambda)$ 使得 $\log n\geqslant ck$.

证明 前面曾提到过Krivine的结论(Krivine[1]). 此结论意味着只要有某个 $\lambda>1$ 使之成立，则对于任何 $\lambda>1$ 也成立. 我们对于 $\lambda=\dfrac{7}{8}$ 证明之. 设 $\|T\|=1$，$e_1,\cdots,e_n$ 是 $l_1^n=l_\infty^{n*}$ 的单位向量基，$y_i=T^*e_i\in l_2^k(1\leqslant i\leqslant n)$. 首先对于每个 $x\in l_2^k$，$\|x\|=1$，$\exists\, y_i$ 使得 $\min(\|x+y_i\|,\|x-y_i\|)\leqslant\dfrac{1}{2}$. 实际上，$\|T^{-1}\|\leqslant$

$\frac{8}{7}$,故 ∃ y_i,

$$|(x,y_i)| = |(Tx)e_i| \geqslant \frac{7}{8}.$$

此时要么 + 号,要么 − 号使得

$\| x \pm y_i \|^2 = \| x \|^2 + \| y_i \|^2 \pm 2(x,y_i) \leqslant \frac{1}{4}$. l_2^k 中以 $\pm y_1, \cdots \pm y_n$ 为中心,$\frac{3}{2}$ 为半径的球之并复盖以原点为中心,半径为 2 的球. 由体积比较知 $2^k \leqslant 2n\left(\frac{3}{2}\right)^k$,得出引理结论.

推论 4 存在 $c > 0$ 使得对于 R^n 中的每个多面体 Q,若 Q 是关于原点对称并且以原点为内点的,其顶点有 $2s$ 个,$n-1$ 维面有 $2t$ 个,则

$$\log s \log t \geqslant cn \tag{3.14}$$

证明 用取 Minkowski 泛函的方法可使 Q 成为 R^n 的单位球. 自然其范数就是这一泛函. 这种 X 同构于 l_∞^t 的子空间而 X^* 同构于 l_∞^s 的子空间,由引理 5 和推论 3(i) 即得出结论.

引理 6 (Dvoretzky-Rogers) 设 $X = (R^n, \|\cdot\|)$,D 是包含在单位球 $B(X)$ 中的最大体积的椭球体,则存在 D 中的正交基 $\{x_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 使得

$$1 \geqslant \| x_i \| \geqslant 2^{-(n-1)/(n-i)} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

证明 用归纳法,首先取 $x_1 \in D$,x_1 范数最大(必有 $\| x_1 \| = 1$). 若 $x_1, \cdots x_i$ 已取定. 则取 $x_{i+1} \in (x_1, \cdots x_i)^{\perp} \cap D$,并且具有最大可能 $\|\cdot\|$ 范数,故对于 $\forall\ x \in \mathrm{span}(x_1, \cdots, x_i)$,若 $|x| \leqslant 1$ 则 $\| x \| \leqslant \| x_i \|$. 考虑椭球体

$$E = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j^2}{a^2} + \frac{\sum_{j=i}^{n} a_j^2}{b^2} \leqslant 1 \right\} \tag{3.15}$$

若 $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \in E$,则 $\sum_{j=1}^{i-1} a_j x_j \in aD$ 从而 $\| \sum_{j=1}^{i-1} a_j x_j \| \leqslant a$ 同时 $\sum_{j=i}^{n} a_j x_j$

$\in bD$ 并且 $\| \sum_{j=i}^{n} a_j x_j \| \leqslant b \| x_i \|$.

取 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2\|x_i\|}$ 则 $E \subset B(X)$，另外 $\mathrm{vol}(E) = 2^{-(i-1)}(2\|x\|)^{-(n-i)}\mathrm{vol}(D)$. 由体积最大性必有

$$2^{-(i-1)}(2\|x_i\|)^{-(n-i)} \leqslant 1 \text{ 或 } \|x_i\| \geqslant 2^{-(n-1)/(n-i)}.$$

引理 7 存在绝对常数 $c > 0$ 使得若 $1 \leqslant m \leqslant n$，则

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i| d\mu_{n-1}(x) \geqslant c\left(\frac{\log m}{n}\right)^{1/2}. \tag{3.16}$$

特别地若 $r(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i| \leqslant 1$，则 $A_r \geqslant c\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}$.

证明 设 ν 是 R^n 上的测度. 其密度是 $exp(-\pi\sum_{i=1}^{n} t_i^2)$. 此测度关于 l_2^n 上的等距同构是不变的. 若 f 是 S^{n-1} 上的可积函数，令 $\mathcal{J}(x) = \|x\|_2 f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right)$，这里 $x = (t_1, \cdots, t_n)$，$\mathcal{J}$ 在 $R^n\backslash\{0\}$ 上有定义并且 $\int_{R^n}\mathcal{J}(x)d\nu(x)$ 在 l_2^n 的等距同构下也不变，μ_{n-1} 在 S^{n-1} 上的唯一性说明存在 λ_n 使得

$$\int_{R^n}\mathcal{J}(x)d\nu(x) = \lambda_n\int_{S^{n-1}} f(x)d\mu_{n-1}(x), \tag{3.17}$$

若 $f(x) \equiv 1$ 则得出

$$\lambda_n = \int_{R^n}\|x\|d\nu(x) \leqslant c\sqrt{n}.$$

对于 $a > 0$

$$\begin{aligned}\nu(\max_{1\leqslant i\leqslant m}|t_i| < a) &= \int_{-a}^{a}\cdots\int_{-a}^{a} exp(-\pi\sum_{i=1}^{n} t_i^2)dt_1\cdots dt_m \\ &= \left(\int_{-a}^{a} e^{-\pi t^2}dt\right)^m = (1 - 2\int_a^{\infty} e^{-\pi t^2}dt)^m \\ &\leqslant (1 - ce^{-\pi a^2})^m.\end{aligned}$$

取 $a = \varepsilon(\log m)^{1/2}$，$\varepsilon$ 为某常数，则上式最后小于 $\frac{1}{2}$. 从而

$$\nu(\max_{1\leqslant i\leqslant m}|t_i|\geqslant \varepsilon(\log m)^{1/2})\geqslant 2^{-1},$$

$$\int_{R^n}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|t_i|d\nu(x)\geqslant \frac{1}{2}\varepsilon(\log m)^{1/2}.$$

最后由(3.17)得出

$$\int_{S^{n-1}}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|t_i|d\nu(x)\geqslant \frac{1}{2}\varepsilon(\log m)^{1/2}/c\sqrt{n}=c'(\frac{\log m}{n})^{1/2}.$$

在 $m=n$ 的情况，得到 $A_r\geqslant c(\frac{\log n}{n})^{1/2}$.

Dvoretzky-Rogers 的原始定理是：

定理 7 存在 $c>0$ 使得对于任何 n 维赋范空间 X，$k(X)\geqslant c\log n$.

证明 设 D 是 $B(X)$ 中的最大体积椭球，$|\cdot|$ 是由它确定的内积范数，首先由 John 定理知道

$$\sqrt{n}\,|x|\leqslant \|x\|\leqslant |x|,\qquad \forall\, x\in X$$

故 $b=1$，$ab\leqslant\sqrt{n}$，由定理 3，只须证明 $M_r\geqslant c(\frac{\log n}{n})^{1/2}$.

由引理 6，存在正交基 $x_1,\cdots,x_n$，若 $i=1,\cdots,[\frac{n}{2}]$，$\|x_i\|\geqslant\frac{1}{4}$. 对于每个固定的 $t\in[0,1]$

$$\begin{aligned}A_r&=\int_{S^{n-1}}\|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\|\,d\mu_{n-1}(a)\\&=\int_{S^{n-1}}\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)a_ix_i\|\,d\mu_{n-1}(a),\end{aligned}$$

又由三角不等式

$$\int_0^1\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)y_i\|=\text{Ave}\,\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_iy_i\|\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|y_i\|$$

从而

$$\begin{aligned}A_r&=\int_{S^{n-1}}\int_0^1\|\sum_{i=1}^{n}r_i(t)a_ix_i\|\,dt\,d\mu_{n-1}(a)\\&\geqslant\int_{S^{n-1}}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_ix_i|\,d\mu_{n-1}(a)\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\int_{S^{n-1}} \max_{1\leqslant i\leqslant[\frac{n}{2}]} |a_i| d\mu_{n-1}(a) \geqslant c(\frac{\log n}{n})^{1/2}.$$

定理 8 设 X 是 n 维赋范空间，X 是 R-q 余型的 $(2\leqslant q<\infty)$，余型常数是 c_q，则 $k(X)\geqslant cc_q^{-2}n^{2/q}$，$c$ 为某个绝对常数.

证明 设 $|\cdot|$ 是由 $B(X)$ 中最大体积椭球决定的内积范数，由引理 6，存在正交基 $x_1,\cdots,x_n$，$\|x_i\|\leqslant\frac{1}{4}$ $(1\leqslant i\leqslant[\frac{n}{2}])$ 于是

$$\begin{aligned}
M_r \sim A_r^{(2)} &= \left(\int_{S^{n-1}} \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|^2 d\mu_{n-1}(a)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{S^{n-1}}\int_0^1 \|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t) x_i\|^2 dt d\mu_{n-1}(a)\right)^{1/2} \\
&\geqslant (2c_q)^{-1}\left(\int_{S^{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} |a_i|^q\right)^{2/q} d\mu_{n-1}(a)\right)^{1/2} \\
&\geqslant (2c_q)^{-1}(\frac{n}{2})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\left(\int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} |a_i|^2 d\mu_{n-1}(a)\right)^{1/2} \\
&= (2c_q)^{-1} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\left(\frac{[\frac{n}{2}]}{n}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

由定理 3 即得出所要的结论.

§ 4 弱型与弱 Hilbert 空间

至今我们已经知道一个空间的型和余型越接近于 2，其性质就越接近于 Hilbert 空间，实际上由 Kwapien 定理，当空间即是 2 型又是 2 余型时，它必同构于 Hilbert 空间. 但是当 $p_X=q_X=2$ 时 X 未必同构于 Hilbert 空间. Tsirelson 给出了这种例子. 换句话说一个空间具有任意接近于 2 的型和余型，但它仍不能同构于一个 Hilbert 空间. 然而这样的空间在理论上和实际应用上都有相当的意义，例如每个子空间都具有紧逼近性质的空间就必定是这种类型的空间. 现在让我们讨论与之有关的问题.

若$(x_i)_{i\geq 1}$是一序列，记

$$\|(x_i)\|_{p\infty} = \left(\sup_{t>0} t^p \text{card}\{i \geq 1, \|x_i\| > t\}\right)^{1/p} \quad (4.1)$$

其中card是A中元素个数. 容易知道，若$(\hat{x}_i)_{i\geq 1}$是$(\|x_i\|)_{i\geq 1}$的非增重排序列，则

$$\|(x_i)\|_{p\infty} = \sup_{i\geq 1} i^{-1/p}\hat{x}_i \quad (4.2)$$

以$l_{p\infty}(X)$表示X中满足$\|(x_i)\|_{p\infty} < \infty$的序列$(x_i)_{i\geq 1}$全体. 可以证明若$r < p$则

$$\|(x_i)\|_{p\infty} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{p}{p-r}\right)^{1/p} \|(x_i)\|_{r\infty}.$$

从而$l_{r\infty}(X) \subset l_p(X) \subset l_{p\infty}(X)$. 若$X = R$，通常记$l_{p\infty}(X)$为$l_{p\infty}$，并且称$l_{p\infty}$是弱$l_p$空间(类似地，以前我们提到的函数空间，赋予范数$\|\cdot\|_{p\infty}$称为弱$L_p$空间).

对于w-L_p或w-l_p空间的研究是有其独立兴趣的. 我们这里提到它仅仅是为了研究Banach空间的w型和w余型.

在前面几节我们曾经涉及到几个量：在§1(1.13)中对于算子T定义了n次逼近数$\alpha_n(T)$. 同时在§1中还讨论过R^n中紧凸集的体积. 现在若$\dim X = n$，$B(X)$是X的单位球，$D_X^{\max}$是B中最大体积的椭球，我们记

$$v_r(X) = \left(\frac{\text{vol}B(X)}{\text{vol}D_X^{\max}}\right)^{1/n} \quad (4.3)$$

v_r实际上是一个体积比. 对于$\dim X = n$今后简记$d_X = d(X, l_2^n)$.

我们还将研究两个量：一个是

$$d_X(\delta) = \sup_{\substack{E\subset X\\ \dim E<\infty}} \inf\{d_E : E \subset X, \dim E \geqslant \delta \dim X\} \quad (4.4)$$

其中$0 < \delta < 1$. $d_X(\delta) < \infty$的直观意义是存在有限常数c使得每个有限维子空间E，只要$\dim E \geqslant \delta\dim X$，则$E \overset{c}{\sim} l_2^n$. 另一个量是

$$l(u) = \left(\int_{R^n} \|u(t)\|^2 d\gamma_n(t)\right)^{1/2} \quad (4.5)$$

其中γ_n是R_n上的标准Gauss测度，如果$(e_i)_{i\geq 1}$是R^n的标准基或者

当 $d\gamma_n$ 旋转不变时 $(e_i)_{i\geqslant 1}$ 是正交基，则 $l(u)$ 的表达式还可写成

$$l(u) = \left\| \sum \xi_i u(e_i) \right\|_{L_2(X)}$$

这里 ξ_i 是标准 Gauss $R.V.$

对于这种范数又有

$$l^*(v) = \sup\{truv, u: l_2^n \to X \text{ 满足 } l(u) \leqslant 1\}, \quad \forall v \in L(X, l_2^n). \tag{4.6}$$

定义 设 X 是 Banach 空间，$1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$

(i) 称 X 是弱 p 型空间，若存在 $c > 0$ 使得对于每个 $u \in L(X, l_2^n)$，

$$\sup_{k\geqslant 1} k^{1/p} \alpha_k(u) \leqslant c l^*(u). \tag{4.7}$$

称满足此式的最小常数 c 为 X 的 w-p 型常数，记为 $wT_p(X)$.

(ii) 称 X 是弱 q 余型空间，若存在 $c > 0$ 使得对于每个 $u \in L(l_2^n, X)$，

$$\sup_{k\geqslant 1} k^{1/q} \alpha_k(u) \leqslant c l(u). \tag{4.8}$$

类似的定义 w-q 余型常数，记为 $wC_p(X)$.

正如开头所说的，理论和应用上的兴趣在于 $p = q = 2$ 的情况. 因此又有

(iii) X 既是 w-2 型又是 w-2 余型的，称 X 是 w-Hilbert 空间.

命题 1 $wT_2(X) \leqslant T_2(X)$，$wC_2(X) \leqslant C_2(X)$.

因此 2 型空间是 w-2 型空间，2 余型空间是 w-2 余型空间.

证明 这里只证明余型的情况. 设 X 是 2 余型的，则存在 $C > 0$ 使得

$$C_2\left(E\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right\|^2\right)^{1/2} \geqslant \left(\sum_{i=1}^n \| x_i \|^2\right)^{1/2}. \tag{4.9}$$

这里 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 是 R^n 上的标准 Gauss 测度.

考虑算子 $u: l_2^n \to X$，由 §1 引理 6，存在规范正交基 $(e_i)_{i\geqslant 1}$ 使得 $\| ue_i \| \geqslant \alpha_i(u)$，从而由 (4.9) 和 (4.5) 得出

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2(u)\Big)^{1/2}\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}\|u(e_i)\|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant C_2\Big(E\|u(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i)\|^2\Big)^{1/2}=C_2 l(u),$$

而 $\alpha_i(u)$ 非增，故

$$\sup_{k\geqslant 1}k^{1/2}\alpha_k(u)\leqslant c_2(X)l(u).$$

命题 2 w-2 型和 w-2 余型被子空间和有限直和空间继承，w-2 余型还被商空间继承.

证明从略.

为叙述下面命题，我们介绍有限可表现和超性质的概念. 设 X,Y 是两个 Banach 空间，称 Y 是在 X 中有限可表现(finitely representable)的，若对于 $\forall\ \varepsilon>0$ 和 Y 的任一有限维子空间 E，都存在 X 的有限维子空间 F 使得 $E\overset{1+\varepsilon}{\sim}F$. 由定义可知，若 X 一致包含 l_p^n，Y 在 X 中可有限表现，则 Y 一致包含 l_p^n. 若(P) 是 Banach 空间的某种属性(自反性，RN 性质，K 凸性，一致凸，不包含同构于 l_1 的子空间等等)，称 X 具有超(P) 性质(Super-(P)property)，若每个在 X 中有限可表现的 Banach 空间都具有此种性质. 例如若每个在 X 中有限可表现的空间都具有自反性，则称 X 是超自反空间. 由上面定义容易知道，若存在两个属性 P_1、P_2，P_1 蕴含 P_2(简记 $P_1\Rightarrow P_2$) 则超 P_1 性质 $\Rightarrow$ 超 P_2 性质. 例如自反性 $\Rightarrow RNP$，故超自反性 $\Rightarrow$ 超 RNP. 称(P)是超性质，若任一空间 X 具有此性质时，在 X 中有限可表现的空间都具有此性质.

命题 3 w-2 型与 w-2 余型都是超性质. 从而 w-Hilbert 空间是超性质.

证明 这里只证 w-2 余型的情况. 设 X 是 w-2 余型空间，Y 在 X 中可有限表现，对于每个 $u\in L(l_2^n,Y)$，往证

$$\sup_{k\geqslant 1}k^{1/2}\alpha_k(u)\leqslant cl(u).$$

设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 l_2^n 的正交基底，$E=\operatorname{span}_{1\leqslant i\leqslant m}\{ue_i\}$ 则 E 是 Y 的有限

维子空间，由于 Y 在 X 中有限可表现，存在 $F \subset X$ 使得 $E \overset{1-\epsilon}{\sim} F$. 即存在同构 $T: E \to F$ 使得 $\| T \| \leqslant 1$, $\| T^{-1} \| \leqslant 1 + \epsilon$. 考虑 $\widetilde{u}: l_2^n \to X$, $\widetilde{u}e_i = Tue_i$，由命题条件

$$\sup_{k \geqslant 1} k^{1/2} \alpha_k(\widetilde{u}) \leqslant cl(\widetilde{u}).$$

首先

$$l(\widetilde{u}) = \left(\int_{R^n} \| \widetilde{u}(t) \|^2 d\gamma_n(t)\right)^{1/2} = \left(\int_{R^n} \| Tu(t) \|^2 d\gamma_n(t)\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \| T \| l(u).$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
\alpha_k(u) &= \alpha_k(T^{-1}\widetilde{u}) \\
&= \inf\{ \| T^{-1}\widetilde{u} - S \| ; S: l_2^n \to Y \ \mathrm{rank} S \leqslant k \} \\
&= \inf\{ \| T^{-1}\widetilde{u} - T^{-1}TS \| ; S: l_2^n \to Y, \ \mathrm{rank} S \leqslant k \} \\
&\leqslant \| T^{-1} \| \inf \| \widetilde{u} - TS \| ; S: l_2^n \to Y, \ \mathrm{rank} S \leqslant k \} \\
&\leqslant \| T^{-1} \| \alpha_k(\widetilde{u}).
\end{aligned}$$

于是

$$\sup_{k \geqslant 1} k^{1/2} \alpha_k(u) \leqslant c \| T^{-1} \| \ \| T \| l(u) = (1 + \epsilon) cl(u).$$

命题 4 (i) 存在 $\beta > 0$ 使得对于任何 n 维空间 X,

$$C_2(X) \leqslant \beta(1 + \log n) wC_2(X), \tag{4.10}$$

$$T_2(X) \leqslant \beta(1 + \log n) wT_2(X). \tag{4.11}$$

(ii) 对于任何 $p < 2 < q$, $\exists \ \beta > 0$ 使得

$$C_q(X) \leqslant \beta wC_2(X), \tag{4.12}$$

$$T_p(X) \leqslant \beta wT_2(X). \tag{4.13}$$

这里 β 仅与 p 或 q 有关.

证明 这里只证明(4.10) 和(4.12)，另两式类似证之.

为证(4.10)，设 $wC_2(X) < \infty$. 不失一般性，假定 $\sup\limits_{k \geqslant 1} k^{1/2} \alpha_k(u) = 1$. 设 m 为自然数，$u: l_2^m \to X$ 是线性算子，根据 $\alpha_k(u)$ 的定义，有 $v_k: l_2^m \to X$, $\mathrm{rank} v_k < 2^k$, $\| u - v_k \| \leqslant \alpha_{2^k}(u)$，记 $\Delta_0 = v_0$, $\Delta_k = v_k - v_{k-1} (k \geqslant 1)$，则 $\mathrm{rank} \Delta_k < 2^k + 2^{k+1}$ 并且

$$\|\Delta_k\| \leqslant \|u - v_k\| + \|u - v_{k-1}\| \leqslant \alpha_{2^k}(u) + \alpha_{2^{k-1}}(u)$$
$$\leqslant 2^{-k/2} + 2^{-(k-1)/2} \leqslant 4 \cdot 2^{-k/2}.$$

注意当 $2^k \geqslant n$ 时，$v_k = u$，因为 $\dim X = n$，于是 $u = \sum_{k=0}^{[\log_2 n]} \Delta_k$，应用 2 绝对可和算子的性质得到

$$\begin{aligned}\Pi_2(u) &\leqslant (1 + \log_2 n)\sup_k \Pi_2(\Delta_k) \\ &\leqslant (1 + \log_2 n)\sup_k \|\Delta_k\| \Pi_2(I_{l_2^k}) \\ &\leqslant (1 + \log_2 n)\sup_k 4 \cdot 2^{-k/2}\sqrt{k} \\ &\leqslant \beta(1 + \log n).\end{aligned}$$

其中用到了 $\Pi_2(I_{l_2^k}) \leqslant \sqrt{k}$（见 V. §6 定理 7）. 于是

$$\Pi_2(u) \leqslant \beta(1 + \log n)\sup_{k\geqslant 1}\sqrt{k}\,\alpha_k(u).$$

u 是 2 绝对可和的，令 $x_i = u(e_i)$，$(e_i)_{i\geqslant 1}$ 是 l_2^n 的标准正交基底，则由前面(4.5)的说明

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{1/2} &\leqslant \Pi_2(u)\left(\int_{B(l_2^{n*})}\sum_{i=1}^n |x^* e_i|^2 d\mu(x^*)\right)^{1/2} \\ &\leqslant \beta(1 + \log n) wC_2 l(u).\end{aligned}$$

为证(4.12)，设 $x_1, \cdots, x_m \in X$ 并且 $\|\sum_{i=1}^m \xi_i x_i\|_{L_2(X)} = 1$，不妨设 $\|x_1\| \geqslant \|x_2\| \geqslant \cdots \geqslant \|x_m\|$，若 $n \leqslant m$，$E = \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$，由(4.10)的证明，以及 $wC_2(E) \leqslant wC_2(X)$，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{1/2} &\leqslant \beta(1 + \log n)c\|\sum_1^n \xi_i x_i\|_{L_2(X)} \\ &\leqslant \beta(1 + \log n)c\end{aligned}$$

故

$$\|x_n\| \leqslant n^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{1/2} \leqslant \beta(1 + \log n)cn^{-1/2},$$

$$\left(\sum \|x_n\|^q\right)^{1/q} \leqslant \beta C\left(\sum_{n=1}^\infty n^{-q/2}(1 + \log n)^q\right)^{1/q}.$$

后者是收敛级数，其值与 q 有关，故得之.

这一命题说明 w-2 型空间是 2-ε 型空间，w-2 余型空间是 $2+\varepsilon$ 余型空间，从而 w-Hilbert 空间是 $2-\varepsilon$ 型和 $2+\varepsilon$ 余型空间，这里 $0<\varepsilon<1$ 是任意的.

命题 5 设 X 是 w-2 余型空间，$x_1,\cdots,x_n\in X$，若对于任何 $(\alpha_i)\in R^n$，

$$\|(\alpha_i)\|_\infty \leqslant \|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\|, \tag{4.14}$$

则

$$\sqrt{n} \leqslant 2wC_2(X)\|\sum_1^n \xi_i x_i\|_2 \tag{4.15}$$

并且对于 $\forall\ (\alpha_i)\in R^n$

$$\|(\alpha_i)\|_{2\infty} \leqslant 2wC_2(X)\|\sum_1^n \alpha_i\xi_i x_i\|_2 \tag{4.16}$$

证明 设 $E=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$，$u:l_2^n\to X$，其中 $u(\alpha)=\sum_1^n \alpha_i x_i$ $(\forall\ \alpha=(\alpha_i)\in R^n)$，则 $\Pi_2(u^{-1})\leqslant\sqrt{n}$. 实际上设 $u^{-1}=JA$，其中 $A:E\to l_\infty^n$，$J:l_\infty^n\to l_2^n$. J 是自然包含算子，$\|A\|\leqslant 1$. 显然 $\Pi_2(J)\leqslant\sqrt{n}$，故

$$\Pi_2(u^{-1})\leqslant\sqrt{n}.$$

利用归纳法，对于每个 $1\leqslant k\leqslant n$，可以确定子空间 $S\subset l_2^n$，S 由正交向量张成，$\dim S>n-k$ 使得

$$\|uP_s\|\leqslant ck^{-1/2}l(u).\quad (C=wC_2(X))$$

这里 $P_s:l_2^n\to S$ 是正交投影，此时

$$\begin{aligned}(\dim S)^{1/2} &= \Pi_2(u^{-1}uP_s)\\ &\leqslant \|u^{-1}\|\Pi_2(uP_s)\leqslant n^{1/2}ck^{-1/2}l(u),\end{aligned}$$

于是 $(n-k+1)^{1/2}k^{1/2}n^{-1/2}\leqslant cl(u)$. 取 $k=[\frac{n}{2}]$ 即得到(4.15).

现在设 $|\alpha_1|\geqslant|\alpha_2|\geqslant\cdots\geqslant|\alpha_n|$. ξ_i 的对称性说明 $(\xi_i x_i)_{i\geqslant1}$ 是 $L_2(X)$ 中的无条件序列，常数为 1，从而对于任何 k，

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i x_i \|_2 = \| \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \xi_i x_i \|_2 \geqslant \| \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \xi_i x_i \|_2$$

$$\geqslant |\alpha_k| \| \sum_{i=1}^{k} \xi_i x_i \|_2 \geqslant |\alpha_k| \sqrt{k} (2c)^{-1},$$

即(4.16).

命题 6 设 X 是 Banach 空间,则

(i)X 是 w-2 型的当且仅当 X^* 是 K 凸的和 w-2 余型的.

(ii)X^* 是 w-2 型的当且仅当 X 是 K 凸的和 w-2 余型的.

证明 现证(i),对于(ii) 可同样证之.

若 X 是 w-2 型的,则 X 是 p 型的,$1 < p < 2$,故 X 是 K 凸的. X^* 也是 K 凸的并且 $K(X) = K(X^*)$. 因为 $l^*(v) \leqslant l(v^*)$,由定义知道 X 是 w-2 余型的.

反之,设 X^* 是 K 凸的和 w-2 余型的. 若 $v: X \to l_2^n$ 是线性算子,类似于 §1,(2.2)(2.3),具体地说就是将其中的 $(r_i)_{i\geqslant 1}$ 换为 Gauss $R.V.$ $\{\xi_i\}_{i\geqslant 1}$,则可以得出

$$\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \|_{L_2(X)} \leqslant K(X) \sup \{ \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i, \| \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i^* \|_2 \leqslant 1 \}.$$

$$(\forall\ x_1, \cdots x_n \in X)$$

现在记 $x_i^* = v^*(e_i)$,则由(4.6)

$$l(v^*) = \| \sum_{i=1}^{n} \xi_i v^*(e_i) \|_{L_2(X^*)} \leqslant K(X^*) l^*(v) = K(X) l^*(v),$$

$$\sup \sqrt{k}\, a_k(v^*) \leqslant wC_2(X^*) l(v^*) \leqslant wC_2(X^*) K(X) l^*(v),$$

故 $wC_2(X) \leqslant wC_2(X^*) K(X)$.

在下面定理中,$G(X)$ 与 $\mathrm{Rad}(X)$ 分别表示"多项式"$\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$ 或 $\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i$ 全体在 $L_2(X)$ 中的闭包.

定理 1 设 X 是 Banach 空间,则以下条件等价:

(i) X 是 2 余型(2 型) 空间.

(ii) $l_2(X)$,$L_2(X)$,$G(X)$,$\mathrm{Rad}(X)$ 中有一个是 w-2 余型(w-2

型）空间.

证明　这里仅证余型情况，对于型的情况类似证之.

若 X 是 2 余型的，则 $L_2(X)$ 也是，从而 $l_2(X)$ 是 w-2 余型的. 因为 $L_2(X)$ 在 $l_2(X)$ 中有限可表现，故 $l_2(X)$ 的 w-2 余型蕴含 $L_2(X)$ 是 w-2 余型. $G(X)$ 是 $L_2(X)$ 的子空间，故 $G(X)$ 是 w-2 余型的. $G(X)$ 与 $\mathrm{Rad}(X)$ 同构，于是 $\mathrm{Rad}(X)$ 是 w-2 余型的.

现在证明 $\mathrm{Rad}(X)$ 的 w-2 余型蕴含 X 为 2 余型. 设 $x_1,\cdots x_n\in X$，$\|x_i\|=1$，$\alpha=(\alpha_i)\in R^n$，我们知道

$$\|(\alpha_i)\|_\infty=\sup|\alpha_i|\leqslant\|\sum\alpha_i r_i x_i\|_2$$

记 $c=2wC_2(\mathrm{Rad}X)$（即空间 $RadX$ 的 w-2 余型常数），由(4.15)

$$\sqrt{n}\leqslant c\|\sum_{i=1}^n\xi_i r_i x_i\|_{L_2(\mathrm{Rad}X)}=c\|\sum_{i=1}^n\xi_i x_i\|_2 \qquad (4.17)$$

后者是由于 ξ_i 的对称性，为了证明

$$\left(\sum_{i=1}^n|\alpha_i|^2\right)^{1/2}\leqslant c\|\sum_{i=1}^n\xi_i\alpha_i x_i\|_2,\quad(\alpha_i)\in R^n \qquad (4.18)$$

只须就　$\alpha_i=\left(\dfrac{k_i}{m}\right)^{1/2}$，$k_i$ 为整数，$\sum\limits_{i=1}^n k_i=m$ 的特殊情况证明之. 若 $(\bar{x}_i)_{i\leqslant n}$ 是从 $x_1,\cdots x_n$ 通过对 x_1 重复 k_1 次，x_2 重复 k_2 次 … 得到的，应用(4.17)于$(\bar{x}_i)_{i\leqslant n}$，

$$\sqrt{m}\leqslant c\|\sum_{i=1}^m\xi_i\bar{x}_i\|_2.$$

但 $\xi_1+\cdots+\xi_{k_1}$ 与 $\sqrt{k_1}\xi_1$ 同分布，$\xi_{k_1+1}+\cdots+\xi_{k_1+k_2}$ 与 $\sqrt{k_2}\xi_2$ 同分布，故

$$\|\sum_1^n k_i^{1/2}\xi_i x_i\|_2=\|\sum_1^m\xi_i\bar{x}_i\|_2\geqslant m^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^n k_i\right)^{1/2}$$

$$=\sqrt{m}\,(\sum_{i=1}^n\alpha_i^2)^{1/2},$$

即(4.18). 故 X 是 2 余型的.

定理 2　设 X 为 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 是 w-2 余型空间.

(ii) 对于某个 $\delta > 0, d_X(\delta) < \infty$.

(iii) $\exists\, c > 0$ 使得对于 X 的任何有限维子空间 E,体积比 $v_r(E) \leqslant c$.

证明 这里我们给出一个证明的梗概.

(iii)$\Rightarrow$(ii) 设 $\dim E = n, B = \{x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$. D 是 B 中的椭球 $D \subset B$,以 $\|\cdot\|$ 表示 E 的范数,它与 X 中范数一致. $|\cdot|$ 表示 D 的 Minkowski 泛函,从而是一个内积范数. 注意 $\|x\| \leqslant |x|, \forall\, x \in E$.

实际上,适当选择 E 的基底,可以认为 $D = B_{l_2^n}$. 即 l_2^n 的单位球. 应用极坐标则

$$\mathrm{Vol}B = \lambda_n \int_{S^{n-1}} d\mu_{n-1}(x) \int_0^{\frac{1}{\|x\|}} n r^{n-1} dr \tag{4.19}$$

其中 S^{n-1} 是 l_2^n 的单位球面, μ_{n-1} 是 S^{n-1} 上的旋转不变概率测度, λ_n 是与 B 无关的规范化常数. 特别地取 $B = D$,则 $\mathrm{Vol}D = \lambda_n$,于是

$$\frac{\mathrm{Vol}B}{\mathrm{Vol}D} = \int_{S^{n-1}} d\mu_{n-1}(x) \int_0^{\frac{1}{\|x\|}} n r^{n-1} dr \tag{4.20}$$

此时,对于 $k = 1, \cdots, n-1$,存在子空间 $F \subset E, \dim F = k$ 使得

$$|x| \leqslant (4\pi v_r(E))^{\frac{n}{n-k}} \|x\|, \forall\, x \in F \tag{4.21}$$

其中 v_r 是体积比

$$v_r = \left(\frac{\mathrm{Vol}B}{\mathrm{Vol}D}\right)^{1/n} \tag{4.22}$$

特别地,此时有

$$d(F, l_2^n) \leqslant (4\pi v_r(E))^{\frac{n}{n-k}}.$$

这说明(ii) 是成立的.

(ii)$\Rightarrow$(i),考虑 $u: l_2^n \to X$,不妨设 u 是同构,令 $\alpha = \frac{\delta}{2}$. δ 是(ii)中的常数,记 $E = u(l_2^n)$. 不失一般性假设 $\alpha = K^{-1}$, K 为自然数,又 $n = K^m$, m 为某个自然数. 实际上可以证明,只要有一个 $\delta \in (0,1)$

使(ii)成立. 则对任何 $\delta \in (0,1)$(ii)都成立.

由 $d_X(\delta)$ 的定义,存在子空间 $F \subset E$,$\dim F = k \geqslant \delta n$,并且 $d_F \leqslant d_X(\delta)$. 记 $S = u^{-1}(F)$ 则 $u|_S : S \to F$ 为一算子,应用归纳法可以找到规范正交基 $\{e_i\} \subset l_2^k$,使得 $\| ue_i \| \geqslant \alpha_i(u)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,从而

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(u)^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \| ue_i \|^2 \right)^{1/2} \leqslant d_F l(u).$$

所以

$$\alpha_m(u) \leqslant m^{-1/2} d_F l(u) \qquad (1 \leqslant m \leqslant k)$$

换句话说,对于每个 m,有子空间 $S_1 \subset l_2^k$,$\dim S_1 > k - m$ 使得

$$\| u|_{S_1} \| \leqslant m^{-1/2} d_F l(u)$$

取 S_1,$\dim S_1 = \alpha n$,此时上式变为

$$\| u|_{S_1} \| \leqslant (\alpha n)^{-1/2} d_X(\delta) l(u) \qquad (4.23)$$

注意 $\dim S_1^{\perp} = (1-\alpha)n$.

同样的方法,对于 $S_1^{\perp}$,存在 $S_2 \subset S_1^{\perp}$,$\dim S_2 = \alpha(1-\alpha)n$ 使得

$$\| u|_{S_2} \| \leqslant d_X(\delta)(\alpha(1-\alpha))^{-1/2} l(u).$$

再由 $(S_1 \oplus S_2)^{\perp}$ 代替 $S_1^{\perp}$,继续这一过程则可找到两两正交的子空间 $S_1, \cdots, S_N$ 使得

$$\| u|_{S_i} \| \leqslant d_X(\delta) l(u) (\alpha(1-\alpha)^{i-1} n)^{-1/2},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \dim S_i = [1 - (1-\alpha)^N] n,$$

于是

$$\begin{aligned} \| u|_{S_1 \oplus \cdots \oplus S_N} \| &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} \| u|_{S_i} \|^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \alpha^{-\frac{1}{2}} d_X(\delta) l(u) n^{-1/2} \left(\sum_{i=0}^{N-1} (1-\alpha)^{-i} \right)^{1/2} \\ &\leqslant d_X(\delta) l(u) \alpha^{-1} n^{-1/2} (1-\alpha)^{-(N-1)/2}. \end{aligned}$$

对于 $\forall\, k \leqslant n$,设 $k_i = n - \dim(S_1 \oplus \cdots \oplus S_N)$,$N$ 是使 $k_i \leqslant k$ 的最小指标,$S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_N$,则 $\dim S \geqslant n - k$(注意 $k_{i-1} \geqslant k$),

$$\| u|_S \| \leqslant d_X(\delta) \alpha^{-1} k^{-1/2} l(u).$$

从而

$$\alpha_k(u) \leqslant d_X(\delta)\alpha^{-1}k^{-1/2}l(u),$$

$$\sup_{k\geqslant 1} k^{-1/2}\alpha_k(u) \leqslant d_X(\delta)\alpha^{-1}l(u).$$

记 $c = \beta d_X(\delta)\delta^{-1}$，上式说明 X 是 w-2 余型空间.

(i)⇒(iii) 设 X 是 w-2 余型的，$E \subset X$，$\dim E = n$. 由 §1 引理 5，注意 $l(u)$ 是 u 的一种范数，故存在同构 $u: l_2^n \to E$ 使得

$$l(u) = l^*(u^{-1}) = \sqrt{n}$$

在命题 6 中我们有(以 $x_i = ue_i, x_i^* = u^{-1*}e_i$)

$$l(u^{-1*}) \leqslant K(E)l^*(u^{-1}) \leqslant K(E)\sqrt{n}$$

用初等方法可估计出 $K(E) \leqslant K(1 + \log d_E)$，这里 K 是某个常数，于是

$$l(u^{-1*}) \leqslant K(1 + \log d_E)\sqrt{n} \tag{4.24}$$

此时由 w-2 余型定义，存在子空间 S 使得

$$\| u|_S \| \leqslant wC_2(X)\left(\frac{n}{k}\right)^{1/2}.$$

若 $F = u(S)$ 则

$$\| u^{-1}|_F \| \leqslant K(1 + \log d_E)\left(\frac{n}{k}\right)^{1/2}.$$

从而

$$d_F \leqslant \| u|_S \| \, \| u_F^{-1} \| \leqslant wC_2(X)\left(\frac{n}{k}\right)K(1 + \log d_E).$$

由此，对于每个 $k = 1, \cdots, n$，都存在子空间 $F \subset E$，$\dim F = n - k$ 使

$$d_F \leqslant K' wC_2(X)\left(\frac{n}{k}\right)(1 + \log K' wC_2(X)\frac{n}{k}). \tag{4.25}$$

以上证明实际上给出了(i)⇒(ii). 不过(4.25) 比 $d_X(\delta) < \infty$ 更为具体.

为了得到(iii) 的结论，我们引入关于算子 $u: X \to Y$ 的另外两个量

$$c_k(u) = \inf\{\|u|_S\|, S \subset X, \mathrm{Codim}S < k\},$$

$$e_k(u) = \inf\{\varepsilon > 0,\quad N(u(B_X), \varepsilon B_Y) < 2^{k-1}\}.$$

其中 Codim 是 S 关于 X 的余维数. 若 $B_1, B_2 \subset Y$, 则 $N(B_1, B_2)$ 表示最小的自然数 N, 使得 $\exists\ y_1, \cdots, y_N \in Y, B_1 \subset \bigcup_{i=1}^{N}(y_i + B_2)$. 注意到 $\{c_k(u)\}, \{e_k(u)\}$ 都是非增的, 并且 $c_1(u) = e_1(u) = \|u\|$.

将(4.25)改写成

$$d_F \leqslant c\left(\frac{n}{k}\right)^\alpha, \quad \text{其中 } \alpha > 1 \tag{4.26}$$

$1 \leqslant k \leqslant n$ 是子空间 F 的维数. 现在设 $v: E \to l_2^n$ 是一个算子, 考虑 $v|_F: F \to l_2^n$. 则 $v|_F$ 是一个从 Hilbert 空间到 Hilbert 空间的算子. 因此由 V. §6 定理 3(i), 若 $F_i \subset X, \mathrm{Codim}F_i < i$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2(v|_F)\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2(v|_F)\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \sigma(v|_F) = \Pi_2(v|_F) \leqslant d_F \Pi_2(v).$$

故 $c_k(v|_F) \leqslant k^{-1/2} d_F \Pi_2(v)$, 又明显地, $c_{i+j-1}(v) \leqslant c_i(v|_F)$. 取 $i = j = m$, 若 $k = 2m - 1$ 则由(4.26),

$$c_k(v) \leqslant d_F \Pi_2(v) 2^{\frac{1}{2}} m^{-1/2} \leqslant 2^{\alpha+1/2} C\left(\frac{n}{k}\right)^\alpha \Pi_2(v) k^{-1/2}.$$

此式对于 $k = 2m$ 也成立. 从而

$$\sup_{k \leqslant n} k^{\alpha+1/2} c_k(v) \leqslant C(2n)^{\alpha+1/2} \Pi_2(v) n^{-1/2}. \tag{4.27}$$

Carl[1] 的一个关于 $c_K(u)$ 与 $e_K(u)$ 关系的不等式说明

$$\sup_{k \leqslant n} k^{\alpha+1/2} e_K(v) \leqslant D' n^{\alpha+1/2} \Pi_2(v) n^{-1/2}.$$

D' 为常数, 特别地

$$e_n(v) \leqslant D' \Pi_2(v) n^{-1/2}. \tag{4.28}$$

由 §2 定理 1, 存在 $u: l_2^n \to E$ 使得 $\|u\| = 1, \Pi_2(u^{-1}) = \sqrt{n}$. 对于 u, (4.28) 变为 $e_n(u^{-1}) \leqslant C$. 由 e_n 定义得出

$$\frac{\mathrm{vol}\, u^{-1}(B_E)}{\mathrm{vol}\, B_{l_2^n}} \leqslant 2^n C^n$$

或等价地

$$v_r(E) \leqslant \left(\frac{\mathrm{vol}B(E)}{\mathrm{vol}(u(B_{l_2^n}))}\right)^{1/2} \leqslant 2C. \qquad (4.29)$$

这里 $u(B_{l_2^n})$ 是包含在 $B(E)$ 中体积最大的椭球，定理得证.

下面关于 w-2 型的定理与定理 2 具有共轭性质，其证明这里略去.

定理 3 设 X 是 Banach 空间，$1 \leqslant p \leqslant 2$，则以下条件等价：

(i) X 是 w-2 型的

(ii) $\exists\, c > 0$ 使得对于 X^* 的任何有限维商空间 Q，体积比

$$v_r(Q) \leqslant c$$

(iii) $\exists\, c > 0$ 使得对于任何 n 和 n 维子空间 $E \subset X$，以 $D_E^{\min}$ 记包含 $B(E)$ 的最小体积的椭球，则

$$\left(\frac{\mathrm{vol}(D_E^{\min})}{\mathrm{vol}(B(E))}\right)^{1/n} \leqslant c.$$

由上述定理可得出

定理 4 设 X 是 Banach 空间，则 X 同构于 Hilbert 空间当且仅当 $l_2(X)$，$L_2(X)$，$G(X)$，Rad(X) 中之一为 w-Hilbert 空间.

定理 5 X 是 w-Hilbert 空间当且存在 $C > O$ 使得对于任何自然数 n 和 $E \subset X$，$\dim E = n$

$$\left(\frac{\mathrm{vol}(D_E^{\min})}{\mathrm{vol}(D_E^{\max})}\right)^{1/n} \leqslant c.$$

其中 $D_E^{\min}$ 是包含在 $B(E)$ 中的最大体积的椭球.

Johnson 证明了每个 w-Hilbert 空间是自反空间. 由于 w-Hilbert 是超性质，故 w-Hilbert 空间也是超自反空间. 另外 w-Hilbert 空间具有逼近性质和一致逼近性质. 关于这一结论的证明可参见 Lindenstrauss，Tzafriri[1].

Ⅶ. 超自反空间

§1 凸性模与光滑模

设 X 是实 Banach 空间.

定义 1 若 X 是 Banach 空间,其维数 $\dim X \geqslant 2$,称

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{1 - \frac{\|x + y\|}{2}, \|x\| = \|y\| = 1,$$

$$\|x - y\| = \varepsilon\} (0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2) \tag{1.1}$$

是 X 的凸性模(modulus of convexity);称

$$\rho_X(\tau) = \sup\{\frac{1}{2}(\|x + y\| + \|x - y\|) - 1,$$

$$\|x\| = 1, \|y\| = \tau\} (\tau > 0) \tag{1.2}$$

是 X 的光滑模(modulus of smoothness).

Banach 空间 X 称为是一致凸的 (uniformly convex):若对于任何 $\varepsilon>0$,$\delta_X(\varepsilon)>0$;称为是一致光滑的(uniformly smooth):若 $\lim\limits_{\tau\to 0}\rho_X(\tau)/\tau=0$.

在此定义中,有几点值得注意:

1° 将(1.1)中的 $\|x\| = \|y\| = 1$ 换为 $\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1$, $\|x-y\| = \varepsilon$ 换为 $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$,$\delta_X(\varepsilon)$的值不会改变. 同样地,将(1.2)中的 $\|x\| = 1$ 换为 $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| = \tau$ 换为 $\|y\| \leqslant \tau$, $\rho_X(\tau)$的值不会改变. 这些都可以用初等方法予以证明.

2° 凸性模与光滑模并不是等价范数不变的. 甚至于空间的一致凸性或一致光滑性也可能因换为等价范数而失去.

例 1 对于 Hilbert 空间 X,由平行四边形公式直接得出

$$\delta_X(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon^2}{8} + o(\varepsilon^4), o < \varepsilon < 2 \quad (1.3)$$

$$\delta_X(\tau) = (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{\tau^2}{2} + o(\tau^4), \tau > 0 \quad (1.4)$$

所以 X 既是一致凸的又是一致光滑的.

例 2 设 $\|\cdot\|_2$ 是 l_2 上的范数,定义新范数

$$\|x\| = \max(2|x_1|, \|x\|_2), \forall x = (x_n) \in l^2,$$

容易知道 $\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant 2\|x\|_2$,所以 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价范数,但 l^2 在 $\|\cdot\|$ 范数下不是一致凸的,甚至不是严格凸的. 例如取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $x = (\frac{1}{2}, 0, \cdots)$, $y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \cdots)$,则 $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| = \frac{1}{2}$,此时 $\|\frac{x+y}{2}\| = 1$, $\delta_{(l^2, \|\cdot\|)}(\frac{1}{2}) = 0$.

一个 Banach 空间的属性依照下述方法可以分为两类:一类称为拓扑性质,一类称为度量性质. 前者是指仅依赖于拓扑因此在等价范数下不会改变的性质. 例如紧性,自反性,RN 性质,p 型,q 余型等. 后者是指由空间特定范数确定,当范数改为等价范数时可能会改变的性质. 例如严格凸,一致凸,一致光滑等等.

下面给出 $\delta_X(\varepsilon)$ 和 $\rho_X(\tau)$ 的更精确的描述,首先我们有

定理 1 设 X 是 Banach 空间,X^* 是 X 的共轭空间,则

(i) $\rho_{X^*}(\tau) + \delta_X(\varepsilon) \geqslant \frac{\tau\varepsilon}{2}$, $(\tau > 0, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2)$. (1.5)

(ii) $\rho_{X^*}(\tau) = \sup\limits_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2} (\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_X(\varepsilon))$, $(\tau > 0)$. (1.6)

(iii) $\rho_X(\tau) = \sup\limits_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2} (\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{X^*}(\varepsilon))$, $(\tau > 0)$. (1.7)

(iv) X 是一致凸空间当且仅当 X^* 是一致光滑的.

证明 1° 记 $S_p(X) = \{x \in X, \|x\| = 1\}$,设 $x, y \in S_p(X)$, $\|x - y\| = \varepsilon$. 取 $x^*, y^* \in S_p(X^*)$,使得 $x^*(x + y) = \|x + y\|$, $y^*(x - y) = \|x - y\|$,则

$$2\rho_{X^*}(\tau) \geqslant \|x^* + \tau y^*\| + \|x^* - \tau y^*\| - 2$$

$$\geqslant x^*x + \tau y^*x + x^*y - \tau y^*(y) - 2$$
$$= x^*(x+y) + \tau y^*(x-y) - 2$$
$$= \|x+y\| + \tau\varepsilon - 2$$

$$2\rho_{X^*}(\tau)+2-\|x+y\|\geqslant\tau\varepsilon,$$

x、y是任意的，故必有(i)成立.

实际上，在上述证明中只要关于x^*、$y^*\in S_p(X^*)$或关于x、$y\in S_p(X)$（保持$\|x-y\|=\varepsilon$）取上确界，上述各式均为等式，所以(ii)成立.

2° 设x^*、$y^*\in S_p(X^*)$，$\|x^*-y^*\|=\varepsilon$. 对于$\forall\ \eta>0$取x，$y\in S_p(X)$，使得$(x^*+y^*)x\geqslant\|x^*+y^*\|-\eta$，$(x^*-y^*)y\geqslant\|x^*-y^*\|-\eta$，则

$$\begin{aligned}2\rho_X(\tau) &\geqslant \|x+\tau y\| + \|x-\tau y\| - 2\\ &\geqslant x^*x + \tau x^*y + y^*x - \tau y^*y - 2\\ &= (x^*+y^*)x + \tau(x^*-y^*)y - 2\\ &\geqslant \|x^*+y^*\| + \tau\|x^*-y^*\| - 2 - (1+\tau)\eta\\ &= \|x^*+y^*\| + \tau\varepsilon - 2 - (1+\tau)\eta\end{aligned}$$

即

$$2\rho_X(\tau) + 2 - \|x^*+y^*\| \geqslant \tau\varepsilon - (1+\tau)\eta$$

η是任意的，与1°中一样的论述可知(iii)成立.

3° 设X^*是一致光滑的，则$\rho_{X^*}(\tau)/\tau\longrightarrow 0\ (\tau\to 0)$. 对于$0\leqslant\varepsilon\leqslant 2$，取$\tau$足够小，以至于$\rho_{X^*}(\tau)/\tau<\dfrac{\varepsilon}{4}$，则$\rho_{X^*}(\tau)<\dfrac{\tau\varepsilon}{4}$. 于是利用(i)中的不等式，$\delta_X(\varepsilon)>\dfrac{\varepsilon\tau}{4}>0$，$X$是一致凸的.

设X是一致凸的（实际上只要对充分小的ε，有$\delta_X(\varepsilon)>0$），将(ii)式改写为

$$\frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau} = \sup_{0<\varepsilon\leqslant 2}\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\tau}\right)$$

若$\overline{\lim\limits_{\tau\to 0}}\dfrac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau}=a>0$，则必有序列$\varepsilon_n$，$\tau_n$. 其中$\tau_n\to 0$使得 $\dfrac{\varepsilon_n}{2}-$

$\frac{\delta_X(\varepsilon_n)}{\tau_n} \geqslant \frac{a}{2}$. 不妨设 $\varepsilon_n \to a_0 (n \to \infty)$ 否则过渡到子列，则 $a_0 \geqslant a$. 从而 $\delta_X(\varepsilon_n) \leqslant (\frac{\varepsilon_n}{2} - \frac{a}{2})\tau_n$ 此时必有 $\delta_X(a_0)=0$，矛盾.

定理 2 一致凸空间与一致光滑空间都是自反空间.

证明 只须证明一致凸空间自反，之后由定理 1(iv)得到一致光滑空间自反.

对于 $\forall\ x \in X^{**}$，$\|x\|=1$. 由于 $B_X=\{x \in X, \|x\| \leqslant 1\}$ 在 $B_{X^{**}}=\{x \in X^{**}, \|x\| \leqslant 1\}$ 中是 w^* 稠密的，取网 $\{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 使得 $w^*-\lim\limits_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x$，再取 $f \in X^*$，$\|f\|=1$ 使得 $f(x) > 1-\delta_X(\varepsilon)$. 于是$\exists\ \lambda_0$ 使得 $\lambda, \lambda' \geqslant \lambda_0$ 时

$$f(x_\lambda) \geqslant 1-\delta_X(\varepsilon), \quad f(x_{\lambda'}) \geqslant 1-\delta_X(\varepsilon),$$

$$\left\| \frac{x_\lambda + x_{\lambda'}}{2} \right\| \geqslant f\left(\frac{x_\lambda + x_{\lambda'}}{2}\right) \geqslant 1-\delta_X(\varepsilon)$$

于是由一致凸性，$\|x_\lambda - x_{\lambda'}\| \leqslant \varepsilon$，$X$ 完备，故存在 $y \in X$，依 X 的范数 $y=\lim\limits_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x$；即 $x \in X$ 或 $X=X^{**}$，X 自反.

定理 3 设 X 是 Banach 空间，则

(i) $\rho_X(0)=0$，$\rho_X(\tau)$递增并且是凸函数.

(ii) $\rho_X(\tau)/\tau$ 递增.

(iii) $\exists\ C>0$ 使得 $\overline{\lim\limits_{\tau \to 0}} \frac{\rho_X(2\tau)}{\rho_X(\tau)} \leqslant C$.

(iv) $\exists\ C>0$，使得 $0<\tau<\eta$ 时，$\frac{\rho_X(\eta)}{\eta^2} \leqslant C \frac{\rho_X(\tau)}{\tau^2}$.

证明 1° 只须证明 $\rho_X(\tau)$是凸函数，这可由定理 1 (iii)得之.

2° 由于 $\rho_X(0)=0$，若 $0<\tau<\eta$，记 $\tau=t\eta \quad 0<t<1$，则

$$\frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = \frac{\rho_X(t\eta)}{t\eta} = \frac{\rho_X((1-t)0+t\eta)}{t\eta} \leqslant \frac{t\rho_X(\eta)}{t\eta} = \frac{\rho_X(\eta)}{\eta}.$$

3° 固定 $\tau>0$，设 $\|x\|=1$，$\|y\|=\tau$ 则

$$\rho_X\left(\frac{\tau}{\|x+y\|}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\left\| \frac{x+y}{\|x+y\|} + \frac{y}{\|x+y\|} \right\| \right.$$

$$- \left\| \frac{x+y}{\|x+y\|} - \frac{y}{\|x+y\|} \right\|) - 1$$

于是

$$2\|x+y\|\rho_X(\frac{\tau}{\|x+y\|})$$
$$\geqslant \|x+2y\| - \|x\| - 2\|x+y\|,$$

$$\|x+2y\| \leqslant 2\|x+y\|\rho_X(\frac{\tau}{\|x+y\|}) + 2\|x+y\| - 1.$$

同样地

$$\|x-2y\| \leqslant 2\|x-y\|\rho_X(\frac{\tau}{\|x-y\|}) + 2\|x-y\| - 1.$$

于是

$$\frac{1}{2}(\|x+2y\| + \|x-2y\|) - 1$$
$$\leqslant \|x+y\|\rho_X(\frac{\tau}{\|x+y\|}) + \|x-y\|\rho_X(\frac{\tau}{\|x-y\|})$$
$$+ (\|x+y\| + \|x-y\|) - 2.$$

对于所有$\|x\|=1$，$\|y\|=\tau$取上确界并根据$\rho_X(\tau)$的递增性，

$$\rho_X(2\tau) \leqslant 2(1+\tau)\rho_X(\frac{\tau}{1-\tau}) + 2\rho_X(\tau).$$

当τ足够小时，例如$0<\tau<\frac{1}{5}$，则由$\rho_X(\tau)$的凸性

$$\rho_X(\frac{\tau}{1-\tau}) \leqslant \rho_X(\tau(1+2\tau)) \leqslant (1-2\tau)\rho_X(\tau) + 2\tau\rho_X(2\tau).$$

代入上式得到

$$\rho_X(2\tau) \leqslant \frac{4-2\tau-4\tau^2}{1-4\tau-4\tau^2}\rho_X(\tau) = (4+14\tau+0(\tau^2))\rho_X(\tau). \tag{1.8}$$

于是

$$\overline{\lim_{\tau\to 0}} \frac{\rho_X(2\tau)}{\rho_X(\tau)} \leqslant 4.$$

4° 假定$0<\tau\leqslant\tau_0$时，$\rho_X(2\tau)\leqslant c\rho_X(\tau)$，当$0<\tau<\eta\leqslant\tau_0$时，取

$2^{-m}\eta\leqslant\tau<2^{-m+1}\eta$,则由(1.8)式

$$\frac{\rho_X(\eta)}{\eta^2}\leqslant\frac{1}{\eta^2}\cdot\frac{\rho_X(\eta)}{\rho_X(\frac{\eta}{2})}\cdot\frac{\rho_X(\frac{\eta}{2})}{\rho_X(\frac{\eta}{4})}\cdots\cdots\frac{\rho_X(\frac{\eta}{2^{m-1}})}{\rho_X(\frac{\eta}{2^m})}\cdot\rho_X(\frac{\eta}{2^m})$$

$$\leqslant 4^m\frac{\rho_X(\tau)}{\eta^2}\prod_{j=1}^{m}(1+\frac{15\eta}{2^{j+2}})\leqslant 4\prod_{j=1}^{\infty}(1+\frac{15\eta}{2^{j+2}})\frac{\rho_X(\tau)}{\tau^2}$$

当 $\tau_0\leqslant\tau<\eta$ 时,由(ii)

$$\frac{\rho_X(\tau_0)}{\tau_0}\leqslant\frac{\rho_X(\tau)}{\tau},$$

由于 $\rho_X(\eta)\leqslant\eta$ 总成立,故

$$\frac{\rho_X(\tau)}{\tau^2}\geqslant\frac{\rho_X(\tau_0)}{\tau_0\tau}\geqslant\frac{\rho_X(\tau_0)}{\tau_0\eta}\geqslant\frac{\rho_X(\tau_0)}{\tau_0}\cdot\frac{\rho_X(\eta)}{\eta^2}.$$

定理 4 设 X 是 Banach 空间,则

(i) $\delta_X(0)=0$,$\delta_X(\varepsilon)$是$[0,2]$上的增函数 (一般并非凸函数).

(ii) $\dfrac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon}$在$[0,2]$上是增函数.

(iii) 若定义 $\tilde{\delta}_X(\varepsilon)=\sup\limits_{\tau>0}(\dfrac{\tau\varepsilon}{2}-\rho_{X^*}(\tau))$,则 $\tilde{\delta}_X(\varepsilon)$是凸函数,

$$\tilde{\delta}_X(\varepsilon)\leqslant\delta_X(\varepsilon)\leqslant\tilde{\delta}_X(2\varepsilon)\tag{1.9}$$

(iv) $\exists\ C>0$ 使得 $0<\varepsilon\leqslant\eta$ 时,

$$\frac{\tilde{\delta}_X(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\leqslant C\frac{\tilde{\delta}_X(\eta)}{\eta^2},\frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\leqslant C\frac{\delta_X(\eta)}{\eta^2},\tag{1.10}$$

证明 (i) 是显然的. 为证(ii),设 $0<\eta<\varepsilon<2$, $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x-y\|=\varepsilon$,考虑由 x,y 张成的二维子空间,在由四向量 $0,x,y,\dfrac{x+y}{\|x+y\|}$ 构成的四边形中,一定存在 x',y'使得 $\|x'\|\leqslant 1$, $\|y'\|\leqslant 1$, $\|x'-y'\|=\eta$,并且

$$\frac{1-\frac{1}{2}\|x'+y'\|}{\eta}=\frac{1-\frac{1}{2}\|x+y\|}{\varepsilon},$$

由此通过在 x,y 的范围内取下确界即可得到

$$\frac{\rho_X(\eta)}{\eta} \leqslant \frac{\rho_X(\tau)}{\tau}$$

(iii)中 $\tilde{\delta}_X(\varepsilon)$的定义与定理 1(iii)中 $\rho_X(\tau)$类似，与证明定理 3(i)的理由一样，$\tilde{\delta}_X(\varepsilon)$是凸函数，(ii)同时还说明，$\delta_X(\varepsilon) \geqslant \tilde{\delta}_X(\varepsilon)$.

我们现在来证明 $\delta_X(\varepsilon/2) \leqslant \tilde{\delta}_X(\varepsilon)$ 成立.

设 $f(\varepsilon)=a\varepsilon+b$ 与 $\delta_X(\varepsilon)$有两交点$(\varepsilon_1,\delta_X(\varepsilon_1))$，$(\varepsilon_2,\delta_X(\varepsilon_2))$ 则对于 $\varepsilon_1<\varepsilon<\varepsilon_2$有

$$f(\varepsilon)=\frac{\varepsilon_2-\varepsilon}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\delta_X(\varepsilon_1)+\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\delta_X(\varepsilon_2).$$

若 $\varepsilon_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$，则由$\frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon}$的递增性

$$f(\varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\delta_X(\varepsilon_2) \geqslant \frac{\varepsilon_2(\varepsilon-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\cdot\frac{2\delta_X(\frac{\varepsilon}{2})}{\varepsilon}>\delta_X(\frac{\varepsilon}{2}).$$

若 $\varepsilon_1>\frac{\varepsilon}{2}$，则

$$f(\varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon_2-\varepsilon}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon}\delta_X(\frac{\varepsilon}{2})+\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}\cdot\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon}\delta_X(\frac{\varepsilon}{2})>\delta_X(\frac{\varepsilon}{2}).$$

注意 $\tilde{\delta}_X(\varepsilon)$是小于 $\delta_X(\varepsilon)$的一个极大凸函数（见 $\tilde{\delta}_X(\varepsilon)$的定义）. 故必有 $\tilde{\delta}_X(\varepsilon)=\inf\{f(\varepsilon), f\in I\}$，其中 I 是与 $\delta_X(\varepsilon)$有两交点的 f 全体，由此得到

$$\tilde{\delta}_X(\varepsilon) \geqslant \delta_X(\frac{\varepsilon}{2}) \qquad \text{或} \qquad \tilde{\delta}_X(2\varepsilon) \geqslant \delta(\varepsilon).$$

最后让我们证明(iv)，实际上只须证明第一个式子，然后由(1.9)得到第二式.

设 $0<\varepsilon \leqslant \eta$，记 $k=\frac{\varepsilon}{\eta}$. 注意定理 3(iv)中的常数 c，若 $kc \geqslant 1$，直接由 $\tilde{\delta}_X(\varepsilon)$的凸性

$$\tilde{\delta}_X(\varepsilon) \leqslant k\tilde{\delta}_X(\eta) \leqslant ck^2\delta_X(\eta)$$

即得之. 若 $kc<1$，令 $m=(kc)^{-1}$，则 $m>1$，从而

$$\tilde{\delta}_X(\varepsilon)=\sup_{\tau \geqslant 0}\{\frac{\tau\varepsilon}{2}-\rho_{X^*}(\tau)\}$$

$$\leqslant \sup_{\tau\geqslant 0}\{\frac{1}{2}\tau k\eta - c^{-1}m^{-2}\rho_{X^*}(m\tau)\}$$

$$= c^{-1}m^{-2}\sup_{\tau\geqslant 0}\{\frac{1}{2}m\tau(k\eta cm) - \rho_{X^*}(m\tau)\}$$

$$= Lk^2\delta_X(k\eta cm) = Lk^2\delta_X(\eta).$$

推论 对于任何 Banach 空间 X

(i) $\exists\ c>0$ 使得 $\delta_X(\varepsilon)\leqslant c\varepsilon^2$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant 2$.

(ii) $\exists\ c>0$ 使得 $\rho_X(\tau)\geqslant c\tau^2$, $\tau>0$.

实际上，由定理 4(iv)，$\dfrac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon^2}$ 在$[0,2]$上等价于一个递增函数，而由定理 3(iv)，$\dfrac{\delta_X(\tau)}{\tau^2}$在$[0,\infty)$上等价于一个递减函数，由此不难得到推论.

我们已计算过 Hilbert 空间的凸性模和光滑模，对于一般的 Banach 空间来说，$\delta_X(\varepsilon)$ 和 $\rho_X(\tau)$的计算并非易事，这里我们仅给出 $\delta_{L_p}(\varepsilon)(1<p<\infty)$的估计值.

定理 5 设 $L_p=L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$，$(\mu,\Sigma,\mu)$是任一有限正测度空间，则

$$\delta_{L_p}(\varepsilon) = \begin{cases} 8^{-1}(p-1)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), & 1<p<2 \\ p^{-1}2^{-p}\varepsilon^p + o(\varepsilon^p), & 2\leqslant p<\infty \end{cases} \tag{1.11}$$

证明 先证明 $p\geqslant 2$ 的情况. 对两数 a,b，由于

$$(|a+b|^p + |a-b|^p)^{1/p} \leqslant (|a+b|^2 + a-b|^2)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}(|a|^2+|b|^2)^{1/2}.$$

利用 Hölder 不等式以及 $\dfrac{2}{p}+\dfrac{p-2}{p}=1$，则

$$|a|^2+|b|^2 \leqslant (|a|^p+|b|^p)^{\frac{2}{p}}(1+1)^{1-\frac{2}{p}},$$

从而

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leqslant 2^{\frac{p}{2}}\cdot(|a|^p+|b|^p)2^{\frac{p}{2}-1}$$

$$= 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p).$$

现在设 $f,g\in L_p$，$\|f\|_p=1$，$\|g\|_p=1$，$\|f-g\|_p=\varepsilon$，则对

于几乎所有 $\omega\in\Omega$

$$|f(\omega)+g(\omega)|^p+|f(\omega)-g(\omega)|^p$$
$$\leqslant 2^{p-1}(|f(\omega)|^p+|g(\omega)|^p),$$

从而

$$\|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p\leqslant 2^{p-1}(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p),$$
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p\leqslant 1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

所以 $\delta_{L_p}(\varepsilon)\geqslant 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$.

要证明等号成立，不妨设 $\Omega=[0,1]$，设 $f(t)\equiv 1$,

$$g(t)=\chi_{[0,1-(\frac{\varepsilon}{2})^p]}-\chi_{(1-(\frac{\varepsilon}{2})^p,1]}.$$

容易计算出 $\|f\|_p=\|g\|_p=1$, $\|f-g\|_p=\varepsilon$ 并且 $\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p$ $=\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$，于是 $\delta_{L_p}(\varepsilon)\leqslant 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$，或者

$$\delta_{L_p}(\varepsilon)=1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}=\frac{1}{p}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p+o(\varepsilon^p).$$

对于 $1<p\leqslant 2$ 的情况，设 $-1\leqslant u\leqslant 1$, $0\leqslant v\leqslant 1$，首先

$$\frac{1}{2}(1+u)^p+\frac{1}{2}(1-u)^p$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{p}{2k}u^{2k}\geqslant 1+\frac{p(p-1)}{2}u^2.$$

又由于函数 $\varphi(p)=\frac{1}{p}(1-v^p)$ 的递减性知道

$$\frac{1}{p}(1-v)^p\geqslant\frac{1}{2}(1-v)^2.$$

两式合起来得到

$$\frac{1}{2}(1+u)^p+\frac{1}{2}(1-u)^p-v^p\geqslant\frac{p(p-1)}{2}w^2 \quad (1.12)$$

其中 $w^2=u^2-v^2+1$.

现在若 $f,g\in L_p$，令

$$u(\omega)=\frac{|f(\omega)|-|g(\omega)|}{|f(\omega)|+|g(\omega)|},$$

$$v(\omega)=\frac{|f(\omega)+g(\omega)|}{|f(\omega)|+|g(\omega)|},$$

（设 $|f(\omega)|+|g(\omega)|>0$，否则 $u(\omega)=v(\omega)=1$），则

$$w^2(\omega)=\frac{2|f(\omega)|^2+2|g(\omega)|^2-|f(\omega)+g(\omega)|^2}{(|f(\omega)|+|g(\omega)|)^2}$$

$$\geqslant\frac{|f(\omega)-g(\omega)|^2}{(|f(\omega)+|g(\omega)|)^2}$$

代入 (1.12)得到

$$[\frac{1}{2}(|f|+|g|)]^{2-p}[\frac{1}{2}(|f|^p+|g|^p)-|\frac{f+g}{2}|^p]$$

$$\geqslant\frac{p(p-1)}{8}|f-g|^2,$$

或者

$$[\frac{1}{2}(|f|+|g|)]^{\frac{p(2-p)}{2}}[\frac{1}{2}(|f|^p+|g|^p)-|\frac{f+g}{2}|^p]^{\frac{p}{2}}$$

$$\geqslant(\frac{p(p-1)}{8})^{\frac{p}{2}}|f-g|^p.$$

积分并利用 Hölder 不等式得到

$$(\frac{p(p-1)}{8})^{\frac{p}{2}}\|f-g\|_p^p$$

$$\leqslant\{E[\frac{1}{2}(|f|+|g|]^p\}^{\frac{2-p}{2}}\{E\frac{1}{2}(|f|^p+|g|^p$$

$$-|\frac{f+g}{2}|^p]\}^{\frac{p}{2}}$$

$$=\|\frac{1}{2}(|f|+|g|)\|_p^{\frac{p(2-p)}{2}}(\frac{1}{2}(\|f\|_p^p+\|g\|_p^p)$$

$$-\|\frac{f+g}{2}\|_p^p)^{\frac{p}{2}},$$

或者 $\frac{p(p-1)}{8}\|f-g\|_p^2\leqslant\|\frac{1}{2}(|f|+|g|)\|_p^{2-p}(\frac{1}{2}(\|f\|_p^p+$

$$\|g\|_p^p)-\|\frac{f+g}{2}\|_p^p).$$

若 $\|f\|_p=\|g\|_p=1$，$\|f-g\|_p=\varepsilon$ 则

$$\frac{p(p-1)}{8}\varepsilon^2 \leqslant 1 - \| \frac{f+g}{2} \|_p^p,$$

$$1 - \| \frac{f+g}{2} \|_p \geqslant 1 - (1 - \frac{p(p-1)}{8}\varepsilon^2)^{1/p},$$

$$\delta_X(\varepsilon) \geqslant 1 - (1 - \frac{p(p-1)}{8}\varepsilon^2)^{1/p} = \frac{p-1}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

当 $\Omega=[0,1]$时,取 $f(t)\equiv 1$, $g(t)=(1+\varepsilon)\chi_{[0,\frac{1}{2}]}+(1-\varepsilon)\chi_{(\frac{1}{2},1]}$,这里 $\varepsilon>0$ 满足 $(1-\varepsilon)^p+(1-\varepsilon)^p=2$, 从而可得出

$$\| \frac{f+g}{2} \|_p^p = 1 - \frac{p(p-1)}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3)$$

于是

$$\delta_X(\varepsilon) \leqslant 1 - (1 - \frac{p(p-1)}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3))^{1/p}$$

$$= \frac{p-1}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

定理 6 设 X、Y 是 Banach 空间,Y 在 X 中有限可表现.

(i) 若 X 一致凸,则 Y 一致凸. 此时对于任何 $o<\alpha<1$,

$$\delta_Y(\varepsilon) \geqslant \delta_X(\alpha\varepsilon), \ (0<\varepsilon<2) \tag{1.13}$$

(ii) 若 X 一致光滑,则 Y 一致光滑,此时对于任何 $o<\alpha<1$,

$$\rho_Y(\tau)\leqslant\rho_X(\alpha\tau), \ (\tau>0) \tag{1.14}$$

证明 1° 设 $x,y\in Y$, $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$,对于 $\eta>0$, 设 T 是从 X 的 2 维子空间到由 x,y 张成的 Y 的 2 维子空间的同构映射, $\|T^{-1}\|\leqslant 1$, $\|T\|\leqslant 1+\eta$,记 $x'=Tx$, $y'=Ty$, $x',y'\in X$,则

$$\|x'\| \leqslant 1+\eta, \qquad \|y'\| \leqslant 1+\eta,$$

$$\|x'-y'\| = \|T(x-y)\| \geqslant \|x-y\| \geqslant \varepsilon,$$

由 X 的一致凸性

$$\| \frac{1}{2}(\frac{x'}{1+\eta} + \frac{y'}{1+\eta}) \| \leqslant 1 - \delta_X(\frac{\varepsilon}{1+\eta}),$$

或 $\| \frac{x'+y'}{2} \| \leqslant (1+\eta)(1-\delta_X(\frac{\varepsilon}{1+\eta}))$, 于是

$$\| \frac{x+y}{2} \| \leqslant \| \frac{x'+y'}{2} \| \leqslant (1+\eta)(1-\delta_X(\frac{\varepsilon}{1+\eta})).$$

对于任何 $0<\alpha<1$，由于 η 可任意小（适当选择同构映射 T），$\delta_X(\varepsilon)$是递增的，故可得到

$$\delta_Y(\varepsilon) \geqslant \delta_X(\alpha\varepsilon).$$

从而(i)得到证明.

2° 取 $x,y\in Y$，$\|x\|=\|y\|=1$，仍考虑 1°中的映射 T，则

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|) \\ &\quad \leqslant \frac{1}{2}(\|x'+\tau y'\| + \|x'-\tau y'\|) \\ &\quad \leqslant (1+\eta)(1+\rho_X(\frac{\tau}{1+\eta})) \end{aligned}$$

从而

$$\frac{1}{2}(\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|) - 1 \leqslant (1+\eta)\rho_X(\frac{\tau}{1+\eta}) + \eta.$$

关于如此的 x,y 取上确界，η 是任意的，最后得到

$$\rho_Y(\tau) \leqslant \rho_X(\alpha\tau) \qquad 0<\alpha<1.$$

(ii) 得到证明.

定义 2 称 Banach 空间 X 是 p 一致光滑的，若存在 $c>0$，使得

$$\rho_X(\tau) \leqslant c\tau^p \quad (\tau>0). \tag{1.15}$$

称 X 是 q 一致凸的，若存在 $c>0$ 使得

$$\delta_X(\varepsilon) \geqslant c\varepsilon^q \qquad (0\leqslant\varepsilon\leqslant 2). \tag{1.16}$$

称 X 是 p 一致可光滑的(q 一致可凸的)，若存在等价范数使之成为 p 一致光滑(q 一致凸的). 为简便起见，有时称 p 一致光滑为 p 光滑，q 一致凸为 q 凸，同样地，有 p 可光滑和 q 可凸的说法.

定理 7 对于任何 Banach 空间 X，其光滑性定义中的指数 p 不可能大于 2，凸性定义中指数 q 不可能小于 2.

证明 设有 $0<q<2$ 和 $c>0$ 使得

$$\delta_X(\varepsilon) \geqslant c\varepsilon^q, \quad (0 < \varepsilon < 2).$$

注意由 Dvoretzky 定理，l_2 在任一 Banach 空间中有限可表现，根据例 1 中计算出的结果 $\delta_{l^2}(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon^2}{8}+o(\varepsilon^2)$，故

$$\delta_{l^2}(\varepsilon) \geqslant \delta_X(\alpha\varepsilon) \geqslant c\alpha^q\varepsilon^q, \quad 0 < \alpha < 1, 0 < \varepsilon < 2.$$

由 $\dfrac{\varepsilon^2}{8}+o(\varepsilon^2)\geqslant c\alpha^q\varepsilon^q$ 或 $\dfrac{\varepsilon^{2-q}}{8}+o(\varepsilon^{2-q})\geqslant c\alpha^q$，$\varepsilon$ 可任意小，容易得出 $c=0$，矛盾.

同样地，若有 $2<p<\infty$ 和 $c>0$ 使得

$$\rho_X(\tau) \leqslant c\tau^p,$$

由于 $\rho_{l_2}(\tau)=\dfrac{1}{2}\tau^2+o(\tau^2)$，$\rho_{l_2}(\tau)\leqslant\rho_X(\tau)$，容易得出 $c=0$.

定理 8 Banach 空间 X 是 q 一致凸的当且仅当 X^* 是 p 一致光滑的，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$2\leqslant q<\infty$.

证明 1° 设 $2\leqslant q<\infty$，$c>0$，$\delta_X(\varepsilon)\geqslant c\varepsilon^q$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant 2$. 我们有

$$\rho_{X^*}(\tau) = \sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 2}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_X(\varepsilon)\right) \leqslant \sup_{0\leqslant\varepsilon\leqslant 2}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - c\varepsilon^q\right).$$

$\varphi(\varepsilon)=\dfrac{\tau\varepsilon}{2}-c\varepsilon^q$ 是凹函数，其极大值在 $\left(\dfrac{\tau}{2cq}\right)^{\frac{1}{q-1}}$ 达到，极大值为

$$\frac{\tau}{2}\left(\frac{\tau}{2cp}\right)^{\frac{1}{p-1}} - c\left(\frac{\tau}{2cp}\right)^{p/p-1} \sim c'\tau^{\frac{q}{q-1}} = c'\tau^p.$$

c' 为常数，于是得到 $\rho_{X^*}(\tau)\leqslant c'\tau^p \quad (\tau>0)$.

2° 若 $1<p\leqslant 2$，$c>0$，$\rho_{X^*}(\tau)\leqslant c\tau^p$，应用

$$\delta_X(\varepsilon) = \sup_{\tau>0}\left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - \rho_{X^*}(\tau)\right),$$

类似于上面的讨论可得到相应结论.

定理 9 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant 2\leqslant q<\infty$.

(i) X 是 p 光滑的当且仅当存在 $K>0$，使得对任何 $x,y\in X$，

$$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\leqslant 2\|x\|^p+K\|y\|^p. \tag{1.17}$$

(ii) X 是 q 凸的当且仅当存在 $K>0$，使得对于任何 $x,y\in X$，

$$\|x+y\|^q+\|x-y\|^q\geqslant 2\|x\|^q+K\|y\|^q. \tag{1.18}$$

证明 1° 充分性 若(1.16)成立，取 $x,y\in X$, $\|x\|=1$, $\|y\|=\tau$，则

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)-1\leqslant\frac{K}{2}\tau^p$$

由于 $\|\frac{x+y}{2}\|+\|\frac{x-y}{2}\|\geqslant\|\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)\|=1.$

根据 $\varphi(t)=t^p$ 的凸函数性质

$$\begin{aligned}\rho_X(\tau)&=\sup\{(\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2})-1\}\\&\leqslant\sup\{(\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2})^p-1\}\\&\leqslant\sup\{\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)-1\}\\&\leqslant\frac{K}{2}\tau^p.\end{aligned}$$

必要性 这里将用到实值不等式

$$u^p-v^p\leqslant pu^{p-1}(u-v),\qquad u,v\geqslant 0,\tag{1.19}$$

$$\frac{1}{2}|u+v|^p+\frac{1}{2}|u-v|^p\leqslant|u|^p+|v|^p,\ u,v\in R\tag{1.20}$$

它们是容易验证的.

现在，若 $c>0,\rho_X(\tau)\leqslant c\tau^p(\tau>0)$，则对于 $\forall\ x,y\in X$, $\|x\|=1$, $\|y\|=\tau$,

$$\|\frac{x+y}{2}\|+\|\frac{x-y}{2}\|-1\leqslant c\|y\|^p.$$

由于范数的齐性，上式可写成对于 $\forall\ x,y\in X(x\neq 0)$

$$\|\frac{x+y}{2}\|+\|\frac{x-y}{2}\|\leqslant\|x\|(1+c(\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}))$$

或 $\frac{1}{2}(\|x+y\|-(\|x\|+\|y\|)+\|x-y\|$

$$-(\|x\|-\|y\|))\leqslant\|x\|\frac{C\|y\|^p}{\|x\|^p}\tag{1.21}$$

若 $\|y\|\leqslant\|x\|$，则 $\|x+y\|\leqslant 2\|x\|$，应用(1.19)，第一次令 $u=\|x+y\|$, $v=\|x\|+\|y\|$；第二次令 $u=\|x-y\|$,

$v=\|x\|-\|y\|$;则

$$\frac{1}{2}\|x+y\|^p-\frac{1}{2}(\|x\|+\|y\|)^p$$

$$\leqslant\frac{p}{2}\|x+y\|^{p-1}(\|x+y\|-(\|x\|+\|y\|)),$$

$$\frac{1}{2}\|x-y\|^p-\frac{1}{2}(\|x\|-\|y\|)^p$$

$$\leqslant\frac{p}{2}\|x-y\|^{p-1}(\|x-y\|-(\|x\|-\|y\|)),$$

两式相加再应用(1.21)得到

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[(\|x\|+\|y\|)^p+(\|x\|-\|y\|)^p]$$

$$+p(2\|x\|)^{p-1}2\|x\|c\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}$$

再由(1.20)

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)$$

$$\leqslant\|x\|^p+\|y\|^p+p2^pc\|y\|^p$$

$$=\|x\|^p+(1+p2^pc)\|y\|^p$$

若$\|y\|\geqslant\|x\|$,则直接由$\|x\pm y\|\leqslant2\|y\|$ 得到

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)$$

$$\leqslant\|2y\|^p\leqslant\|x\|^p+2^p\|y\|^p$$

于是必有 $K>0$ 使 (1.17) 成立.

2° 现证 (ii). 充分性 若(1.18) 成立,对于$\forall\ u,v\in X$,考虑向量 $x=\|u\|v+\|v\|u$, $y=\|u\|v-\|v\|u$, 代入(1.18)得到

$$2(2\|u\|\ \|v\|)^q$$

$$\geqslant2\|\ \|u\|v+\|v\|u\|^q+K\|\ \|u\|v-\|v\|u\|^q$$

若$\|u\|=\|v\|=1$, $\|u-v\|=\varepsilon$,则得到

$$2^{q-1} \geqslant 2\|u+v\|^q + K\varepsilon^q,$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^q \leqslant 1 - \frac{K}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q.$$

由不等式 $1-\alpha^q \leqslant q(1-\alpha)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ 得到

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right\}$$

$$\geqslant \frac{1}{q}\inf\left\{1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^q\right\} = \frac{K\varepsilon^q}{2^{q+1}q}.$$

必要性　若 $c>0$，$\delta_X(\varepsilon)\geqslant c\varepsilon^q$，由定理 8，存在 $c'>0$ 使得

$$\rho_{X^*}(\tau) \leqslant c'\tau^p$$

于是由上面 1°的证明，对于$\forall\ x^*,y^*\in X^*$，有 $K>0$ 使得

$$\|x^*+y^*\|^p + \|x^*-y^*\|^p \leqslant 2\|x^*\|^p + K\|y^*\|^p$$

令 $K=2\tau^p$并且用 y^*代替 τy^*，则得到

$$\|x^*+\tau^{-1}y^*\|^p + \|x^*-\tau^{-1}y^*\|^p \leqslant 2\|x^*\|^p + \|y^*\|^p \tag{1.22}$$

x^*,y^*仍是任意的，现在对于$\forall\ x,y\in X$，取 $x^*,y^*\in X^*$. 使得

$$\|x^*\|^2+\|y^*\|^2=1$$

$$x^*(x+y)+\tau^{-1}y^*(x-y)=(\|x+y\|^q+\|x-y\|^q)^{1/q}$$

这是可能的，例如先取 $\bar{x}^*,\bar{y}^*\in X^*$ 使得

$$\|\bar{x}^*\| = \|\bar{y}^*\| = 1,$$

$$\bar{x}^*(x+y) = \|x+y\|,\ \bar{y}^*(x-y) = \|x-y\|.$$

再令　$x^*=\alpha\bar{x}^*,y^*=\beta\bar{y}^*$，　则问题变为解

$$\begin{cases}\alpha^2+\beta^2=1\\ \alpha\|x+y\|+\beta\tau^{-1}\|x-y\|=(\|x+y\|^q+\|x-y\|^q)^{1/q}.\end{cases}$$

α,β总是存在的. 现在

$$\|x+y\|^q + \|x-y\|^q = |x^*(x+y)+\tau^{-1}y^*(x-y)|^q$$

$$\leqslant (\|x^*+\tau^{-1}y^*\|\,\|x\| + \|x^*-\tau^{-1}y^*\|\,\|y\|)^q$$

$$\leqslant (\|x^*+\tau^{-1}y^*\|^p + \|x^*-\tau^{-1}y^*\|^p)^{q/p}$$

$$\cdot(\|x\|^q+\|y\|^q)$$

$$\leqslant [2(\|x^*\|^p+\|y^*\|^p)]^{q/p}(\|x\|^q+\|y\|^q)$$

$$= 2^{q/p}(\|x\|^q + \|y\|^q)$$

于是 $\|x\|^q+\|y\|^q \geqslant (\|x+y\|^q+\|x-y\|^q)2^{-q/p}$，用 $x+y$ 替换 x，$x-y$ 替换 y 即得到

$$\|x+y\|^q + \|x-y\|^q \geqslant (\|2x\|^q + \|2y\|^q)2^{-q/p}$$

$$= 2^{-q/p}(\|x\|^q + \|y\|^q).$$

定理 10 设 $1<p\leqslant 2\leqslant q<\infty$，则 p 可光滑空间是 Rademacher p 型空间，q 可凸空间是 Rademacher q 余型空间.

证明 若 X 是 p 可光滑的，则对于 $\forall\, x_1,\cdots,x_n\in X$，考虑积分

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i \right\|^p dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\left\| \sum_{i=1}^{n-1} r_i(t)x_i + x_n \right\|^p + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} r_i(t)x_i - x_n \right\|^p \right) dt,$$

其中 $r_i(t)$ 是 Rademacher 函数序列，由定理 9 中的不等式

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i \right\|^p dt \leqslant \int_0^1 \left(\left\| \sum_{i=1}^{n-1} r_i(t)x_i \right\|^p + \frac{K}{2}\|x_n\|^p \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n-1} r_i(t)x_i \right\|^p dt + \frac{K}{2}\|x_n\|^p,$$

连续应用此方法，最后得到

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i \right\|^p dt \leqslant \frac{K}{2}\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p.$$

X 是 p 型的. 对于 p 可光滑空间，换为等价范数，结论仍成立.

对于 q 可凸空间可完全类似地予以证明.

在第 V 章中已经指出，一个 2 型空间可以不是自反的，因此 p 型空间可以不是 p 光滑的. 同样，q 余型空间可以不是 q 凸的.

§2 超自反空间与重赋范定理

让我们继续讨论 p 光滑空间和 q 凸空间，我们将首先给出由条件期望和鞅确定的某些特征性质.

定理 1 (Assouad) 设 X 是 Banach 空间，(Ω,Σ,P) 是概率

空间，则

(i) X 是 p 光滑的 $(1<p\leqslant 2)$ 当且仅当存在常数 $c>0$ 使得对于 $L_p(\mu,X)$ 中任何两函数 g_1,g_2，其中 g_i 关于 σ 代数 Σ_i 可测，$\Sigma_1\subset\Sigma_2\subset\Sigma$ 并且 $E(g_2|\Sigma_1)=g_1$，则

$$E(\|g_2\|^p-\|g_1\|^p|\Sigma_1)\leqslant cE(\|g_2-g_1\|^p|\Sigma_1)\quad(2.1)$$

(ii) X 是 q 凸的 $(2\leqslant q<\infty)$ 当且仅当存在常数 $c>0$，使得对于如上的任意函数 g_1,g_2 有

$$E(\|g_2\|^q-\|g_1\|^q|\Sigma_1)\geqslant cE(\|g_2-g_1\|^q|\Sigma_1)\quad(2.2)$$

证明 1° 设 X 是 p 光滑的，则 $\exists\ K>0$ 使得 $\exists\ x,y\in X$，

$$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\leqslant 2\|x\|^p+K\|y\|^p\quad(2.3)$$

由于 $2g_1-E(g_2|\Sigma_1)=g_1$，由 Jensen 不等式得到

$$\|g_1\|^p=\|2g_1-E(g_2|\Sigma_1)\|^p\leqslant E(\|2g_1-g_2\|^p|\Sigma_1)$$

应用此式，将 $x=g_1,y=g_2-g_1$ 代入(2.3) 并且关于 Σ_1 取条件期望得到

$$\begin{aligned}E(\|g_2\|^p+\|g_1\|^p|\Sigma_1)&\leqslant E(\|g_2\|^p+\|2g_1-g_2\|^p|\Sigma_1)\\&\leqslant 2E(\|g_1\|^p|\Sigma_1)+KE(\|g_2-g_1\|^p|\Sigma_1)\end{aligned}$$

此即(i).

反之，若(i)成立，对于 $x,y\in X$，令 $g_1=x,g_2=x+\varepsilon y$，其中 ε 是任一 Bernoulli 随机变量，$P(\varepsilon=\pm 1)=1/2$，则 $E(g_2|\Sigma_1)=g_1$，其中 $\Sigma_1=\sigma(\{\varepsilon=1\},\{\varepsilon=-1\})$代入(i)并对两端取期望得

$$E(\|x+\varepsilon y\|^p-\|x\|^p)\leqslant c\|y\|^p,\quad(2.4)$$

此即(2.3)，X 是 p 光滑空间.

2° (ii) 可借助于 q 凸空间的不等式(1.8)类似地证明.

今后我们将简单地记每个鞅为 $f=(f_n)$，记 $df=(df_n)$ 为 f 的鞅差，即 $df_n=f_n-f_{n-1}(n\geqslant 0)$，记 $f_{-1}=0,\mathscr{B}_{-1}=\{\varnothing,\Omega\}$.

定理 2 (Pisier) 设 X 是 Banach 空间，则

(i) X 是 p 光滑空间 $(1<p\leqslant 2)$ 当且仅当存在 $c>0$ 使得对于每个 $L_p(\mu,X)$鞅 $f=(f_n)$ 成立

$$\sup_{n\geq 0} E\|f_n\|^p \leq E\|f_0\|^p + c\sum_{n=1}^{\infty} E\|df_n\|^p \tag{2.5}$$

(ii) X 是 q 凸空间 $(2\leqslant q<\infty)$ 当且仅当存在 $c>0$ 使得对于每个 $L_q(\mu,X)$ 鞅 $f=(f_n)$ 成立

$$\sup_{n\geq 0} E\|f_n\|^q \geq E\|f_0\|^q + c\sum_{n=1}^{\infty} E\|df_n\|^q \tag{2.6}$$

证明 对于鞅 $f=(f_n)$，以 $g_2=f_n, g_1=f_{n-1}$，则

$E(\|f_n\|^p - \|f_{n-1}\|^p|\Sigma_{n-1}) \leqslant KE(\|f_n - f_{n-1}\|^p|\Sigma_{n-1})$

(p 光滑情况)或者

$E(\|f_n\|^q - \|f_{n-1}\|^q|\Sigma_{n-1}) \geqslant KE(\|f_n - f_{n-1}\|^q|\Sigma_{n-1})$

(q 凸情况)，先取期望再相加即得到(5)或(6)，反过来是显然的.

称 $f=(f_n)$ 是 Walsh-Paley 鞅，若 $(\Omega\ \Sigma,P)$ 是 $[0,1)$ 上的 Lebesgue 测度，$\mathscr{B}_n$ 是由二进制区间 $\{[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}),1\leqslant i\leqslant 2^n\}$ 生成的 σ 代数，并且 $P(df_{n+1}=\pm x)=\frac{1}{2^{n+1}}$，$x$ 随 n,i 不同而改变. WP 鞅是一种特殊的鞅，自然对于它们 (5)，(6)成立. 另一方面，定理 1 的充分性证明中所举出的 x 与 $x+\varepsilon y$ 恰是一个 WP 鞅的最前面两项，因此我们有

定理 3 (Pisier) 设 X 是 Banach 空间，则

(i) X 是 p 光滑空间 $(1<p\leqslant 2)$ 当且仅当存在 $c>0$ 使得每个 X 值 WP 鞅满足(5)式.

(ii) X 是 q 凸空间 $(2\leqslant q<\infty)$ 当且仅当存在 $c>0$ 使得每个 X 值 WP 鞅满足(6)式.

注意(5)，(6)两式在空间 X 的等价范数之下不能保持，对于 p 可光滑或 q 凸情况，下面的不等式成立.

定理 4 (Pisier) 设 X 是 Banach 空间，则

(i) X 是 p 可光滑的 $(1<p\leqslant 2)$ 当且仅当存在 $c>0$ 使得对于任何 X 值鞅 $f=(f_n)$，

$$\sup_{n\geqslant 0} E\|f_n\|^p \leqslant c\sum_{n=0}^{\infty} E\|df_n\|^p \tag{2.7}$$

(ii) X 是 q 可凸的($2\leqslant q<\infty$)当且仅当存在 $c>0$ 使得对于任何 X 值鞅 $f=(f_n)$

$$c\sup_{n\geqslant 0} E\|f_n\|^q \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} E\|df_n\|^q \tag{2.8}$$

上述鞅换为 WP 鞅其结论仍成立.

证明 1° 设 X 的范数是 $\|\cdot\|$,在等价范数 $|\cdot|$ 之下成为 p 光滑的,则(2.5)变为

$$\begin{aligned}\sup_{n\geqslant 0} E|f_n|^p &\leqslant E|f_0|^p + c\sum_{n=1}^{\infty} E|df_n|^p \\ &\leqslant (c \vee 1)(E|f_0|^p + \sum_{n=1}^{\infty} E|df_n|^p) \\ &= (c \vee 1)\sum_{n=0}^{\infty} E|df_n|^p\end{aligned}$$

若 $a\|x\|\leqslant|x|\leqslant b\|x\|$,$\forall\ x\in X$,则

$$a^p\sup_{n\geqslant 0} E\|f_n\|^p \leqslant (c \vee 1)b^p(\sum_{n=1}^{\infty} E\|df_n\|^p)$$

以 $c'=(c\vee 1)a^{-p}b^p$ 作为(2.7) 中的 c,(2.7) 成立. 同样地,以 $c''=(c\wedge 1)^{-1}a^{-p}b^p$ 作为(2.8) 中的 c,(2.8)成立.

2° 我们现在证明 (2.8) 对于 X 的 q 可凸性是充分的,至于(2.7)对于 p 光滑性的充分性可类似证明.

为此仅考虑 WP 鞅. 记

$M(x)=\{f=(f_n),f$ 是 $L_q(\mu,X)$有界 WP 鞅,$f_0=x\}$,

并且令

$$|x|=\inf\{(c\sup_{n\geqslant 0} E\|f_n\|^q-\sum_{n=1}^{\infty} E\|df_n\|^q)^{1/q},f\in M(x)\}$$

显然 $|x|\geqslant 0$,并且由于 $M(\alpha x)=\alpha M(x)$,后者的意义是用 α 乘以 $M(x)$中的每个元,于是$|\alpha x|=|\alpha||x|$,又由$|x|$的定义知道

$$\|x\| \leqslant |x| \leqslant c^{1/q}\|x\|.$$

右边的不等式通过取 $f_0=x, df_n=0\ (n\geqslant 1)$ 得到，左边的不等式是因为(2.8)的右端可以写成

$$\|x\|^q=\|f_0\|^q=E\|df_0\|^q$$

$$\leqslant c\sup_{n\geqslant 0}E\|f_n\|^q-\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^q.$$

代替验证关于 $|\cdot|$ 的三角不等式，我们将验证 $\{x, |x|\leqslant 1\}$ 是凸集，而这一点只要证明

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^q+c^{-1/q}\left|\frac{x-y}{2}\right|^q\leqslant\frac{1}{2}(|x|^q+|y|^q), \forall\ x,y\in X.$$

就行了，这个不等式还说明 $(X,|\cdot|)$ 是 q 一致凸空间.

对于 $\forall\ \delta>0$，取 $f=(f_n)\in M(x), g=(g_n)\in M(y)$ 使得

$$f_0=x,\quad \sup_{n\geqslant 0}E\|f_n\|^q<\infty,$$

$$c\sup_{n\geqslant 0}E\|f_n\|^q-\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^q\leqslant|x|^q+\delta.$$

$$g_0=y,\quad \sup_{n\geqslant 0}E\|g_n\|^q<\infty,$$

$$c\sup_{n\geqslant 0}E\|g_n\|^q-\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^q\leqslant|y|^q+\delta$$

f, g 都是 WP 鞅. 取 ε_1 是 Bernoulli 随机变量，令 $h=(h_n)$ 是鞅，

$$h_0=\frac{x+y}{2},\ h_n=\frac{1+\varepsilon_1}{2}f_{n-1}+\frac{1-\varepsilon_1}{2}g_{n-1},\ (n\geqslant 1) \tag{2.9}$$

显然有 $\sup_n\|h_n\|^q<\infty$，h_n 是 WP 鞅，$h\in M(\frac{x+y}{2})$. 于是利用函数 $\varphi(t)=t^q$ 的凸性，

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^q\leqslant c\sup_{n\geqslant 0}E\|h_n\|^q-\sum_{n=1}^{\infty}E\|dh_n\|^q$$

$$\leqslant\frac{c}{2}\sup_{n\geqslant 0}E(\|f_n\|^q+\|g_n\|^q)-\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}E(\|df_n\|^q+\|dg_n\|^q)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(|x|^q + |y|^q) - \| \frac{x-y}{2} \|^q + 2\delta$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(|x|^q + |y|^q) - c^{-1/q} | \frac{x-y}{2} |^q + 2\delta$$

δ 是任意的，故得

$$| \frac{x+y}{2} |^q + c^{-1/q} | \frac{x-y}{2} |^q \leqslant \frac{1}{2}(|x|^q + |y|^q)$$

以 $x+y$ 代替 x，$x-y$ 代替 y 即得到

$$| \frac{x+y}{2} |^q + | \frac{x-y}{2} |^q \geqslant 2|x|^q + c^{-1/q}|y|^q \qquad (2.10)$$

注意，一致凸空间一定是超自反空间. 实际上由 §1 定理 6 知道，一致凸性质是超性质：若 X 是一致凸的，则每个在 X 中有限可表现的空间是一致凸的从而是自反的，所以 X 是超自反的.

例 超自反空间不必是一致凸的.

在 §1 例 2 中定义的空间 $(l^2, \| \cdot \|)$ 有一个等价范数使之成为 $(l^2, \| \cdot \|_2)$. 由于自反性是同构不变的，从而超自反性也是同构不变的. 因此 $(l^2, \| \cdot \|)$ 是超自反空间，但它不严格凸.

尽管有上述反例，但一个十分深刻的结论是超自反空间容许有等价范数使之成为一致凸空间，这一结论被称为重赋范定理，它首先是由 Enflo 证明的. 它的鞅方法的证明是由 Pisier 给出的. 为证明重赋范定理，还需要两个基本的事实，它们的证明将留在本章最后一节(§4)中去进行：

(Ⅰ) X 是超自反的当且仅当 $L_2(\mu, X)$ 是超自反的，其中 (Ω, Σ, μ) 是非平凡的有限测度空间. (§4 推论 3).

(Ⅱ) 若 X 是超自反的，则存在 $c>0$ 和 $q>2$ 使得对于 X 的每个单调基序列 $\{x_n\}$ 和实数列 $\{a_n\}$，

$$(\Sigma |a_n|^q)^q \leqslant c \| \Sigma a_n x_n \| . \qquad (2.11)$$

(§4 推论 4).

定理 5 设 X 是超自反空间，则存在 $q \geqslant 2$ 和 $c>0$ 以及 X 上的等价范数，使得在此范数下，$\delta_X(\epsilon) \geqslant c\epsilon^q \quad (0 \leqslant \epsilon \leqslant 2)$.

证明 设 X 是超自反空间，仍以 $M(x)$ 记以 x 为起点的 $L_2(\mu,X)$ 有界 WP 鞅全体，即 $x=f_0=Ef_n$. 由上述基本事实（Ⅰ），$L_2(\mu,X)$ 是超自反空间，由于 $L_2(\mu,X)$ 中的每个鞅差可视为它的单调基，

$$\|\sum_{i=0}^{n} df_i\|_2 = \|f_n\|_2 \leqslant \|f_m\|_2 = \|\sum_{i=0}^{m} df_i\|_2$$

$m\geqslant n$. 由基本事实（Ⅱ）

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\|df_n\|_2^q\right)^{1/q} \leqslant c\|\sum_{i=0}^{n} df_i\|_2 \tag{2.12}$$

应用 Hölder 不等式（注意 $q\geqslant 2$）得到

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\|df_i\|_2^2\right)^{1/2} \leqslant (n+1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=0}^{n}\|df_i\|_2^q\right)^{1/q}$$

$$\leqslant c(n+1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\sum_{i=0}^{n} df_i\|_2 \tag{2.13}$$

记 $c_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2c}(n+1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$.

1° 对于每个 $f=(f_n)\in M(x)$，显然 f_n 是 $a.e.$ 和 $L_2(\mu,X)$ 收敛的，记其极限为 f_∞，令

$$|x|_n = \inf\{\|f_\infty\|_2^2 - c_n^2\sum_{i\in A}\|df_i\|_2^2, f\in M(x),$$
$$A\subset N, |A|=n\} \tag{2.14}$$

这里 N 是自然数集，$|A|$ 表示 A 中自然数的个数，关于 $|x|_n$ 有

(i) $|x|_n\leqslant\|x\|$，$\forall\ x\in X$. 取 $f_n\equiv x$，即得之.

(ii) 将(2.13) 应用于 $\sum_{i\in A}\|df_i\|_2^2$ 同样会得到

$$\left(\sum_{i\in A}\|df_i\|_2^2\right)^{1/2}\leqslant c(n+1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\sum_{i\in A} df_i\|_2^2$$

$$\leqslant c(n+1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\sum_{i\in A} df_i\|_2^2$$

$$\leqslant c(n+1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|f_\infty\|_2^2$$

后者是由于 $\{df_i, i\geqslant 1\}$ 是单调基序列，于是

$$\sum_{i\in A}\|df_i\|_2^2\leqslant\frac{3}{4c_n^2}\|f_\infty\|_2^2 \tag{2.15}$$

现在对于每个 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$，由 $|\cdot|_n$ 的定义，取 $f=(f_n)\in M(x)$ 和 $A\subset N$，$|A|=n$ 使得

$$|x|_n^2\geqslant\|f_\infty\|_2^2-c_n^2\sum_{i\in A}\|df_i\|_2^2-\varepsilon.$$

应用(2.15)得出

$$|x|_n^2\geqslant\frac{1}{4}\|f_\infty\|_2^2-\varepsilon. \tag{2.16}$$

由于 $x=Ef_\infty$，故 $\|x\|\leqslant E\|f_\infty\|\leqslant\|f_\infty\|_2$，代入上式得到

$$|x|_n^2\geqslant\frac{1}{4}\|x\|^2-\varepsilon.$$

ε 是任意的，得出 $|x|_n\geqslant\frac{1}{2}\|x\|$，总之

$$\frac{1}{2}\|x\|\leqslant|x|_n\leqslant\|x\| \tag{2.17}$$

2° 现证不等式

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_n^2\leqslant\frac{1}{2}(|x|_n^2+|y|_n^2) \tag{2.18}$$

对于 $x,y\in X$ 和 $\varepsilon>0$，取 $f=(f_n)\in M(x)$ 和 $g=(g_n)\in M(y)$ 使得

$$\begin{aligned}|x|_n^2&\geqslant\|f_\infty\|_2^2-c_n^2\sum_{i\in A}\|df_i\|_2^2-\varepsilon\\|y|_n^2&\geqslant\|g_\infty\|_2^2-c_n^2\sum_{i\in A'}\|dg_i\|_2^2-\varepsilon\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中 $|A|=|A'|=n$. 现在我们调整 A 与 A' 使之一致并且仍使(2.19)成立，做法是当 k_1 是 A 的第一个不在 A' 中的指标时，令

$$\tilde{g}_n=g_n,n\leqslant k_1-1;\ =g_{n-1},\ n\geqslant k_1.$$

显然 $\tilde{g}=(\tilde{g}_n)\in M(x)$，$\tilde{g}_\infty=g_\infty$ 并且

$$d\tilde{g}_n=dg_{n-1},\ n>k_1;\ =0,\ n=k_1;\ =dg_n,\ n<k_1.$$

于是

$$|y|_n^2=\|\tilde{g}_\infty\|_2^2-c_n^2\sum_{i\in\tilde{A}'}\|d\tilde{g}_i\|_2^2-\varepsilon,$$

这里$\widetilde{A}'$是包含k_1且$|\widetilde{A}'|=n$的指标集. 若k_2是下一个在A中而不在A'中(或反过来在A'中而不在A中)的指标,作类似的移动,经有限步之后,A与A'就成为同一集合. 仍记之为A.

现在定义$h=(h_n)\in M\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 使得

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_n^2 \leqslant \|h_\infty\|_2^2 - c_n^2\sum_{i\in A}\|dh_i\|_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(\|f_\infty\|_2^2 + \|g_\infty\|_2^2)$$

$$-\frac{1}{2}c_n^2\sum_{i\in A}\|df_i\|_2^2 + \|dg_i\|_2^2)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(|x|_n^2 + |y|_n^2) - \varepsilon$$

ε是任意的,故(2.18)成立.

3° 映射 $x\rightarrow|x|_n$在X上连续. 对于$\forall\ \varepsilon>0$,取$f=(f_n)\in M(x)$,使得

$$|x|_n^2 \geqslant \|f_\infty\|_2^2 - c_n^2\sum_{i\in A}\|df_i\|_2^2 - \varepsilon$$

若$u\in X$是任一元,容易知道$g=(f_n+u)\in M(x+u)$,并且$dg=(df_n)=df$,所以

$$|x+u|_n^2 \leqslant \|f_\infty + u\|_2^2 - c_n^2\sum_{i\in A}\|df_i\|_2^2$$

$$\leqslant \|f_\infty\|_2^2 + 2\|u\|\ \|f_\infty\|_1 + \|u\|^2 - c_n^2\sum_{i\in A}\|df_i\|_2^2$$

$$\leqslant |x|_n^2 + 2\|u\|\ \|f_\infty\|_1 + \|u\|^2 + \varepsilon.$$

但由(2.16),$\|f_\infty\|_1 \leqslant \|f_\infty\|_2 \leqslant (4|x|_n+\varepsilon)^{1/2}$,故

$$|x+u|_n^2 - |x|_n^2 \leqslant 4\|u\|\ \|x\| + 5\|u\|^2,$$

这说明

$$\left||x+u|_n^2 - |x|_n^2\right| \leqslant 4\|u\|\ \|x\| + 5\|u\|^2.$$

得到连续性.

4° $|x|_n$是X上的范数. 实际上由2°,当$|x|_n=|y|_n=1$时,

$\left|\frac{x+y}{2}\right|_n\leqslant 1$. 又由连续性$|\cdot|_n$是 X 上的凸函数. 容易知道 $|x|_n\geqslant 0$ ($\forall\ x\in X$) 和 $|\alpha x|_n=|\alpha||x|_n$,所以$|\cdot|_n$是 X 上范数.

5° 若 $f=(f_n)\in M(x), g=(g_n)\in M(y)$ 满足(2.19), $h=(h_n)\in M\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 仍如上面定义,则由(2.16)

$$c_n^2\sum_{i\in A}\|dh_n\|_2^2=\frac{1}{2}c_n^2\sum_{i\in A}(\|df_{i-1}\|_2^2+\|dg_{i-1}\|_2^2)$$
$$\leqslant\frac{3}{8}(\|f_\infty\|_2^2+\|g_\infty\|_2^2)\leqslant\frac{3}{2}(|x|_n^2+|y|_n^2+2\varepsilon)$$

或者

$$c_n^2\sum_{i\in A}\|dh_i\|_2^2\leqslant 3(1+\varepsilon),$$

从而必有 $2\leqslant j_0\leqslant n, c_n^2\|dh_{j_0}\|_2^2\leqslant\frac{3(1+\varepsilon)}{n}$, 注意 $\|dh_1\|=\left\|\frac{x-y}{2}\right\|$, 设 $c_n^2\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\geqslant 4/n$, 则 $\|dh_1\|_2^2\geqslant 4/nc_n^2$.

令 $B=((A\setminus\{j_0\})+1)\cup\{1\}$, 则 $|B|=n$ 并且有

$$c_n^2\sum_{i\in B}\|dh_i\|_2^2\geqslant c_n^2\sum_{i\in A}\|dh_{i+1}\|_2^2-\frac{3(1+\varepsilon)}{n}+\frac{4}{n}$$
$$\geqslant c_n^2\sum_{i\in A}\|dh_{i+1}\|_2^2+\frac{1-3\varepsilon}{n}$$

最后得到

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_n^2\leqslant\|h_\infty\|_2^2-c_n^2\sum_{i\in B}\|dh_i\|_2^2$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(\|f_\infty\|_2^2+\|g_\infty\|_2^2)$$
$$-c_n^2\sum_{i\in A}\|dh_{i+1}\|_2^2-\frac{1-3\varepsilon}{n}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(\|f_\infty\|_2^2+\|g_\infty\|_2^2)$$
$$-c_n^2\sum_{i\in A}\frac{1}{2}(\|df_i\|_2^2+\|dg_i\|_2^2-\frac{1-3\varepsilon}{n}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(|x|_n^2 + |y|_n^2 + 2\varepsilon) - \frac{1-3\varepsilon}{n}$$

ε 是任意的，故当 $|x|_n^2+|y|_n^2=2$，$c_n^2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\geqslant 4/n$ 时 $\left|\frac{x+y}{2}\right|_n^2 \leqslant 1-\frac{1}{n}$. 换句话说，$\frac{\|x-y\|}{\left[\frac{1}{2}(|x|_n^2+|y|_n^2)\right]^{1/2}}\geqslant\frac{4}{\sqrt{n}\,c_n}$ 时

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_n^2 \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}(|x|_n^2+|y|_n^2) \tag{2.20}$$

以上事实对于每个 n 都成立，于是得到可列个范数 $|\cdot|_n$，注意 $\frac{4}{\sqrt{n}\,c_n}\sim \alpha n^{-1/q}$，故不妨设

$$\begin{gathered}\frac{\|x-y\|}{\left[\frac{1}{2}(|x|_n^2+|y|_n^2)\right]^{1/2}}\geqslant \alpha n^{-1/q} \text{ 时，}\\ \left|\frac{x+y}{2}\right|_n^2 \leqslant \left(1-\frac{\beta}{n}\right)\frac{(|x|_n^2+|y|_n^2)}{2}.\end{gathered} \tag{2.21}$$

6° 令

$$|x| = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}|x|_{2^n}^2,\ \forall\, x\in X \tag{2.22}$$

$|\cdot|$ 也是 X 上的范数 并且也有

$$\frac{1}{2}\|x\| \leqslant |x| \leqslant \|x\|,\ \forall\, x\in X \tag{2.23}$$

我们证明对某个 $q'>q$，$(x,|\cdot|)$ 是 q' 凸的.

设 $x,y\in X$，$|x|^2+|y|^2=2$，$|x-y|\geqslant\varepsilon$，此时 由(2.23) $\|x-y\|\geqslant\varepsilon$. 对于所有 n，

$$\frac{1}{2}(|x|_n^2+|y|_n^2)\leqslant\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)\leqslant 2(|x|^2+|y|^2)=4$$

故有

$$\frac{\|x-y\|}{\left(\frac{1}{2}(|x|_n^2+|y|_n^2)\right)^{1/2}}\geqslant \varepsilon/2.$$

取 $n=2^k$，其中 k 是使 $\alpha 2^{-k/q}\leqslant\varepsilon/2$，或 $\geqslant q\log_2(\frac{2\alpha}{\varepsilon})$ 的最小自然数，则

$$\frac{\| x-y\|}{\left(\frac{1}{2}(|x|_{2^k}^2+|y|_{2^k}^2)\right)^{1/2}}\geqslant \alpha 2^{-k/q}.$$

于是由(2.20)

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_{2^k}^2\leqslant\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\frac{1}{2}(|x|_{2^k}^2+|y|_{2^k}^2)$$

再由(2.22)

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+y}{2}\right|^2 &\leqslant \frac{6}{\pi^2}\sum_{n\neq k}\frac{1}{2n^2}(|x|_{2^n}^2+|y|_{2^n}^2)\\ &\quad+\frac{6}{\pi^2}\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\frac{|x|_{2^k}^2+|y|_{2^k}^2}{2}\\ &\leqslant\frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2)-\frac{6\beta}{k^2\pi^2 2^k}\frac{1}{2}(|x|_{2^k}^2+|y|_{2^k}^2)\end{aligned}$$

由(2.17) 和(2.22)有 $|x|_{2^k}^2+|y|_{2^k}^2\geqslant\frac{1}{4}(|x|^2+|y|^2)$，故得出

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+y}{2}\right|^2 &\leqslant\frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2)-\frac{6\beta}{k^2\pi^2 2^{k+3}}(|x|^2+|y|^2)\\ &\leqslant 1-\frac{\beta}{k^2\pi^2 2^{k+1}},\qquad (|x|^2+|y|^2=2)\end{aligned}$$

这说明$(X,|\cdot|)$是一致凸的. 注意 $\alpha 2^{-(k-1)/q}\leqslant\varepsilon/2$ 或 $2^k\leqslant 2\left(\frac{2\alpha}{\varepsilon}\right)^q$，则在范数$|\cdot|$之下

$$\begin{aligned}\delta_X(\varepsilon)&\geqslant\frac{\beta}{k^2\pi^2 2^{k+1}}\geqslant\frac{\beta\varepsilon^q}{4k^2\pi^2(2\alpha)^q}\\ &\geqslant\frac{\beta\varepsilon^q}{4\pi^2(2\alpha)^q\left(q\log_2\frac{2\alpha}{\varepsilon}+1\right)^2}=\frac{\beta\varepsilon^{q'}}{4\pi^2(2\alpha)^q\varepsilon^{q'-q}\left(q\log_2\left(\frac{2\alpha}{\varepsilon}\right)+1\right)^2}\end{aligned}$$

对于任何 $q'>q$，当 $\varepsilon\to 0$ 时分母趋于 0，于是有 c 使得

$$\delta_X(\varepsilon)\geqslant c\varepsilon^{q'},(0\leqslant\varepsilon\leqslant 2)\tag{2.24}$$

定理 6 设 X 是超自反空间，则存在 $c>0$ 和 p $(1<p\leqslant 2)$

以及等价范数 $|\cdot|$ 使得在此范数之下，

$$\rho_X(\tau) \leqslant c\tau^p \qquad (\tau > 0). \tag{2.25}$$

证明 这里要用到我们将在 §4 中证明的第三个基本事实：

（Ⅲ）X 是超自反的当且仅当 X^* 超自反（§4 推论 1).

现在设 X^* 超自反，由刚刚证明的定理，X^* 存在等价范数 $|\cdot|^*$，例如 $\frac{1}{2}\|x^*\| \leqslant |x^*|^* \leqslant \|x^*\|$，$\forall x^* \in X^*$，在此等价范数下，$X^*$ 的凸性模

$$\delta_{(X^*, |\cdot|^*)}(\varepsilon) \geqslant c\varepsilon^q,\ c > 0, q \geqslant 2 \tag{2.26}$$

在 X 上定义范数

$$|x| = \sup_{|x^*|^* \leqslant 1} |x^* x|, \qquad \forall x \in X$$

则 $\|x\| \leqslant |x| \leqslant 2\|x\|$，$\forall x \in X$. 利用 §1 的结论，必有

$$\rho_{(X, |\cdot|)}(\tau) = \sup_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2} \left(\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta^*_{(X^*, |\cdot|^*)}(\varepsilon) \right).$$

我们过去证明过（见 §1 定理 8)，当 $\delta_{(X^*, |\cdot|^*)}$ 满足(2.25)时，必有

$$\rho_{(X, |\cdot|)}(\tau) \leqslant c'\tau^p \qquad (\tau > 0),\ \text{这里 } p = \frac{q}{q-1}.$$

由以上证明知道，一致凸空间可赋予等价范数使之成为 p 光滑 $(1 < p \leqslant 2)$ 的，同时也可赋予等价范数使之成为 q 凸 $(2 \leqslant q < \infty)$ 的. Asplund 应用平均技巧还证明了超自反空间上存在第三个等价范数，在此范数下 X 既是 p 光滑又是 q 凸的，这里不准备再叙述了.

§3 p 光滑空间值鞅的大数定律

本节将讨论空间的 p 光滑性与在其中取值的鞅的大数定律之间的相互联系. 我们先给出两个简单条件.

定理 1 设 X 是 p 光滑 Banach 空间，$1 < p \leqslant 2$，$f = (f_n)$ 是 X 值鞅，

(i) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} E(\|df_n\|^p|\mathscr{B}_{n-1})<\infty$ $a.e.$，则 f_n $a.e.$ 收敛.

(ii) 若 $a_n>0$，$a_n \uparrow \infty$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-p} E(\|df_n\|^p|\mathscr{B}_{n-1})<\infty$ $a.e.$，则 $a_n^{-1} f_n \to 0$ $a.e.$

证明 1° 对于 $\lambda>0$，令 $\tau=\inf\{n, \sum_{i=1}^{n+1} E(\|df_n\|^p|\mathscr{B}_{n-1})>\lambda\}$，(仍记 $\inf \varnothing=\infty$)，τ 是停时. 考虑鞅 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n})$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\|df_{\tau\wedge n}\|^p = \sum_{i=1}^{\tau} E\|df_i\|^p$$

$$= E\sum_{i=1}^{\tau} E(\|df_i\|^p|\mathscr{B}_{i-1}) \leqslant \lambda.$$

于是由 p 光滑性，

$$\sup_{n\geqslant 1} E\|f_{\tau\wedge n}\|^p \leqslant c\sum_{n=1}^{\infty} E\|df_{\tau\wedge n}\|^p \leqslant c\lambda$$

由 RN 性质，$f_{\tau\wedge n}$ $a.e.$ 收敛. 在 $\{\tau=\infty\}=\{\sum_{i=1}^{\infty} E(\|df_i\|^p|\mathscr{B}_{i-1})\leqslant\lambda\}$ 上 $f_{\tau\wedge n}=f_n$，故 f_n 在 $\{\tau=\infty\}$ 上 $a.e.$ 收敛. λ 是任意的并且 $\sum_{n=1}^{\infty} E(\|df_n\|^p|\mathscr{B}_{i-1})<\infty$ $a.e.$，故 f_n $a.e.$ 收敛.

2° 令 $d\tilde{f}_n=\frac{df_n}{a_n}$，$\tilde{f}=(\tilde{f}_n)=(\sum_{i=1}^{n} d\tilde{f}_i)$，$\tilde{f}$ 满足 (i)，从而 $\sum_{i=1}\frac{df_i}{a_i}$ $a.e.$ 收敛，Kronecher 引理保证了 $\frac{f_n}{a_n}\to 0$ $a.e.$.

定理 2 (Pisier, Rosenski) 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant 2$，则下述条件等价：

(i) X 是 p 可光滑的.

(ii) 对于每个 X 值鞅 $f=(f_n)$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} E\|df_n\|^p<\infty$，则 $f_n L_p(P,X)$ 收敛

(iii) 在上述条件下 f_n $a.e.$ 收敛.

(iv) 在上述条件下 f_n 依概率收敛.
以上结论换为 Walsh-Paley 鞅结论仍成立.

证明 只有 (i)⇒(ii) 和(iv)⇒(i)是需要证明的.

当 X 是 p 可光滑空间时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} E\|df_n\|^p<\infty$，由 Pisier 不等式，$f_n$ 是 L_p 有界的. 由于 p 光滑空间具有 RN 性质，得到 f_n L_p 收敛(Ⅱ. § 2 定理 1)，所以(i)⇒(ii)成立.

对于(iv)⇒(i) 只须假定所有 WP 鞅满足 (iv). 不妨假定 $f_0=0$. 考虑 WP 鞅的两类空间

$$G=\{f=(f_n),\|f\|=(\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^p)^{1/p}<\infty\}$$

$$G_0=\{f=(f_n),\rho(f,0)=\sup_{n\geqslant 1}\int_{\Omega}\frac{\|f_n\|}{1+\|f_n\|}dP\}.$$

标准的验证说明$(G,\|\cdot\|)$是 Banach 空间，G_0 是以 $\rho(f,g)=\rho(f-g,0)$为度量的 Frechet 空间，条件(iv)说明恒等映射 $I:G\to G_0$ 定义合理且有闭图象，从而 I 连续. 这说明对于$\forall\ 0<\varepsilon<1,\forall\ \delta>0$，使得当每个鞅满足 $\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^p<\delta$ 时

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}P(\|f_n\|>\varepsilon)\leqslant\int_{\Omega}\frac{\|f_n\|}{1+\|f_n\|}dP\leqslant\varepsilon^2,\quad(\forall\ n\geqslant 1)$$

或

$$\sup_{n\geqslant 1}P(\|f_n\|>\varepsilon)<2\varepsilon. \tag{3.1}$$

定义停时 $\tau=\inf\{n:\|f_n\|>\varepsilon\}$，则 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n})$是停止鞅，由于

$$df_{\tau\wedge n}=df_n\chi_{\{\tau\geqslant n\}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_{\tau\wedge n}\|^p\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^p)<\delta,$$

于是

$$P(\|f_{\tau\wedge n}\|>\varepsilon)=P(\tau\leqslant n)<2\varepsilon.$$

故有

$$P(f^*>\varepsilon)=P(\tau<\infty)=\lim_{n\to\infty}P(\tau\leqslant n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\| f_{\tau\wedge n} \| > \varepsilon) \leqslant 2\varepsilon$$

这说明当 $f^* > 1$ $a.e.$ 时，必有 $c>0$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} E\| df_n \|^p \geqslant c$. 我们以此证明，对于每个自然数 k，

$$\lambda^p P(f_k^* > 2) \leqslant \sum_{n=1}^{k} E \| df_n \|^p \tag{3.2}$$

不妨设 $P(f_k^*>2)>0$，取 $f^{(j)}=(f_n^{(j)})$ 是 f 的独立同分布鞅（其存在性见附录 Ⅱ），令 $A_j=\{f_k^{(j)*}\leqslant 2\}$，$u_j=\chi_{A_j}$ 并且定义鞅 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)$，其鞅差为

$$(df_1^{(1)},\cdots,df_k^{(1)},u_1df_1^{(2)},\cdots,u_1df_k^{(2)},u_1u_2df_1^{(3)},\cdots,u_1u_2df_k^{(3)},\cdots)$$

注意 $Eu_j=P(f_k^*\leqslant 2)$，对于 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)$ 有

$$\sum_{n=1}^{kj} E \| d\mathcal{F}_n \|^p = [1 + Eu_1 + \cdots + (Eu_1)^{j-1}] \sum_{n=1}^{k} E \| df_n \|^p$$

令 $j\to\infty$ 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} E \| d\mathcal{F}_n \|^p \leqslant \frac{1}{1 - Eu_1} \sum_{n=1}^{k} E \| df_n \|^p \tag{3.3}$$

由于 u_j 相互独立并且 $\sum_{j=1}^{\infty} P(u_j=0)=\infty$，故由 Borel-Cantelli 引理必有 $P(A_k,i,0)=1$，这说明 $\mathcal{F}^* \geqslant 1$ $a.e.$ 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} E\| d\mathcal{F}_n \|^p \geqslant c$，(3.3)变为

$$cP(f_k^* > 2) \leqslant \sum_{n=1}^{k} E \| df_n \|^p \tag{3.4}$$

此不等式对于任何鞅成立. 将 f 换为 $\frac{2f}{\lambda}=\left(\frac{2f_n}{\lambda}\right)$，$c$ 记为 $\frac{2^p}{c}$，则

$$P(f^* > \lambda) \leqslant c\lambda^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} E \| df_n \|^p. \tag{3.5}$$

现在设 $f=(f_n)$ 是 WP 鞅，$\delta,\lambda>0$，$\beta>\delta+1$ 定义

$$\mu = \inf\{n, f_n^* > \lambda\},$$

$$\nu = \inf\{n, f_n^* > \beta\lambda\},$$

$$\sigma=\inf\{n,(\sum_{i=1}^{n+1}\|df_i\|^p)^{1/p}>\delta\lambda\}.$$

由于 $\|df_n\|$ 关于 $\mathscr{B}_{n-1}$ 可测，故 μ,ν,σ 为停时. 令 $u_k=\chi_{\{\mu<k\leqslant\sigma\wedge\nu\}}$，$u_k$ 可料，故 $\mathcal{J}=(\mathcal{J}_n)=(\sum_{k=1}^{n}u_kdf_k,n\geqslant1)$ 是 WP 鞅. 注意在 $\{\mu<k\leqslant\sigma\wedge\nu\}$ 上，只要 $\mu<\infty$ 就有

$$(\sum_{i=1}^{k}\|u_idf_i\|^p)^{1/p}=(\sum_{i=1}^{k}\|df_i\|^p)^{1/p}\leqslant\delta\lambda\chi_{\{\mu<\infty\}}.$$

于是

$$E\sum_{i=1}^{\infty}\|u_idf_i\|^p\leqslant\delta^p\lambda^pP(\mu<\infty)=\delta^p\lambda^pP(f^*>\lambda).\tag{3.6}$$

因此在 $\{\nu=n,\sigma=\infty\}$ 上 $f_n^*>\beta\lambda$, $\sum_{i=1}^{n}\|u_idf_i\|^p\leqslant(\delta\lambda)^p$. 此时存在 k_0, $1\leqslant k_0\leqslant n$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}u_idf_i=f_n-f_{k_0}=f_n-f_{k_0-1}-df_{k_0},$$

$$\sup_n\|\sum_{i=1}^{\infty}u_idf_i\|\geqslant f_n^*-\|f_{k_0-1}\|-\|df_{k_0}\|\geqslant(\beta-\delta-1)\lambda$$

n 是任意的，故有

$$\{f^*>\beta\lambda,(\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p)^{1/p}\leqslant\delta\lambda\}\subset\{\mathcal{J}^*\geqslant(\beta-\delta-1)\lambda\}$$

于是由(3.5)、(3.6)

$$P(f^*>\beta\lambda,\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p)^{1/p}\leqslant\delta\lambda)\leqslant P(\mathcal{J}^*\geqslant(\beta-\delta-1)\lambda)$$

$$\leqslant\frac{c}{(\beta-\delta-1)^p\lambda^p}\sum_{n=1}^{\infty}E\|u_ndf_n\|^p$$

$$\leqslant\frac{c\delta^p}{(\beta-\delta-1)^p}P(f^*>\lambda).$$

记 $\varepsilon=\frac{c\delta^p}{(\beta-\delta-1)^p}$，则

$$P(f^*>\beta\lambda)\leqslant P((\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p)^{1/p}\geqslant\delta\lambda)$$

$$+P(f^*>\beta\lambda,\ (\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p)^{1/p}\leqslant\delta\lambda)$$

$$\leqslant P((\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p)^{1/p}\geqslant\delta\lambda)+\varepsilon P(f^*>\lambda). \qquad (3.7)$$

于是

$$E(f^*)^p=\beta^p p\int_0^{\infty}\lambda^{p-1}P(f^*>\beta\lambda)d\lambda$$

$$\leqslant\beta^p p\int_0^{\infty}\lambda^{p-1}P((\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p)^{1/p}\geqslant\delta\lambda)d\lambda$$

$$+\varepsilon\beta^p p\int_0^{\infty}\lambda^{p-1}P(f^*>\lambda)d\lambda$$

$$\leqslant\frac{\beta^p}{\delta^p}E(\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p)+\varepsilon\beta^p E(f^*)^p$$

取 β 使 $\varepsilon\beta^p<1$,则

$$E(f^*)^p\leqslant\frac{\beta^p}{\delta^p(1-\varepsilon\beta^p)}E\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p \qquad (3.8)$$

从而

$$\sup_{n\geqslant1}E\|f_n\|^p\leqslant cE\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^p$$

其中 $c=\beta^p\delta^{-p}(1-\varepsilon\beta^p)^{-1}$. X 是 p 可光滑的.

下面定理属于 Höffmann-Jørgensen，Pisier.

定理 3 设 X 是 Banach 空间,则以下条件等价:

(i) X 是 p 可光滑的.

(ii) 对于任何 X 值鞅 $f=(f_n)$,若 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}E\|df_n\|^p<\infty$

则 $n^{-1}f_n\to0\ a.e.$

(iii) 对于任何 X 值鞅 $f=(f_n)$,若 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}\|df_n\|^p\in L_\infty$,

则 $n^{-1}f_n\to0\ a.e.$

(iv) 在(ii)或(iii)的条件下，$n^{-1}f_n\to0\ a.e.$ 依概率成立.

将其中的鞅换为 WP 鞅,其结论仍成立.

证明 (i)⇒(ii) 设 $f=(f_n)$满足 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}E\|df_n\|^p<\infty$，定义 $d\mathcal{F}_n=\frac{df_n}{n}$ $(n\geqslant 1)$. 考虑鞅 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)$，$\mathcal{F}_n=\sum_{i=1}^{n} d\mathcal{F}_i$，由

$$\sup_n E\|\mathcal{F}_n\|^p\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}E\|d\mathcal{F}_n\|^p=c\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}E\|df_n\|^p<\infty.$$

p 光滑空间具有 RN 性质，于是 $\mathcal{F}_n$ 依 $L_p(P,X)$ 范数收敛，从而 $a.e.$ 收敛，由 Kronecker 引理 $n^{-1}f_n\to 0$.

为证 (iv)⇒(i)，考虑 WP 鞅的两类空间

$$G_0=\{f=(f_n),\|f\|=(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}E\|df_n\|^p)^{1/p}<\infty\}$$

$$G_1=\{f=(f_n),\rho(f,o)=\sup_{n\geqslant 1}E\frac{\|f_n\|}{n+\|f_n\|}<\infty\}$$

可以验证 $\rho(f,g)=\rho(f-g,0)$是 G_1 上度量，二者都是完备的，从而 G_0 是 Banach 空间，G_1 是 Fréchet 空间，例行的验证表明，恒等映射 $I:G_0\to G_1$ 具有闭图象，从而是连续的，于是对于 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$ 使得，当 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}E\|df_n\|^p)^{1/p}<\delta$ 时

$$\sup_{n\geqslant 1}P(\frac{\|f_n\|}{n}>\varepsilon\}<\varepsilon \tag{3.9}$$

现在若 $f=(f_n)$满足 $\sum_{n=1}^{\infty}E\|df_n\|^p<\delta^p$，考虑由鞅差序列

$$(\underbrace{0,\cdots,0}_{j},\ (j+1)df_1,\cdots,(j+k)df_k,0,\cdots) \tag{3.10}$$

确定的鞅 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)$，由于

$$\sum_{i=1}^{\infty}i^{-p}E\|d\mathcal{F}_i\|^p=\sum_{i=1}^{\infty}E\|df_n\|^p<\delta^p,$$

从而由(3.9)

$$P\left(\frac{\|\mathcal{F}_{j+k}\|}{j+k}>\varepsilon\right)=P(\frac{1}{j+k}\|\sum_{i=1}^{k}(j+i)df_i\|>\varepsilon)<\varepsilon.$$

令 $j\to\infty$ 得到

$$P(\| f_k \| > \varepsilon) = P(\| \sum_{i=1}^{k} df_i \| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon. \qquad (3.11)$$

由此得到若 $f^* \geqslant 1$ $a.e.$ 则必 $\sum_{n=1}^{\infty} \| df_n \|^p \geqslant c^p > 0$，$c$ 是某个常数. 由定理 2 中(iv)⇒(i) 的证明(见 (3.4)，(3.5))知道 X 必是 p 可光滑的.

在(iii)的条件之下，可定义一个满足 (ii)的鞅使同样的结论成立. 故也可得到 X 的 p 可光滑性.

推论 设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 是超自反的.

(ii) 对任何 X 值鞅 $f=(f_n)$，若 $\sup_{n\geqslant 1} E\| df_n \|^2 < \infty$，则 $n^{-1} f_n \to 0$ $a.e.$

证明 若 X 是超自反的，由重赋范定理，∃ p，$1<p\leqslant 2$ 使得 X 是 p 可光滑的，又由于

$$E\| df_n \|^p \leqslant (\| df_n \|^2)^{p/2}$$

故有 $\sup_{n\geqslant 1} E\| df_n \|^p < \infty$，由定理 3(i)知 $n^{-1} f_n \to 0$ $a.e.$

反过来的证明依赖于下面基本事实，即若 X 不是超自反的，必可在 $L_\infty(P,X)$中构造鞅 $f=(f_n)$ 使得 $\sup_{n\geqslant 1} \| df_n \|_\infty \leqslant 1$，但 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\| f_n \|}{n} > 0$，这与(ii) 矛盾. 关于这一基本事实的证明，我们也留在 § 4 进行(定理 6).

定理 4 (Woyczynski) 设 X 是 p 可光滑的，$1<p\leqslant 2$，$q\geqslant 1$，对于鞅 $f=(f_n)$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-pq-1+q} E\| df_n \|^{pq} < \infty$ 则 $n^{-1} f_n \to 0$ $a.e.$

证明 若 $q=1$，则变为定理 3 的情况. 现设 $q>1$，由 Hajek-Renyi-Chow 不等式(Ⅴ. § 3)，对于∀ $\varepsilon>0$，

$$\varepsilon^{pq} P(\sup_{j\geqslant n} \| \frac{f_j}{j} \| > \varepsilon) = \varepsilon^{qp} \lim_{m\to\infty} P(\sup_{n\leqslant j\leqslant m} \| \frac{f_j}{j} \|^{qp} > \varepsilon^{qp})$$

$$= n^{-pq}E\|f_n\|^{qp} + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-pq}E(\|f_j\|^{pq} - \|f_{j-1}\|^{qp})$$

(3.12)

由 Pisier 不等式和 Hölder 不等式

$$E\|f_j\|^{qp} \leqslant cE(\sum_{i=1}^{j} E\|df_j\|^{p})^{q} \leqslant cj^{q-1}(\sum_{i=1}^{j} E\|df_i\|^{pq})$$

由定理条件和 Kronecker 引理 $j^{-pq}E\|f_j\|^{pq}\to 0 \quad (j\to\infty)$. 另外由上面 不等式,(3.12)右端的级数也是收敛的,因为

$$\sum_{j=1}^{n}((j-1)^{-pq} + j^{-pq})E\|f_j\|^{pq}$$

$$\leqslant c\sum_{j=1}^{n}((j-1)^{-pq} + j^{-pq})j^{q-1}\sum_{i=1}^{j}E\|df_i\|^{pq}$$

$$\leqslant c(\sum_{j=1}^{n}\frac{E\|df_j\|^{qp}}{j^{qp+1-q}} + \frac{1}{n^{qp+1-q}}\sum_{i=1}^{j}E\|df_i\|^{pq}),$$

从而对于 $\forall\ \varepsilon>0$, $P(\sup_{j\geqslant n}\|\frac{f_j}{j}\|>\varepsilon)\to 0\ (n\to\infty)$.

回忆我们在 V. §3 定义过尾概率一致有界的概念.

引理 设$\{y_n\}$ 是实值适应序列,$\{y_n\}\succ y_0$,$0<p<\infty$并且

$$y'_n = y_n\chi_{\{|y_n|\leqslant n^{1/p}\}},\quad y''_n = y_n\chi_{\{|y_n|>n^{1/p}\}}\quad (0<p<\infty)$$

则对于任何 $r>0$, 存在 $c=c_{rp}>0$,使得下面不等式成立(假定右端有限)

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|y'_n|^r}{n^{r/p}}\leqslant cEy_0^p,\qquad (p<r)\tag{3.13}$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|y''_n|^r}{n^{r/p}}\leqslant\begin{cases}cEy_0^p, & (p>r)\\ c(Ey_0^p+Ey_0^p\log^+ y_0), & (p=r)\end{cases}\tag{3.14}$$

证明 1° 若 $p<r$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|y'_n|^r}{n^{r/p}} = \sum_{n=1}^{\infty}n^{-r/p}\int_0^{n^{1/p}}P(|y_n|>\lambda)d\lambda^r$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}n^{-r/p}\int_0^{n^{1/p}}P(y_0>\lambda)d\lambda^r$$

$$= c\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 P(y_0 > n^{1/p}\lambda)d\lambda^r$$

$$= c\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} P(y_0^p\lambda^{-p} > n)d\lambda^r$$

$$\leqslant c\int_0^1 E y_0^p \lambda^{-p} d\lambda^r = \frac{cr}{r-p}Ey_0^p.$$

2° 若 $p>r$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|y''_n|^r}{n^{r/p}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r/p}\int_{n^{1/p}}^{\infty} P(|y_n| > \lambda)d\lambda^r$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} P(y_0 > n^{1/p}\lambda)d\lambda^r$$

$$= c\int_1^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P(y_0^p\lambda^{-p} > n)d\lambda^r$$

$$\leqslant c\int_1^{\infty} E y_0^p\lambda^{-p}d\lambda^r = \frac{cr}{p-r}Ey_0^p.$$

3° 若 $p=r$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|y''_n|^r}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\int_{n^{\frac{1}{r}}}^{\infty} P(|y_n| > \lambda)d\lambda^r$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\int_n^{\infty} P(y_0 > \lambda^{1/r})d\lambda$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty} P(y_0^r > k)$$

$$\leqslant c\sum_{k=1}^{\infty} P(y_0^r > k)(1+\log k)$$

$$\leqslant cEy_0^r + c\sum_{k=1}^{\infty}\ln^{-1} y_0^r P(y_0^r > k)\log^+ y_0^r$$

$$\leqslant c^1(Ey_0^r + Ey_0^r\log^+ y_0).$$

定理 5 (Marcinkiewicz-Zygmund 型大数定律) 设 $f=(f_n)$ 是 X 值鞅，$\{df_n\}\succ y_0$ 则

(i) 若 $y_0 \in L\log^+ L$，X 是超自反的，则 $n^{-1}f_n \to 0$ a.e.

(ii) 若 $y_0 \in L^p(1<p<2)$，X $r(>p)$可光滑，则 $n^{-\frac{1}{p}}f_n \to 0$ a.e.

证明 记$y'_n = df_n \chi_{\{\|df_n\| \leqslant n^{1/p}\}}$，$y''_n = df_n \chi_{\{\|df_n\| > n^{1/p}\}}$，

$$\Delta'_n = y'_n - E(y'_n | \mathscr{B}_{n-1}), \Delta''_n = y''_n - E(y''_n | \mathscr{B}_{n-1}),$$

(Δ'_n)，(Δ''_n) 是鞅差序列并且 $df_n = (\Delta'_n) + (\Delta''_n)$.

为证(i)，设 $p=1$，X 是超自反的，由重赋范定理，$\exists\ r>1$，使得 X 是 r 光滑的，于是

$$E\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{df_k}{k}\right\| \leqslant \left(E\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta_k'}{k}\right\|^r\right)^{1/r} + \sum_{k=1}^{n}\frac{E\|\Delta_k''\|}{k}$$

$$\leqslant c\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{E\|\Delta_k'\|^r}{k^r}\right)^{1/r} + \sum_{k=1}^{n}\frac{E\|\Delta_k''\|}{k}$$

$$\leqslant c\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{E\|y'_k\|^r}{k^r}\right)^{1/r} + \sum_{k=1}^{n}\frac{E\|y''_k\|}{k}$$

由引理中(3.13)式，最后式子前一部分收敛. 由(3.14)式第二部分收敛. 于是$\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{df_k}{k}, n\geqslant 1\right\}$ 是 $L_1(P,X)$ 有界的，故此鞅收敛，由 Kronecker 引理 $\frac{f_n}{n} \to 0$ a.e.

对于(ii)，由于

$$E\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{df_k}{k^{1/p}}\right\| \leqslant c\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\|y'_k\|^r}{k^{r/p}}\right)^{1/r} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{E\|y_k''\|}{k^{1/p}}$$

第一部分由(3.13)，第二部分由(3.14)头一式得出有限值，再用 Kronecker 引理得出 $\frac{f_n}{n^{1/p}} \to 0$ a.e.

§4 有限树、J 凸性与超幂空间

本节将叙述超自反空间的有限树性质、J凸性、基底不等式、超幂空间与若干超性质. 在此过程中，本章前几节中用到而未加证明的几个基本事实将得到证明. 本节的另一目的是对超自反空间

的等价条件作一个小结.

一、有限树性质与 J 凸性质

定义 1 称 Banach 空间 X 具有有限树性质,若存在 $\delta(0<\delta\leqslant 2)$,使对于任何 $n\geqslant 1$,X 的单位球中可以找到 2^n 个元素满足

$$\| x_{+1}-x_{-1}\| \geqslant \delta,$$

$$\| x_{+1,+1}-x_{+1,-1}\| \geqslant \delta,\ \frac{x_{+1,+1}+x_{+1,-1}}{2}=x_{+1},$$

$$\| x_{-1,+1}-x_{-1,-1}\| \geqslant \delta,\ \frac{x_{-1,+1}+x_{-1,-1}}{2}=x_{-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\| x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},+1}-x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},-1}\| \geqslant \delta,$$

$$\frac{x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},+1}+x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},-1}}{2}=x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}}.$$

其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 取 ± 1 值,为简便起见,记 $x_0=\dfrac{x_{+1}+x_{-1}}{2}$,称这 2^n 个元素为一个 (n,δ) 枝. 简单地说,X 具有有限树性质,当且仅当对于每个自然数 n,X 的单位球中可以找到一个 (n,δ) 枝.

例 空间 $(\prod_{n=1}^{\infty} l_1^{2^n})_2$,这里 l_1^k 是赋予 l_1 范数的 k 维空间,取 $\delta=2$,则标准基 $e_1,e_2,\cdots,e_{2^n}$ 满足

$$\| e_1-e_2\|_1=\| e_2-e_3\|_1=\cdots=\| e_{2^n-1}-e_{2^n}\| =2,$$

$$\left\| \frac{e_1+e_2}{2}-\frac{e_3+e_4}{2}\right\| =\cdots$$

$$=\left\| \frac{e_{2^n-3}+e_{2^n-2}}{2}-\frac{e_{2^n-1}+e_{2^n}}{2}\right\| =2.$$

适当安排下标,可知 l_1^k 中包含 $(n,2)$ 枝.

现在 $\left(\prod_{n=1}^{\infty} l_1^{2^n}\right)_2$ 是 $l_1^{2^n}(n=1,2,\cdots)$ 的 l_2 范数乘积空间. 显然,对于任何 n,此空间单位球中含有 $(n,2)$ 枝,但是 $(n,2)$ 枝在子空间 $l_1^{2^n}$ 中去寻找,而 $(n+1,2)$ 枝必须到 $l_1^{2^{n+1}}$ 中去寻找,两者没有公共元

素. 此例还说明，$\left(\prod_{n=1}^{\infty} l_1^{2^n}\right)_2$ 具有有限树性质. 马上会看到这种空间不是超自反的. 但应注意的是该空间是自反的，由此知道自反性不等价于超自反性. 为证明该空间自反，甚至于 $\left(\prod^{\infty} l_1^{2^n}\right)_2$ 是自反的可以用标准方法去进行，只须注意每个 $l_1^{2^n}$ 是有限维空间，其上的任一范数均等价.

定义 2 Banach 空间 X 称为 J 凸的：若存在 $\delta>0$ 和自然数 $K\geqslant 2$ 使得对于 X 的单位球中的任何元素 $x_1,\cdots,x_K$，都有 ± 号的循序选择 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_K$ 使之满足

$$\left\|\sum_{i=1}^{K}\varepsilon_i x_i\right\| \leqslant (1-\delta)K. \tag{4.1}$$

所谓循序选择，即正号集中于前段，负号集中于后段，没有交互出现的情况.

可以直接验证，J 凸性是超性质. 为了刻划超自反空间，我们需要下面引理，这里只简单叙述其证明.

引理 1 (James) 设 X 是 Banach 空间，X^* 是 X 的共轭，则下述条件等价：

(i) X 不是自反空间.

(ii) 对于 $\forall\ \theta, 0<\theta<1$，存在点列 $\{x_n\}\subset X$，$\{x_n^*\}\subset X^*$，$\|x_n\|=1$，$\|x_n^*\|=1$ 使得

$$x_n^*(x_k)=\begin{cases}\theta, & n\leqslant k\\ 0, & n>k\end{cases} \tag{4.2}$$

(iii) 对于 $\forall\ \theta, 0<\theta<1$，存在 $\{x_n\}\subset X$，$\|x_n\|=1$ 使得对于任何 $K,k(1\leqslant k\leqslant K)$，

$$d(co(x_1,\cdots,x_k),co(x_{k+1},\cdots,x_K))\geqslant\theta \tag{4.3}$$

这里 co 代表括号中元素的凸组合.

将定理中的任意 θ 换为某个 θ 结论仍成立.

证明 (i)⇒(ii) 设 X 不是自反的，$J:X\to X^{**}$ 是自然嵌入. 因 $J(X)$ 在 X^{**} 中闭但 $J(X)\neq X^{**}$，故存在 $f\in X^{***}$ 使得 $\|f\|$

$=1, f(x)=0\ (\forall\ x\in X)$,对于 $0<\theta<1$,取 $x^{**}\in X^{**}$ 使得 $\|x^{**}\|<1, f(x^{**})>\theta$,此时

$$\begin{aligned} d(x^{**}, J(X)) &= \inf_{x\in X}\|x^{**}-J(x)\| \\ &\geqslant \inf_{x\in X} f(x^{**}-J(x)) = f(x^{**}) > \theta, \\ \|x^{**}\| &\geqslant f(x^{**}) > \theta. \end{aligned}$$

于是存在 $x_1^*\in X^*$, $\|x_1^*\|=1, x^{**}(x_1^*)=\theta$. 由 $\|x_1^*\|>\theta$ 知存在 $x_1\in X$, $\|x_1\|=1, x_1^* x_1=\theta$. 这里用到 Hahn-Banach 延拓定理.

用归纳法,假设 $x_k, x_k^*\ (k=1,\cdots,n-1)$ 已取定,其中 $\|x_k\|=1$, $\|x_k^*\|=1$, $x^{**}(x_k^*)=\theta$. 现在取 x_n^*, $\|x_n^*\|=1, x^{**}(x_n^*)=\theta, x_n^*(x_k)=0\ (k<n)$. 由 Helly 选择原理对于任何 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$,

$$\theta\leqslant\frac{\theta}{\operatorname{dist}(x^{**}, J(X))}\left\|\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k J(x_k)+x^{**}\right\|_{X^{**}},$$

由此

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\theta\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}x^{**}(x_k^*)\right|\leqslant\|x^{**}\|\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k^*\right\|.$$

$\|x^{**}\|<1$,故可取 x_n, $\|x_n\|=1, x_k^*(x_n)=\theta, k\leqslant n$. 从而得到所要的序列.

(ii)⇒(iii) 对于任何 $k, K\ (1\leqslant k\leqslant K)$,设 $\{x_k\}$, $\{x_k^*\}$ 是(ii)中确定的序列,则对于任何 $\alpha_i>0, \beta_j>0, \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$, $\sum_{j=1}^{K-k}\beta_j=1$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i-\sum_{j=1}^{K-k}\beta_j x_{k+j}\right\|\geqslant x_{k+1}^*\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i-\sum_{j=1}^{K-k}\beta_j x_{k+j}\right)=\theta$$

故得之.

(iii)⇒(i) 反之若 E 自反,考虑(iii)中确定的序列 $\{x_k\}$,令 $A_k=\{x_i, i\geqslant k\}$. $B_k=coA_k$,则 $\overline{B}_k$ 是 w 拓补下的递缩紧序列,具有限交性质,从而 $\bigcap_{k\geqslant 1}\overline{B}_k\neq\varnothing$. 取 y_0 是其中元,由于 $y_0\in\overline{B}_1$,故 $\exists$ 自然数 l 和实数 $\alpha_i>0, \sum_{i=1}^{l}\alpha_i=1$ 使得 $\left\|y_0-\sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i\right\|\leqslant\frac{\theta}{3}$.

又 $y_0 \in B_{l+1}$ 故存在自然数 $L>0$ 和实数 $\beta_j>0$，$\sum_{j=1}^{L}\beta_j=1$ 使

$$\| y_0-\sum_{j=1}^{L}\beta_j x_{l+j}\| \leqslant \frac{\theta}{3}.$$

从而

$$\| \sum_{i=1}^{l}\alpha_i x_i-\sum_{j=1}^{L}\beta_j x_{l+j}\| \leqslant \frac{2\theta}{3}.$$

与 $d(co(x_1,\cdots,x_l),co(x_{l+1},\cdots,x_{l+L}))>0$，矛盾，定理得证.

引理 2 对于 Banach 空间 X，以下条件等价：

(i) X 不是超自反的.

(ii) 对于任何 $\theta, 0<\theta<1$ 和任何 $n\geqslant 1$，X 和 X^* 的单位球中分别存在序列 $x_1^{(n)},\cdots,x_n^{(n)},x_1^{(n)*},\cdots,x_n^{(n)*}$ 使得

$$x_m^{(n)*}x_k^{(n)}=\begin{cases}\theta, & m\leqslant k\leqslant n,\\ 0, & k<m\leqslant n.\end{cases} \tag{4.4}$$

(iii) 对于任何 $\theta, 0<\theta<1$ 和任何 $1\leqslant k\leqslant n$，X 的单位球中存在序列 $x_1^{(n)},\cdots,x_n^{(n)}$ 使得

$$d(co(x_1^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},co(x_{k+1}^{(n)},\cdots,x_n^{(n)}))>\theta. \tag{4.5}$$

同样地，其中的任何 θ 换为某个 θ 结论仍成立.

证明 (ii)⇒(iii) 如同引理 1 相应部分的证明.

(iii)⇒(i) 若 X 是超自反的，则任何 Banach 空间 Y 在 X 中有限可表现时，Y 是自反的. 由上述引理存在 $0<\theta<1$，对于任何序列 $y_k\in Y$，$\| y_k\|=1$，以 Y 中范数

$$d(co(y_1,\cdots,y_k),co(y_{k+1},\cdots,y_n))<\theta,$$

$(1\leqslant k\leqslant n)$. 令 $Y_n=\mathrm{span}\{y_1,\cdots,y_n\}$，则$\exists\ X_n\subset X$，$\dim X_n=\dim Y_n$ 和同构映射 $T:Y_n\to X_n$ 使得 $\| T\|\leqslant 1$，$\| T^{-1}\|\leqslant 2$.

记 $x_k=Ty_k(k=1,\cdots,n)$，则以 X 中范数

$$d(co(x_1,\cdots,x_k),co(x_{k+1},\cdots,x_n))<\theta.$$

与(iii) 矛盾.

(i)⇒(ii) 若 X 不是超自反的，则存在 Y，在 X 中有限可表

现，但不是自反的，由引理 1 存在$\{y_k\}\subset Y$，$\{y_k^*\}\subset Y$，$\|y_k\|\leqslant 1$，$\|y_k^*\|\leqslant 1$，使得

$$y_m^* y_k = \begin{cases}\theta(1+\varepsilon), & m\leqslant k \\ 0 \quad, & m>k.\end{cases}$$

这里 $\varepsilon>0, \theta(1+\varepsilon)<1$. $Y_n=\operatorname{span}\{y_1,\cdots,y_n\}$，则存在 $X_n\subset X$. $\dim X_n=\dim Y_n$和同构映射 $T:Y_n\to X_n$使得 $\|T\|\leqslant 1+\varepsilon$，$\|T^{-1}\|=1$，令 $x_k^{(n)}=(1+\varepsilon)Ty_k$，$x_k^{(n)*}=x_k^*\cdot T^{-1}$，则 $\|x_k^{(n)}\|\leqslant 1$，$\|x_k^{(n)*}\|\leqslant 1$ 并且

$$x_m^{(n)*}x_k^{(n)} = \begin{cases}0, & m\leqslant k \\ 0, & m>k.\end{cases}$$

此即(ii).

推论 1 X 超自反当且仅当 X^* 超自反.

证明 若 X 不是超自反的，由引理 2 对于任何 $0<\theta<1$ 和 $n\geqslant 1$，存在 $x_k^{(n)}\in X$ 和 $x_k^{(n)*}\in X^*$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 使得 $\|x_k^{(n)}\|\leqslant 1$，$\|x_k^{(n)*}\|\leqslant 1$ 并且

$$x_m^{(n)}x_k^{(n)} = \begin{cases}\theta, & m\leqslant k\leqslant n, \\ 0, & k<m\leqslant n.\end{cases}$$

将 $x_k^{(n)}$视为 X^{**}中的点并且重新编号

$$\bar{x}_j^{(n)} = x_{n-j+1}^{(n)}, j=1,\cdots,n$$

$$\bar{x}_m^{(n)*} = x_{n-m+1}^{(n)*}, m=1,\cdots,n$$

正好得到 X^*不超自反的条件.

若 X^* 不是超自反的，正如上面一样可取 $\bar{x}_j^{(n)}$ 和 $\bar{x}_j^{(n)*}$ $(j=1,\cdots,n)$，它们分别是 X^{**}和 X^* 的单位球中的元，由于 X 的单位球在 X^{**}的单位球中 w^* 稠密，故可在前者中找到 $x_1^{(n)},\cdots,x_n^{(n)}$使得

$$|\bar{x}_j^{(n)*}x_i^{(n)}|>\theta-\varepsilon, \quad i\geqslant j$$

$$|\bar{x}_j^{(n)*}x_i^{(n)}|\leqslant\varepsilon, \quad i<j$$

$(2\varepsilon<\theta)$，于是对每个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 和正数 α_i，$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i=1$，

$$\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^{(n)} - \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i x_i^{(n)} \|$$

$$\geqslant | x_k^{(n)*} (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^{(n)} - \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i x_i^{(n)}) | \geqslant \theta - 2\varepsilon > 0.$$ 此即

$d(co(x_1^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, co(x_{k+1}^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)})) \geqslant \theta - 2\varepsilon$，$X$ 不是超自反的.

引理 3 若 X 不是自反的，则对于任何 δ $(0<\delta<1)$，任何自然数 $K\geqslant 1$，在 X 的单位球中可以找到 $x_1, \cdots, x_K \in X$，使得对于任何 $k(1\leqslant k\leqslant K)$

$$\| x_1 + \cdots + x_k - (x_{k+1} + \cdots + x_K \| \geqslant k(1 - \delta).$$

此引理的一个基本的证明见 Beauzamy[1].

定理 1 (James) 设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 是超自反的.

(ii) X 不具有有限树性质.

(iii) X 是 J 凸的.

证明 (ii)⇒(i) 若 X 不是超自反的、正象上面引理 2 中 (iii)⇒(i)的证明那样，取 2^n 作为那里的 n 可以得到

$$d(co(x_1, \cdots, x_k), co(x_{k+1}, \cdots, x_{2^n})) > \frac{\theta}{2}.$$

这意味着对于任何 k，$1\leqslant k\leqslant n$，

$$\| \frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k} - \frac{x_{2^k+1} + \cdots + x_{2^{k+1}}}{2^k} \| > \frac{\theta}{2}.$$

于是 $x_1, \cdots, x_{2^n}$ 是 $(n, \frac{\theta}{2})$ 枝，这说明 X 具有有限树性质，矛盾.

(i)⇒(ii) 我们将在后面证明(见定理 8)，若 X 具有有限树性质，则超幂空间 $\widetilde{X}$ 具有无穷 δ 树性质，因此不具有 RN 性质，更不是自反的．但 $\widetilde{X}$ 在 X 中可有限表现，得出矛盾.

(i)⇒(iii) 若 X 不是 J 凸的，即对任何 $\delta>0$ 和 $k\geqslant 2$，$\exists$ $\{x_k, 1\leqslant k\leqslant K\}$，$\| x_k \| \leqslant 1$ 使得对任何循序符号选择 $\varepsilon_k (1\leqslant k\leqslant K)$，

$$\| \sum_{k=1}^{K} \varepsilon_k x_k \| \geqslant (1-\delta)K. \quad (\delta < \frac{1}{K})$$

对于每个 $k(1\leqslant k\leqslant K)$，若 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i$，$\sum_{i=k+1}^{K}\alpha_i x_i$ 是两个凸组合，则

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i-\sum_{i=k+1}^{K}\alpha_i x_i\right\|\\
&=\left\|\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=k+1}^{K}x_i-\left(\sum_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)x_i-\sum_{i=k+1}^{K}(1-\alpha_i)x_i\right)\right\|\\
&\geqslant\left\|\sum_{i=1}^{k}x_i-\sum_{i=k+1}^{K}x_i\right\|-\left(\sum_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)+\sum_{i=k+1}^{K}(1-\alpha_i)\right)\\
&\geqslant(1-\delta)K-(k-1+K-k-1)=2-\delta K>1.
\end{aligned}$$

此即

$$d(co(x_1,\cdots,x_k),co(x_{k+1},\cdots,x_k))>1.$$

由引理 2 知道 X 不是超自反的.

(iii)⇒(i) 因为 J 凸性是超性质，故只须证明 J 凸性蕴含自反性，实际上这正是上面引理.

定理 2 (Pisier) 设 X 是 Banach 空间，$1<p<\infty$，下面条件等价：

(i) X 是 J 凸的.

(ii) 存在 $\delta>0$ 和自然数 $n\geqslant 2$，使得每一组 $x_1,\cdots,x_n\in X$ 相应地可找到循序符号选择 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 满足

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|\leqslant(1-\delta)n^{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{1/p}\tag{4.6}$$

(iii) 存在 $\delta>0$ 和自然数 $k\geqslant 2$，使得对于每一组 $x_1,\cdots,x_n\in X$，

$$\sum_{(\varepsilon_i)\in E_n}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i\right\|^p\leqslant(1-\delta)n^p\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\tag{4.7}$$

其中 E_n 表示 n 个符号的循序选择全体.

证明 (ii)⇒(iii) 设 $\varepsilon_i^0(1\leqslant i\leqslant n)$ 使(4.6)成立，则

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^0 x_i\right\|^p\leqslant(1-\delta)^p n^{\frac{p}{q}}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p.$$

对于其它的循序符号选择应用 Hölder 不等式得到

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^0 x_i \|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \| \right)^p \leqslant n^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p \right).$$

于是

$$\sum_{(\varepsilon_i) \in E_n} \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \|^p \leqslant ((n-1) + (1-\delta)^p) n^{\frac{p}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p \right)$$

$$= \frac{n-1+(1-\delta)^p}{n} n^p \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p.$$

取 $\delta = \dfrac{1-(1-\delta)^p}{n}$ 即得到(4.7).

(iii)⇒(ii)　若(4.7)成立,则

$$\frac{1}{n} \sum_{(\varepsilon_i) \in E_n} \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \|^p \leqslant (1-\delta) n^{\frac{p}{q}} \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p,$$

至少有一个循序符号选择,记为 ε_i^0 使得

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^0 x_i \|^p \leqslant (1-\delta) n^{\frac{p}{q}} \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p.$$

取　$((1-\delta)^{\frac{1}{p}} = 1-\delta'$,便得到(4.6).

(ii)⇒(i)　取 $\| x_i \| \leqslant 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$,则得到 J 凸性的定义式.

(i)⇒(ii)　设 X 是 J 凸的,这时有 $\delta > 0$ 和 $k \geqslant 2$,使得每组 $x_1, \cdots, x_n$, $\| x_i \| \leqslant 1$ 相应地存在循序符号选择使得

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \| \leqslant (1-\delta) n,$$

若 $\| x_1 \| = \| x_2 \| = \cdots = \| x_n \| = 1$,则

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \| \leqslant (1-\delta) \sum_{i=1}^{n} \| x_i \| \tag{4.8}$$

对于$\forall\ x_1 \in X$,若 $x_i \neq 0\ (1 \leqslant i \leqslant n)$,记 $x_i = x'_i + x''_i$,其中 $x'_i = (1-\lambda_i) x_i$, $x''_i = \lambda_i x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 其中 $\lambda_i = \| x_i \|^{-1} \min\{ \| x_j \|, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. 于是 $\| x''_i \| = \min\{ \| x_j \|, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. 由(4.8)的齐次性知道存在循序符号选择,使得

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x''_i \| \leqslant (1-\delta) \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|,$$

对于这一符号选择

$$\begin{aligned}\| \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i \| &\leqslant \| \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x'_i \| + \| \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x''_i \| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \| x'_i \| + (1-\delta)\sum_{i=1}^{n} \| x''_i \| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i) \| x_i \| + (1-\delta)\lambda_i \| x_i \| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}(1-\delta\lambda_i) \| x_i \| \\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n}(1-\delta\lambda_i)^q\Big)^{1/q}\Big(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p\Big)^{1/p}\end{aligned}$$

注意至少有一个 $\lambda_i=1$，其余 $\lambda_i\geqslant 0$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\delta\lambda_i)^q \leqslant (1-\delta)^q + n - 1 = n\Big(1 - \frac{1-(1-\delta)^q}{n}\Big).$$

记 $\delta' = \frac{1}{n}(1-(1-\delta)^q)$，$\delta'>0$，即得到(4.6).

推论 2 超自反空间的子空间与商空间是超自反的.

可直接由定理 2(4.7)检验之.

推论 3 设 X 是 Banach 空间，$1<p<\infty$，$\mu(\Omega)>0$. 则 X 是超自反的当且仅当 $L_p(\mu,X)$是超自反的.

证明 我们只须证明 X 是 J 凸的当且仅当 $L_p(\mu,X)$是 J 凸的，“当”的部分是显然的，比如$\{x\chi_\Omega, x\in X\}$是 $L_p(\mu,X)$的同构于 X 的子空间，故由 $L^p(\mu,X)J$ 凸，立即得到 XJ 凸.

“仅当”部分可由(4.7)式证之. 实际上，若 XJ 凸，$f_1,\cdots,f_n\in L_p(\mu,X)$，则对于几乎所有 ω

$$\sum_{(\varepsilon_i)\in En} \| \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i(\omega) \|^p \leqslant (1-\delta)n^p \sum_{i=1}^{n} \| f(\omega) \|^p.$$

积分得

$$\sum_{(\varepsilon_i)\in En} \| \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i \|^p_{L_p(\pi,X)} \leqslant (1-\delta)n^p \sum_{i=1}^{n} \| f_i \|^p_{L_p(\mu,\Omega)}.$$

即得出 $L_p(\mu,X)J$ 凸.

现在让我们转到具有 Schauder 基的超自反空间. 我们知道所谓 Schauder 基的基常数是使下面不等式对于任何标量序列 $\{a_i\}$ 成立的最小常数 β

$$\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \| \leqslant \beta \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \| . \quad (\forall\ k,n,k \leqslant n) \tag{4.9}$$

引理 3 若存在常数 $\alpha,\beta>0$ 使得对于每个 $n\geqslant 1$, 可以找到 $y_1,\cdots,y_n\in X$, 使之对于所有自然数 $k\leqslant n$ 和所有标量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,

$$\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \| \geqslant \alpha \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|, \quad \| \sum_{i=1}^{k} y_i \| < \beta \tag{4.10}$$

则 X 不是超自反的.

证明 令 $z_k=\beta^{-1}\sum_{i=1}^{k} y_i(k=1,\cdots,n)$, 则 $\|z_k\|\leqslant 1$ 并且 Span $\{z_k,1\leqslant k\leqslant n\}=\text{Span}\{y_k,1\leqslant k\leqslant n\}$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在线性泛函 $f_j(j=1,\cdots,n)$ 使得

$$f_j(x_i) = \begin{cases} \alpha & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

此时对于任何 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 由引理中头一个不等式

$$|f_j(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i)| = \alpha|\alpha_j| \leqslant \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \| .$$

于是 $\|f_i\|\leqslant 1$ $(i=1,\cdots,n)$. 将 f_j 保范延拓到整个空间 X 上, 仍记为 f_j, 则有

$$f_j(z_i) = \begin{cases} \alpha\beta^{-1}, & j \leqslant i \\ 0, & j > i. \end{cases}$$

由引理 2 知道 X 不是超自反空间.

定理 3 设 X 是超自反空间, $0<2\alpha<\beta\leqslant 1$, 则存在 r, $1<r<\infty$ 使得若 $\{e_i\}$ 是 X 中基常数 $>\beta$ 的规范基序列, 则只要 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ 收敛, 就有

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^r \right)^{1/r} \leqslant \| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \| . \tag{4.11}$$

证明 我们将证明，若(4.11)不成立，则可以构造出一个如同(4.10)的序列.

设 n 是任一自然数，取 $\lambda>0$ 使得 $2\alpha<\lambda^2\beta$，$\lambda<1$，再取 $r>1$ 使

$$n^{1/r} < \lambda^{-1}(1-\lambda)^{1/r}. \tag{4.12}$$

由此若 $\beta_i\geqslant 0$ $(i\geqslant 1)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right)^{1/r} \leqslant n^{1/r}(\sup\beta_i)^{1/r} < \lambda^{-1}(\sup\beta_i)^{1/r}. \tag{4.13}$$

如果(4.11)不成立，则存在基序列 $\{e_i\}$，基常数 $\geqslant\beta$ 并且有标量列 $\{\alpha_i\}$，自然数 m 使得

$$\inf\frac{\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\|}{\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{1/r}} = M < \alpha,$$

这里下确界是在所有 m 数组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 上取的.

不妨设 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 是其中之一，$\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\|=1$ 并且

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{1/r}} = \frac{\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|}{\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{1/r}} < M\lambda^{-1} \tag{4.14}$$

注意对于每个基常数 $\geqslant\beta$ 的基序列都有 $\beta|\alpha_k|\leqslant 2\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\|$，$(k\leqslant m)$，于是由(4.14)得到

$$|\alpha_k| \leqslant \frac{2}{\beta}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\| \leqslant \frac{2M}{\beta\lambda}\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{1/r}.$$

于是由 $M<\alpha$，$2\alpha<\lambda^2\beta$ 和(4.12)，

$$|\alpha_k|^r \leqslant \lambda^r\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r < \frac{1}{n}(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r. \tag{4.15}$$

从而存在 $m_1,m_2,\cdots,m_n=m$ 使得对于每个 j，

$$\left|\sum_{i=1}^{m_j}|\alpha_i|^r - \frac{j}{n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right| < \frac{1}{2n}(1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r.$$

$(j=1,\cdots,n)$，记 $m_0=0, u_j=\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j}|\alpha_i|^r$，则 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i=\sum_{j=1}^{n}u_j$，

这意味着

$$\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r<\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j}|\alpha_i|^r<\frac{2-\lambda}{n}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r<\frac{1}{n\lambda}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^r.$$

并且

$$\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j}|\alpha_i|^r>\lambda^2\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}|\alpha_i|^r.$$

于是对于每个 j，

$$\frac{\lambda}{\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{1/r}}<M\leqslant\frac{\|u_j\|}{\left(\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}|\alpha_i|^r\right)^{1/r}}$$

$$<\frac{\|u_j\|}{\lambda^{2/r}\left[\sup_k\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m}|\alpha_i|^r\right]^{1/r}}<\frac{\|u_j\|}{\lambda^3\left(\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|^r\right)^{1/r}},$$

所以 $\|u_j\|\geqslant\lambda^4$.

另一方面，由于 $\lambda^4>\frac{4\alpha^2}{\beta^2}$，故对于任何 $k\leqslant n$，

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i\right\|\geqslant\frac{\beta}{2}\|\alpha_k u_k\|\geqslant\frac{\beta\lambda^4}{2}|\alpha_k|\geqslant\frac{2\alpha^2}{\beta}|\alpha_k|=\alpha'|\alpha_k|.$$

由于

$$1=\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}u_j\right\|\geqslant\beta\left\|\sum_{j=1}^{k}u_j\right\|,$$

故得 $\left\|\sum_{j=1}^{k}u_j\right\|\leqslant\frac{1}{\beta}=\beta'$，$u_1,\cdots,u_n$ 即为所求.

同样地可以证明(见 Beauzamy[1])

定理 4 设 X 是超自反空间，$0<\beta\leqslant1<\alpha$，则存在 s，$1<s<\infty$ 使得若 $\{e_i\}$ 是 X 中任一规范基序列，基常数 $\geqslant\beta$，只要 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$ 收敛就有

$$\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \| \leqslant \alpha \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^s \Big)^{1/s}. \tag{4.16}$$

推论 4 若 X 是超自反空间，则存在常数 $c>0$ 和 $p(1<p<\infty)$ 使得对于 X 中的任何单调基序列 $\{x_n\}$，

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p \Big)^{1/p} \leqslant c \| \sum_{i=1}^{n} x_i \|. \tag{4.17}$$

推论 5 设 X 是超自反空间，则存在 $c>0$ 和 $r>1, q<\infty$ 使得 X 中的每个基序列 $\{x_n\}$ 满足

$$c^{-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^q \Big)^{1/q} \leqslant \| \sum_{i=1}^{n} x_i \| \leqslant c \Big(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^r \Big)^{1/r}, \forall\, n \geqslant 1.$$

其中 c 仅与基常数有关.

定理 5 (Pisier) 设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 是超自反空间.

(ii) 对于任何 $\alpha, 1<\alpha<\infty$，存在 $c>0$ 和 $r<\infty$ 使得所有 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \| df_n \|_{\alpha}^r \Big)^{1/r} \leqslant c \sup_n \| f_n \|_{\alpha}. \tag{4.18}$$

(iii) 对于任何 $\alpha, 1<\alpha<\infty$，存在 $c>0$ 和 $r>1$ 使得所有 X 值鞅 $f=(f_n)$ 满足

$$\sup_n \| f_n \|_{\alpha} \leqslant c \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \| df_n \|_{\alpha}^r \Big)^{1/r}. \tag{4.19}$$

证明 (i)对于(ii)、(iii)的充分性是因为推论 3 和 $\{df_n, n\geqslant 0\}$ 构成 $L_\alpha(p,X)$ 的单调基序列这一事实. 然后，推论 4 导致(4.18)，类似地由推论 3 得到(4.19).

(iii)⇒(i) 若 X 不是超自反的，则 X 具有有限树性质，而每一个有限树可以构造一个 WP 鞅(Ⅱ. §2) $f=(f_n)$ 满足

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \| f_k \|_{\infty} \leqslant 1, \inf_{1\leqslant k\leqslant n} \| df_k(\omega) \| \geqslant \varepsilon > 0.$$

代入(4.18) 得到

$$n^{1/r} \varepsilon \leqslant c.$$

n 可以任意大，矛盾.

(iv)⇒(i) 若 X 不是超自反的,则 X^* 也不是超自反的,于是存在 X^* 值 WP 鞅 $g=(g_n)$,使得

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\|g_k\|_\infty\leqslant 1,\ \inf_{1\leqslant k\leqslant n}\|dg_k(\omega)\|\geqslant\varepsilon>0.$$

由 df_k 是 $\mathscr{B}_{n-1}$ 可测的,对于每个 $\theta>0$,取 $\mathscr{B}_{k-1}$ 可测 $R.V.\ h_{k-1}$,其值在 X 的单位球中使得

$$(h_{k-1}(\omega),\varepsilon_k dg_k(\omega))\geqslant\varepsilon-\theta,\forall\ \omega\in\Omega.\ k=1,\cdots,n.$$

其中 ε_k 为适当常数,当 $m\geqslant n$ 时定义 $f_m=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k h_{k-1}$,则由 g 的鞅性质

$$n(\varepsilon-\theta)\leqslant\sum_{k=1}^{n}E(df_k,dg_k)=E(f_n,g_n)\leqslant E\|'f_n\|.$$

另一方面 $\|f_n(\omega)\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|h_i(\omega)\|\leqslant n,\forall\ \omega\in\Omega$. 与上式结合起来,选取 ε 足够接近 1,θ 足够接近 0,则必有

$$\inf_{\omega\in\Omega}\|f_n(\omega)\|\geqslant\frac{n}{2}.$$

若(4.19)成立,则得到

$$\frac{n}{2}\leqslant c\cdot n^{1/r},$$

$r>1$ 这是不可能的.

定理 6 设 X 是 Banach 空间,则以下条件等价:

(i) X 是超自反的.

(ii) 对于每个 X 值 Walsh-Paley 鞅 $f=(f_n)$,若 $\sup_{n\geqslant 1}\|df_n\|_\infty<\infty$,则 $n^{-1}f_n\to 0\ a.e.$

证明 由 § 3 推论 1、(i)⇒(ii)是显然的. 为证(ii)⇒(i),不妨假定 X 不是超自反的,我们将构造一个 WP 鞅使得 $\sup_n\|df_n\|_\infty\leqslant 1$,但对于 $\forall\ \omega\in\Omega$,$\limsup_{n\to\infty}n^{-1}\|f_n\|>0$.

由定理 5 的证明,当 X 不是超自反空间时,对每个 n,存在 WP 鞅 $f=(f_n)$ 使得

$$\sup_{1\leq k\leq n}\| df_k \|_\infty \leqslant 1, \| f_n(\omega) \| \geqslant \frac{n}{2}, \forall\ \omega \in \Omega.$$

现在我们要构造一个新鞅，记上面相对于 n^n 的鞅差为

$$(df_1^{(n)}, \cdots, df_{n^n}^{(n)}), (f_0^{(n)} = 0).$$

定义 $g=(g_n)$，其中 $dg_j=df_i^{(n)}$，若 $j=k_n+i, i=1,\cdots,(n+1)^{n+1}$，$k_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n$. 注意对于 g 来说仍有 $\sup\limits_{j\geq 1}\| dg_j \|_\infty\leqslant 1$. 而由于

$$\frac{f_{n^n}(\omega)}{n^n} \geqslant \frac{1}{2}, \forall\ \omega \in \Omega.$$

故

$$\begin{aligned}
\| g_{k_n}(\omega) \| &= \| \sum_{i=1}^{k_n} dg_i(\omega) \| \\
&\geqslant \| \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} dg_i(\omega) \| - \| \sum_{i=1}^{k_{n-1}} dg_i(\omega) \| \\
&\geqslant \| f_{n^n}(\omega) - \sum_{i=1}^{k_{n-1}} \| dg_i(\omega) \| \\
&\geqslant \frac{1}{2}n^n - k_{n-1} \geqslant \frac{1}{n}n^n - (n-1)^n,
\end{aligned}$$

$$\frac{\| g_{k_n}(\omega) \|}{k_n} \geqslant \frac{\| g_{k_n}(\omega) \|}{2n^n} \geqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{n})^n),$$

所以

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\| g_n(\omega) \|}{n} \geqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}) > 0, \forall\ \omega \in \Omega.$$

现在我们转到 Banach 空间的超幂空间.

设 $(X_i)_{i\in I}$ 是指标集 I 上的一族 Banach 空间. $\mathscr{U}$ 是 I 上的非平凡超渗透，特别地记

$$\begin{aligned}
&l^\infty(X_i, i \in I) \\
&\quad = \{x = (x_i), x_i \in X_i, \| x \| = \sup_{i\in I} \| x_i \| < \infty\}, \\
&M = \{x \in l^\infty(X_i, i \in I), \lim_{\mathscr{U}} x_i = 0\}.
\end{aligned}$$

则称商空间 $l^{\infty}(X_i, i\in I)/M$ 或 $l^{\infty}(X_i, i\in I)/\mathscr{U}$ 为 $(X_i)_{i\in I}$ 的超幂空间. 若 $X_i=X, I=N$，此超幂 空间简记为 $X^N/\mathscr{U}$，今后以 $\widetilde{X}$ 代表此空间. 我们有

1° $\widetilde{X}$ 是 Banach 空间.

这是因为 X^N 是完备空间，M 是闭子空间.

2° $\widetilde{X}$ 包含有同构于 X 的子空间.

取 $\widetilde{x}=(x,x,\cdots,)$，则 $\widetilde{x}\in\widetilde{X}$ 并且 $\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{X}}=\lim\limits_{\mathscr{U}}\|x\|=\|x\|$.

3° 若 X 是无穷维的，则 $\widetilde{X}$ 不是可分的.

由 Riesz 引理，取 $x_n\in X$，$\|x_n\|=1$，$\|x_n-x_m\|>\frac{1}{2}$，考虑由 $\{x_n\}$ 的子序列构成的不可数族 Y，其中任两个不同子列仅有限多个公共元. 例如若 $y_1=(x_{nk})$，$y_2=(x_{nk'})\in Y$，则

$$\|y_1-y_2\|_{\widetilde{X}}=\lim_{\mathscr{U}}\|x_{nk}-x_{nk'}\|>\frac{1}{2}.$$

Y 不是可数的，所以 $\widetilde{X}$ 不是可分的.

定理 7 $\widetilde{X}$ 在 X 中有限可表现.

证明 设 $\widetilde{X}_m$ 是 $\widetilde{X}$ 的子空间，$\dim\widetilde{X}_m=m$. 不妨设 $z^{(1)},\cdots,z^{(m)}$ 是 $\widetilde{X}_m$ 的规范代数基，由于是有限维的，故有 $\delta>0$，使得

$$\delta\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i z^{(i)}\right\|_{\widetilde{X}}\leqslant\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|, \forall\ \alpha_i, \qquad (4.20)$$

$l_1^{(m)}$ 的单位球面是紧的，从而是完全有界的，对于任何 $\eta>0$，存在 $(\alpha_1^{(j)},\cdots,\alpha_m^{(j)})$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ 构成它的 η 网，$\sum\limits_{i=1}^{m}|\alpha_i^{(j)}|=1$，不妨设 $l_1^{(m)}$ 的标准基也在此网中，若 $Z^{(j)}=(z_1^{(j)}, z_2^{(j)},\cdots)$ $(1\leqslant j\leqslant k)$，由 $\widetilde{X}$ 的定义

$$\lim_{\mathscr{U}}\left\|\sum_{s=1}^{m}\alpha_s^{(j)}z_i^{(s)}\right\|=\left\|\sum_{s=1}^{m}\alpha_s^{(j)}Z^{(s)}\right\|_{\widetilde{X}},$$

故 $\exists\ i_0$ 使得

$$\left|\left\|\sum_{s=1}^{m}\alpha_s^{(j)}z_{i_0}^{(s)}\right\|-\left\|\sum_{s=1}^{m}\alpha_s^{(j)}z_i^{(s)}\right\|_{\widetilde{X}}\right|<\eta, 1\leqslant j\leqslant k.$$

特别地

$$\| z_{i_0}^{(s)} \| \leqslant 1 + \eta \ (s = 1, \cdots, m).$$

若 $\sum_{s=1}^{m} |\alpha_s| = 1$，在 ϵ 网中存在元素，例如是 $(\alpha_1^{(j)}, \cdots, \alpha_m^{(j)})$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ 使得 $\sum_{s=1}^{m} |\alpha_s - \alpha_s^{(j)}| < \eta$，则

$$\begin{aligned} \left| \| \sum_{s=1}^{m} \alpha_s z_{i_0}^{(j)} \| - \| \sum_{s=1}^{m} \alpha_s Z^{(s)} \|_{\tilde{X}} \right| &< \eta + \sum_{s=1}^{m} |\alpha_s - \alpha_s^{(j)}| \, \| z_{i_0}^{(s)} \| \\ &\quad + \sum_{s=1}^{m} |\alpha_s - \alpha_s^{(j)}| \, \| Z^{(s)} \|_{\tilde{X}} \\ &< \eta + \eta(1 + \eta) + \eta \leqslant 3\eta + \eta^2. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{s=1}^{m} |\alpha_s| = 1$，由(4.20) 上式

$$\leqslant \frac{3\eta + \eta^2}{\delta} \| \sum_{s=1}^{m} \alpha_s Z^{(s)} \|_{\tilde{X}},$$

从而

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{3\eta + \eta^2}{\delta}\right) \| \sum_{s=1}^{m} \alpha_s Z^{(s)} \|_{\tilde{X}} &\leqslant \| \sum_{s=1}^{m} \alpha_s z_{i_0}^{(s)} \| \\ &\leqslant \left(1 + \frac{3\eta + \eta^2}{\delta}\right) \| \sum_{s=1}^{m} \alpha_s Z^{(s)} \|_{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

定义 $TZ^{(j)} = z_{i_0}^{(j)} (1 \leqslant j \leqslant m)$，则

$$\| T \| \leqslant 1 + \frac{3\eta + \eta^2}{\delta}, \quad \| T^{-1} \| \leqslant \left(1 - \frac{3\eta + \eta^2}{\delta}\right)^{-1}.$$

T 是所需要的同构映射.

定理 8 若 X 有有限树性质，则 $\tilde{X}$ 有无穷树性质.

证明 对于任意 $n \geqslant 1$，设 $(x_{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n}^{(n)})_{\epsilon_i = \pm 1, 1 \leqslant i \leqslant n}$ 是 X 的 (n, δ) 枝，定义序列 $(z_{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n}^{(i)})_{i \geqslant 1}$ 如下：

$$z_{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n}^{(i)} = \begin{cases} 0, & i < n \\ \dfrac{1}{2^{i-n}} \sum\limits_{\substack{\epsilon_j = \pm 1 \\ n < j \leqslant i}} x_{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_i}^{(i)}, & i \geqslant n \end{cases} \tag{4.21}$$

这有 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 取 ±1 值，例如

$$z_{+1}^{(1)}=x_{+1}^{(1)},z_{-1}^{(1)}=x_{-1}^{(1)},$$

$$z_{+1}^{(2)}=\frac{1}{2}(x_{+1,+1}^{(2)}+x_{+1,-1}^{(2)},z_{-1}^{(2)}=\frac{1}{2}(x_{-1,+1}^{(2)}+x_{-1,-1}^{(2)}).$$

$$z_{+}^{(3)}=\frac{1}{4}(x_{+1,+1,+1}^{(3)}+x_{+1,+1,-1}^{(3)}+x_{+1,-1,+1}^{(3)}+x_{+1,-1,-1}^{(3)}).$$

$$z_{-}^{(3)}=\frac{1}{4}(x_{-1,+1,+1}^{(3)}+x_{-1,+1,-1}^{(3)}+x_{-1,-1,+1}^{(3)}+x_{-1,-1,-1}^{(3)}).$$

又

$$z_{+1,+1}^{(1)}=0,z_{+1,+1}^{(2)}=x_{+1,+1}^{(2)},z_{+1,+1}^{(3)}=\frac{1}{2}(x_{+1,+1,+1}^{(3)}+x_{+1,+1,-1}^{(3)})$$

等等.

由于 $\|x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}^{(i)}\|\leqslant1$，由(4.21)得出 $\|z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}^{(i)}\|\leqslant1$. $j\geqslant n$ 时，

$$\|z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},+1}^{(i)}-z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},-1}^{(i)}\|=$$

$$\|\frac{1}{2^{i-n}}\sum x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},+1,\varepsilon_{n+1},\cdots,\varepsilon_i}^{(i)}-\frac{1}{2^{i-n}}\sum x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},-1,\varepsilon_{n+1},\cdots,\varepsilon_i}^{(i)}\|$$

$$\geqslant\delta,$$

于是

$$\begin{aligned}&\|z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},+1}-z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},-1}\|_{\tilde{X}}\\&=\lim_{\mathscr{U}}\|z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},+1}^{(i)}-z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1},-1}^{(i)}\|\geqslant\delta.\end{aligned}$$

若 $i\geqslant n+1$，则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Bigg[\frac{1}{2^{i-(n+1)}}\sum_{\substack{\varepsilon_j=\pm1\\n+1<j\leqslant i}}x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,+1,\varepsilon_{n+2},\cdots,\varepsilon_i}^{(i)}\\&+\frac{1}{2^{i-(n+1)}}\sum_{\substack{\varepsilon_j=\pm1\\n+1<j\leqslant i}}x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,-1,\varepsilon_{n+2},\cdots,\varepsilon_i}^{(i)}\Bigg]=\frac{1}{2^{i-n}}\sum_{\substack{\varepsilon_j=\pm1\\n<j\leqslant i}}x_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_i}^{(i)}.\end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{2}(z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,+1}^{(i)}+z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,-1}^{(i)})=z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}^{(i)}$，同时

$$\frac{1}{2}(z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,+1}+z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n,-1})=z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}.$$

即 $(z_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n})_{\varepsilon_1=\pm1,\cdots,\varepsilon_n=\pm1}^{n\geqslant1}$ 是 $\tilde{X}$ 中无穷 δ 树.

定理 9 X 是超自反的当且仅当 $\tilde{X}$ 是自反的.

证明 由定理 7 知道必要性成立. 为证充分性，设 $\tilde{X}$ 是自反的. 若 X 不是超自反的，则其中包含有有限树，由定理 8，$\tilde{X}$ 中有无穷 δ 树，第 Ⅱ 章已指出此时 $\tilde{X}$ 不具有 RN 性质，更不是自反的，得出矛盾.

超自反空间还具有一系列超性质，这里我们仅介绍超 RN 性质，超平稳性、超遍历性等.

定义 3 Banach 空间 X 称为具有 Banach-Saks 性质，若 X 中任一有界序列 $\{x_n\}$ 存在有子序列 $\{x_{n_i}\}$ 使得其算术平均是收敛的，$\exists\ x\in X$，$x=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}(x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})$.

容易知道，Banach-Saks 性质是同构不变的. 已经证明一致凸空间具有 Banach-Saks 性质，具有 Banach-Saks 性质的空间是自反的. 现在我们有下述定理.

定理 10 设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 是超自反的.

(ii) X 具有超 Banach-Saks 性质.

(iii) X 具有超 RN 性质.

证明 (i)⇒(ii) 将 X 赋予等价范数使之成为一致凸空间，则每个在其中有限可表现的 Banach 空间也是一致凸的，从而都具有 Banach-Saks 性质，由于 Banach-Saks 性质是同构不变的，因此 X 具有超 Banach-Saks 性质.

(ii)⇒(iii) 是因为 Banach-Saks 性质蕴含 RN 性质.

(iii)⇒(i) 若 X 不是超自反空间，则 X 具有有限树性质，于是 $\tilde{X}$ 具有无穷 δ 树，$\tilde{X}$ 不具有 RN 性质，但 $\tilde{X}$ 在 X 中有限可表现，所以 X 也不会具有超 RN 性质，矛盾.

关于下面概念和结论可参看 A. Brunel 和 L. Sucheston[1]，也可参看 A. Brunel[1]. 这里仅作介绍而不加证明.

定义 4 (i) Banach 空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为平稳的，若

$\exists\, x_0 \in X$，使得对于任何子列$\{x_{n_k}\}$一致地有

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{k}(x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}) - x_0 \right\| = 0.$$

X 称为具有平稳性质，若 X 中任何有界序列存在子列是平稳的.

(ii) Banach 空间 X 称为具有遍历性质，若对于 X 上的任一等距算子 U 和 $x \in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x+Ux+\cdots+U^{n-1}x)$ 存在.

显然平稳性蕴含 Banach-Saks 性质. Erdös 与 Magidor 证明了实际上二者是等价的，此外自反性蕴含着遍历性，Brunel 与 Sucheston[11]还证明了下面结果.

定理 11 对于 Banacd 空间 X，下列条件等价.

(i) X 是超自反的.

(ii) X 是超平稳的.

(iii) X 是超遍历的.

VIII. B 值鞅不等式与鞅空间

象 H_p 空间在经典调和分析中的情况一样，鞅空间理论是现代鞅论的重要部分. 在实值的情况，这一理论已发展成系统的学科分支. 实值鞅空间的许多重要结果都是与均方函数 $S^{(2)}(f)$ 或条件均方函数 $\sigma^{(2)}(f)$ 有关的. Herz，Pisier 等人得到了 B 值情况的某些结论. 在 B 值情况，代替 $S^{(2)}(f)$ 与 $\sigma^{(2)}(f)$ 将考虑更为一般的 $S^{(p)}(f)$ 与 $\sigma^{(p)}(f)$ $(1\leqslant p<\infty)$，并且这里的 p 具有 Banach 空间几何学的意义，即它是值空间一致凸或一致光滑的指标. 本章我们将首先给出某些予备知识，然后介绍 Burkholder-Gundy 和 Davis 型不等式，讨论若干类型的鞅空间的相互关系，鞅空间上若干算子的有界性，还将应用鞅的上下函数与微分从属给出 Hilbert 空间的刻划，给出 Fefferman 不等式和 $a\widetilde{H}p$ 的共轭空间. 在叙述了正规鞅的一般 Φ 不等式之后将建立 B 值鞅的加权不等式和内插空间.

§1 预备知识　若干引理

在本章叙述的一些不等式中，有一类是与 Φ 函数有关的. 我们这里将罗列 Φ 函数的一些性质. 在这方面的参考文献见 $\text{Long}_{[1]}$，$\text{Wu}_{[1]}$等.

所谓 Φ 函数是指 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$，$\Phi(0)=0$ 的函数. 这里用到的 Φ 函数有以下三种类型：

(1) 一般 Φ 函数. $\Phi(t)$ 是$[0,\infty)$上的增加连续函数. 对于一般 Φ 函数可以建立 Stilltjes 积分

$$\int_0^\infty \xi(t)d\Phi(t)$$

特别地当 $\xi(t)\geqslant 0$ 时,其值为有限或无穷.

(2) 凸 Φ 函数. Φ 是 $[0,\infty)$ 上的增加凸函数. 规范化的 $\Phi'(t)=\varphi(t)$ 是左连续的并且 $\varphi(0)=\varphi(0+)$. 今后对于此种 Φ 函数都作此规范假定. 特别地,若还有 $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\Phi(t)=\infty$,则称之为 Young 函数. Φ 称为限制增长的,若存在 $c>0$ 使得 $\Phi(2t)\leqslant c\Phi(t)$, $\forall\ t>0$.

(3) 严格凸函数. Young 函数称为严格凸的,若 $\inf\limits_{t>0}\dfrac{t\varphi(t)}{\Phi(t)}>1$.

对于凸 Φ 函数,特别是 Young 函数,有一些反映其特性的指标应予注意. 为此考虑 Φ 的补函数 $\Psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$,

$$\psi(t)=\inf\{s,\varphi(s)\geqslant t\},\Psi(t)=\int_0^\infty \psi(s)ds.$$

当 Φ 为 Young 函数时,$\Psi(t)$ 明显地有意义. 令

$$p_\Phi=\sup_{t>0}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)},\ q_\Phi=\inf_{t>0}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)},\ q'_\Phi=\frac{q_\Phi}{q_\Phi-1}. \tag{1.1}$$

1° Young 不等式:

$$uv\leqslant\Phi(u)+\Psi(v),\quad \forall\ u,v\geqslant 0$$

等号成立当且仅当 $u=\psi(v)$ 或者 $v=\varphi(u)$.

2° 限制增长系数: 记

$$c=\sup_{t>0}\frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)},\ c_a=\sup_{t>0}\frac{\Phi(at)}{\Phi(t)},$$

则 $c<\infty\Leftrightarrow c_a<\infty\ (a>1)\Leftrightarrow p_\Phi<\infty$. 实际上若 $c<\infty$ 则 $p_\Phi\leqslant c-1$.

3° 补函数的增长指标: $p_\Psi=q'_\Phi$. 关于这一点,首先由 Dellacherie 证明了 $p_\Psi\leqslant q'_\Phi$,龙瑞麟[2]证明了相反的不等式. 此外,Φ 的 Young 补函数 Ψ 限制增长当且仅当 $q_\Phi>1$,即 Φ 严格凸.

4° 单调性质:

$\Phi(\lambda t)\leqslant\lambda\Phi(t)$, $\forall\ \lambda\leqslant 1$.

$\lambda\Phi(t)\leqslant\Phi(\lambda t)\leqslant\lambda^p\Phi(t)$, $\forall\ \lambda\geqslant 1$, $p=p_\Phi<\infty$.

$p=p_\Phi<\infty$ 时,$\dfrac{\Phi(t)}{t^p}$ 关于 t 单调下降.

$q=q_\Phi<\infty$ 时,$\dfrac{\Phi(t)}{t^q}$ 关于 t 单调增加.

5° 对于 Young 函数 Φ、考虑(Ω,Σ,μ)上定义的 Banach 空间值函数空间 $L_\Phi(\mu,X)=\{f,\|f\|_\Phi<\infty\}$，其中

$$\|f\|_\Phi=\inf\{\lambda>0,E\Phi\left(\frac{\|f(\omega)\|}{\lambda}\right)\leqslant 1\}.$$

当 Φ 是限制增长函数时，$L_\Phi(\mu,X)$是 Banach 空间，$\|\cdot\|_\Phi$ 是其中的范数. $L_\Phi(\mu,X)$上还可以定义另一范数

$$\|f\|_{(\Phi)}=\sup_{E\Psi(\|g(\omega)\|)\leqslant 1}\int_\Omega f(\omega)g(\omega)d\mu,$$

其中 $g(\omega)$是取值于 X 的共轭空间 X^* 的可测函数，关于这两种范数有

$$\|f\|_\Phi\leqslant\|f\|_{(\Phi)}\leqslant 2\|f\|_\Phi,f\in L_\Phi(\mu,X).$$

6° 当 $f\in L_\Phi(\mu,X)$， $g\in L_\Psi(\mu,X^*)$时，

$$\left|\int_\Omega f(\omega)g(\omega)d\mu\right|\leqslant\|f\|_{(\Phi)}\|g\|_\Psi,$$

特别地

$$\left|\int_\Omega f(\omega)g(\omega)d\mu\right|\leqslant\max\{E\Psi(\|g\|),1\}\|f\|_{(\Phi)}.$$

7° $E\Phi(\|f\|_\Phi^{-1}\|f(\omega)\|)\leqslant 1.$

当 $\|f\|_\Phi\leqslant 1$ 时，$E\Phi(\|f\|)\leqslant\|f\|_\Phi$，

当 $\|f\|_\Phi\geqslant 1$ 时，$E\Phi(\|f\|)\geqslant\|f\|_\Phi$.

自然地，Orlicz 空间的性质与函数 Φ 直接有关. 例如对于实值函数的 Orlicz 空间 L_Φ,L_Φ 是自反的当且仅当 Φ 及其 Young 补函数 Ψ 都是限制增长的.

现在让我们转到关于 Φ 函数积分的若干引理.

引理 1 设 Φ 是限制增长的 Young 函数，ξ,η 是非负 $R.V.$，满足

$$E\xi\varphi(\xi)<\infty,\ E\xi\varphi(\xi)\leqslant E\eta\varphi(\xi)+C_\eta,\tag{1.2}$$

其中 C_η 是仅与 η 有关的常数，则

$$E\Phi(\xi)\leqslant E\Phi(\eta)+C_\eta.\tag{1.3}$$

证明 根据上面 1°,

$$\xi\varphi(\xi)=\Phi(\xi)+\Psi(\varphi(\xi)),$$
$$\eta\varphi(\xi)\leqslant\Phi(\eta)+\Psi(\varphi(\xi)),$$

对两式分别积分,由(1.2)便得到(1.3).

引理 2 (Garsia-Neveu) 对于非负 $R.V.\ \xi,\eta$,

$$\int_{\{\xi>\lambda\}}(\xi-\lambda)d\mu\leqslant\int_{\{\xi>\lambda\}}\eta d\mu\ (\forall\ \lambda\geqslant 0)\tag{1.4}$$

当且仅当对任何凸 Φ 函数有

$$E\Phi(\xi)\leqslant E\varphi(\xi)\eta.\tag{1.5}$$

证明 (1.5)⇒(1.4) 取 $\varphi(t)=\chi_{\{t>\lambda\}}$,则 $\Phi(t)=(t-\lambda)^+$ 从而

$$\int_{\{\xi>\lambda\}}(\xi-\lambda)d\mu=E(\xi-\lambda)^+=E\Phi(\xi)$$
$$\leqslant E\varphi(\xi)\eta=\int_{\{\xi>\lambda\}}\eta d\mu.$$

(1.4)⇒(1.5) 对(1.4)两边关于 $d\varphi(\lambda)$ 积分,则

$$\int_0^\infty\int_{\{\xi>\lambda\}}(\xi-\lambda)d\mu d\varphi(\lambda)\leqslant\int_0^\infty\int_{\{\xi>\lambda\}}\eta d\mu d\varphi(\lambda)\tag{1.6}$$

由于 φ 的左连续性,左端等于

$$\iint_\Omega\int_0^\xi(\xi-\lambda)d\varphi(\lambda)d\mu=E\left[(\xi-\lambda)\varphi(\lambda)\big|_{\lambda=0}^{\lambda=\xi}+\int_0^\xi\varphi(\lambda)d\lambda\right]$$
$$=E(\Phi(\xi)-\xi\varphi(0)).$$

左端等于

$$E\int_0^\xi d\varphi(\lambda)=E\eta(\varphi(\xi)-\varphi(0))$$

注意 (1.4)当 $\lambda=0$ 时得出 $E\xi\leqslant E\eta$,于是代入(1.6) 得到(1.5).

推论 1 设(A_n)是非负增加适应序列,$Y\geqslant 0$,并且对于每个 $n\geqslant 0$,

$$E(A_\infty-A_{n-1}|\mathscr{B}_n)\leqslant E(Y|\mathscr{B}_n)\tag{1.7}$$

则对于任何凸 Φ 函数有

$$E\Phi(A_\infty)\leqslant E\varphi(A_\infty)Y.\tag{1.8}$$

若 Φ 是限制增长的 Young 函数，则

$$E\Phi(A_\infty) \leqslant p_\Phi E\Phi(Y). \tag{1.9}$$

证明 令 $\tau=\inf\{n, A_n>\lambda\}$ $(\lambda>0)$，则 $A_{\tau-1}\leqslant\lambda$($\tau=0$ 时记 $A_{\tau-1}=0$)，$A_\infty-\lambda\leqslant A_\infty-A_{\tau-1}$. 由于(1.7)对于任意 τ 也成立，故

$$\begin{aligned}\int_{\{A_\infty>\lambda\}}(A_\infty-\lambda)d\mu &\leqslant \int_{\{\tau<\infty\}}(A_\infty-A_{\tau-1})d\mu\\ &= \int_{\{\tau<\infty\}}E(A_\infty-A_{\tau-1}|\mathscr{B}_\tau)d\mu\\ &\leqslant \int_{\{\tau<\infty\}}E(Y|\mathscr{B}_\tau)d\mu=\int_{\{\tau<\infty\}}Yd\mu\end{aligned}$$

即(1.4)成立，其中 $A_\infty=\xi, Y=\eta$. 由引理 2 得出(1.5)，即(1.8)成立. 由于 $t\varphi(t)\leqslant p_\Phi\Phi(t), \forall\ t>0$，则(1.8)和引理 1 给出(1.9).

推论 2 (Garsia) 设 Φ 是限制增长的 Young 函数，(Z_n)是非负 $R.V.$ 序列，$(\mathscr{B}_n)$是递增子 σ 代数序列，则存在 $c>0$ 使得

$$E\Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty}E(Z_n|\mathscr{B}_n)\Big)\leqslant c\Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty}Z_n\Big) \tag{1.10}$$

证明 不妨设右端是有限的并且记

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}E(Z_i|\mathscr{B}_i), B_n=\sum_{i=1}^{n}Z_i.$$

由于

$$\begin{aligned}E(A_\infty-A_{n-1}|\mathscr{B}_n) &= E\Big(\sum_{i=n}^{\infty}E(Z_i|\mathscr{B}_i)|\mathscr{B}_n\Big)\\ &= E\Big(\sum_{i=n}^{\infty}Z_i|\mathscr{B}_n\Big)\leqslant E(B_\infty|\mathscr{B}_n),\end{aligned}$$

由推论 1 即得出所要的结论.

命题 (Neveu) 设(u_n)是与递增 σ 代数序列$(\mathscr{B}_n)$适应的 $R.V.$ 序列，$u_n\geqslant 0$，$A_n=\sum_{i=1}^{n}E(u_i|\mathscr{B}_{i-1})$，$B_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$，若 $E(\sup_{n\geqslant 1}u_n)<\infty$，则$\{A_\infty<\infty\}=\{B_\infty<\infty\}$ $a.e.$

证明 对于 $\lambda>0$. 定义 $\tau=\inf\{n, A_{n+1}>\lambda\}$，则

$$EB_\tau = \sum_{i=1}^{\tau} u_i = E\sum_{i=1}^{\infty} u_i \chi_{\{\tau\geqslant i\}} = E\sum_{i=1}^{\infty} E(u_i \chi_{\{\tau\geqslant i\}} | \mathscr{B}_{i-1}),$$

$$E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} E(u_i | \mathscr{B}_{i-1}) \chi_{\{\tau\geqslant i\}}\Big) = EA_\tau \leqslant \lambda.$$

于是 $B_\tau < \infty$ $a.e.$ 即在 $\{\tau=\infty\}=\{A_\infty\leqslant\lambda\}$ 上，$B_\infty<\infty$ $a.e.$ λ 是任意的，故$\{A_\infty<\infty\}\subset\{B_\infty<\infty\}$ $a.e.$

反过来定义 $\tau=\inf\{n, B_n>\lambda\}$，则

$$EA_\tau = E\sum_{i=1}^{\tau} E(u_i | \mathscr{B}_{i-1}) = E\sum_{i=1}^{\infty} E(u_i \chi_{\{\tau\geqslant i\}} | \mathscr{B}_{i-1})$$

$$= E\sum_{i=1}^{\tau} u_i = E(B_{\tau-1} + u_\tau) \leqslant \lambda + Ed^* \tag{1.11}$$

其中 $d^* = \sup\limits_{n\geqslant 1} u_n$，由于 $Ed^* < \infty$ 所以 $A_\tau < \infty$ $a.e.$ λ 是任意的，故最终得到$\{B_\infty<\infty\}\subset\{A_\infty<\infty\}$ $a.e.$

下面引理的表述形式和证明是由龙瑞麟给出的.

引理 3 设 Φ 是限制增长的严格凸函数，即 $1<q_\Phi\leqslant p_\Phi<\infty$，$\xi,\eta$ 是非负 $R.V.$ 满足

$$\lambda\mu(\xi > \alpha\lambda) \leqslant \int_{\{\xi>\beta\lambda\}} \eta d\mu, \forall\ \lambda > 0 \tag{1.12}$$

其中 $\alpha\geqslant\beta>0$，则

$$E\left(\frac{\xi}{\alpha}\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right) \leqslant C_{\alpha,\beta,\Phi} q_\Phi' E\eta\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right), \tag{1.13}$$

并且

$$\|\xi\|_\Phi \leqslant \alpha C_{\alpha,\beta,\Phi} q_\Phi' \|\eta\|_\Phi. \tag{1.14}$$

当 $\alpha=\beta$ 时，$C_{\alpha,\beta,\Phi}=1$ 并且不需要 $p_\Phi<\infty$.

证明 对(1.12)两端关于 $d\varphi(\lambda)$ 积分得到

$$\int_0^\infty \lambda \int_{\{\xi>\alpha\lambda\}} d\mu d\varphi(\lambda) \leqslant \int_0^\infty \int_{\{\xi>\beta\lambda\}} \eta d\mu d\varphi(\lambda)$$

即

$$E\int_0^{\frac{\xi}{\alpha}} \lambda d\varphi(\lambda) \leqslant E\eta \int_0^{\frac{\xi}{\beta}} d\varphi(\lambda)$$

或者

$$E\left(\frac{\xi}{\alpha}\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right)-E\Phi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\leqslant E\eta\varphi\left(\frac{\xi}{\beta}\right) \tag{1.15}$$

由于 $\Phi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\leqslant\frac{1}{q_\Phi}\frac{\xi}{\alpha}\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$，又$\frac{\Phi(t)}{t^p}$是 t 的下降函数，从而

$$\varphi(\gamma t)\leqslant p\frac{\Phi(\gamma t)}{\gamma t}\leqslant p(\gamma t)^{p-1}\frac{\Phi(t)}{t^p}\leqslant p\gamma^{p-1}q^{-1}\varphi(t) \tag{1.16}$$

（这里 $\gamma\geqslant 1$，$p=p_\Phi$，$q=q_\Phi$，下同），$\forall\ t>0$. 代入(1.15)得到

$$E\left(\frac{\xi}{\alpha}\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right)\leqslant\frac{q}{q-1}pq^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{p-1}E\eta\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \tag{1.17}$$

若 $\alpha=\beta$，直接从(1.15)式得到

$$E\left(\frac{\xi}{\alpha}\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\right)\leqslant q'E\eta\varphi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$$

为得到(1.14)，注意对于任何实数 $N>0$，若 ξ,η 满足(1.12)，则 $\xi\wedge N,\eta\wedge N$ 也满足(1.12). 实际上当 $N>\alpha t$ 时，

$$\{\xi\wedge N>\alpha t\}=\{\xi>\alpha t\},\{\xi\wedge N>\beta t\}=\{\xi>\beta t\}.$$

当 $N\leqslant\alpha t$ 时，$P(\xi\wedge N>\alpha t)=0$. 故由上面证明知道

$$E\left(\frac{\xi\wedge N}{\alpha}\varphi\left(\frac{\xi\wedge N}{\alpha}\right)\right)\leqslant q'pq^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{p-1}E\eta\left(\frac{\xi\wedge N}{\alpha}\right).$$

利用引理 1 得到

$$E\Phi\left(\frac{\xi\wedge N}{\alpha}\right)\leqslant E\Phi(q'C_{\alpha,\beta,\Phi}\eta)$$

令 $N\to\infty$ 得到

$$E\Phi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)\leqslant E\Phi(q'C_{\alpha,\beta,\Phi}\eta)$$

又对于$\forall\ c>0$，$c\xi$，$c\eta$ 也满足(1.12)从而

$$E\Phi\left(\frac{c\xi}{\alpha}\right)\leqslant E\Phi(q'C_{\alpha,\beta,\Phi}c\eta).$$

特别地取 $c=\|q'C_{\alpha,\beta,\Phi}\eta\|_\Phi^{-1}$，则

$$E\Phi\left(\frac{c\xi}{\alpha}\right)\leqslant E\Phi\left(\frac{q'C_{\alpha,\beta,\Phi}\eta}{\|q'C_{\alpha,\beta,\Phi}\eta\|_\Phi}\right)\leqslant 1,$$

于是由定义

$$\| \xi \|_{\Phi} \leqslant \frac{\alpha}{c} = \alpha q' C_{\alpha,\beta,\Phi} \| \eta \|_{\Phi}.$$

引理得证.

由此引理和 Ⅱ. §4 建立的不等式(4.5)立即得到

推论 3 设 $f=(f_n)$是非负下鞅或 B 值鞅,Φ 是限制增长的严格凸函数,则

$$\| f^* \|_{\Phi} \leqslant q'_{\Phi} \| f \|_{\Phi} \tag{4.18}$$

这里 $\| f \|_{\Phi} = \sup\limits_{n\geqslant 1} \| f_n \|_{\Phi}$.

定义 一对非负函数(ξ,η)称为满足好 λ 不等式:若对于 $\alpha>1$ 和 $\beta_n(\beta_n>0,\beta_n\to 0)$ 存在 $\varepsilon_{\alpha\beta_n}$和 $\delta_{\alpha\beta_n}$使得$\forall\ \lambda>0$,

$$P(\xi > \alpha\lambda) \leqslant \varepsilon_{\alpha\beta_n} P(\xi > \lambda) + \delta_{\alpha\beta_n} P(\eta > \beta_n \lambda) \tag{1.19}$$

并且对于固定的 α,$\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{\alpha\beta_n}=0$.

引理 4 设 Φ 是限制增长的一般 Φ 函数,非负函数对(ξ,η)满足好 λ 不等式,则只要 $\beta=\beta_n$ 足够小就有

$$E\Phi(\xi) \leqslant C_\alpha C_{\beta^{-1}} \delta_{\alpha\beta} (1 - C_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta})^{-1} E\Phi(\eta) \tag{1.20}$$

证明 对(1.19)两端积分得到

$$\begin{aligned} E\Phi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) &= \int_0^\infty P(\xi > \alpha\lambda) d\Phi(\lambda) \\ &\leqslant \varepsilon_{\alpha\beta} \int_0^\infty P(\xi > \lambda) d\Phi(\lambda) + \delta_{\alpha\beta} \int_0^\infty P(\eta > \beta\lambda) d\Phi(\lambda) \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta} E\Phi(\xi) + \delta_{\alpha\beta} E\Phi\left(\frac{\eta}{\beta}\right) \end{aligned}$$

由限制增长性

$$E\Phi(\xi) \leqslant C_\alpha E\Phi\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \leqslant C_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} E\Phi(\xi) + C_\alpha C_{\beta^{-1}} \delta_{\alpha\beta} E\Phi(\eta)$$

只要 β 足够小,$C_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}<1$,若 $E\Phi(\xi)<\infty$,则(1.20)成立.

也可以用$(\xi\wedge N,\eta)$代替(ξ,η)先得到关于$(\xi\wedge N,\eta)$的(1.20)式,然后得到不要 $E\Phi(\eta)<\infty$ 限制的情况.

§2 凸 Φ 函数不等式

仍设 X 是 Banach 空间，(Ω,Σ,P)是概率空间，$(\mathscr{B}_n,n\geqslant 0)$是 Σ 的递增子 σ 代数序列，与$(\mathscr{B}_n)$适应的 X 值鞅记为 $f=(f_n,\mathscr{B}_n,n\geqslant 0)$或 $f=(f_n)$. 若 $df_n=f_n-f_{n-1}(n\geqslant 0)$，$f_{-1}=0,\mathscr{B}_{-1}\{\varnothing,\Omega\}$，序列 $df=(df_n)$是与 f 相应的鞅差序列. 对于 $f=(f_n)$，记

$$\| f\|_p=\sup_{n\geqslant 1}\| f_n\|_p \qquad (1\leqslant p\leqslant\infty).$$

$$f_n^*(\omega)=\sup_{i\leqslant n}\| f_i(\omega)\|,\ f^*(\omega)=\sup_{n\geqslant 1}f_n^*(\omega).$$

$$d_n^*(\omega)=\sup_{i\leqslant n}\| df_i(\omega)\|,\ d^*(f)(\omega)=\sup_{n\geqslant 1}d_n^*(f)(\omega).$$

$$S_n^{(p)}(f)(\omega)=\Big(\sum_{i=0}^n\| df_i(\omega)\|^p\Big)^{1/p},$$

$$S^{(p)}(f)(\omega)=\sup_{n\geqslant 1}S_n^{(p)}(f)(\omega).$$

$$\sigma_n^{(p)}(f)(\omega)=\Big(\sum_{i=0}^n E(\| df_i(\omega)\|^p|\mathscr{B}_{i-1}\Big)^{1/p},$$

$$\sigma^{(p)}(f)(\omega)=\sup_{n\geqslant 1}\sigma_n^{(p)}(f)(\omega).$$

后两行式子中的 $p<\infty$.

今后提到“任何 X 值鞅”总是意味着$(\mathscr{B}_n)$ 和基本概率空间(Ω,Σ,P)都可以变动并且 f 可以是任一与$(\mathscr{B}_n)$适应的 X 值鞅. 另外，今后常数字母 C,L 等在不同地方可能代表不同数值. *

定理 1 若 $2\leqslant q<\infty$ 且对于任何 X 值 WP 鞅 $f=(f_n)$，当 $\| f\|_1<\infty$ 时 $S^{(q)}(f)<\infty$ $a.e.$，则 X 必同构于 q 一致凸空间.

---

* 有时为了证明空间的某种性质，要假定其中的鞅的首项 $f_0=0$，这时就存在一个是否能将一个首项不为 0 的鞅转变成另一个首项为 0 而其它性质不变的鞅，实际上在某些情况下这是可能的. 例如 $df=(df_n)$ 是鞅差，$f_0\neq 0$，$(\mathscr{B}_n,n\geqslant 0)$ 是 f 所适应的 σ 代数序列，取 $\mathscr{B}$ 是与 $\mathscr{B}_\infty=\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$ 独立的 σ 代数，P 在 $\mathscr{B}$ 上无原子. 然后取 γ，$P(\chi=\pm 1)=1/2$. 考虑新的鞅差 $(0,\gamma df_1,\gamma df_2,\cdots)$，记之为 $d\tilde{f}=(d\tilde{f}_i,i\geqslant 0)$，$\mathscr{B}_n=\mathscr{B}_{n-1}\vee\mathscr{B}$，则 $\tilde{f}_0=0,d\tilde{f}_n=\gamma df_i$，所以 $\|\tilde{f}\|_p=\| f\|_p$，$S^{(p)}(\tilde{f})=S^{(p)}(f)$，$\tilde{f}^*=f^*$ 等等.

证明 为了证明 X 同构于 q 一致凸空间，由Ⅶ. §2 定理 4，只需证明存在 $c=c_q>0$ 使得对于任何 WP 鞅 f

$$\| S^{(q)}(f) \|_q \leqslant c \| f \|_q. \tag{2.1}$$

现将证明分为几步：

1° 首先由定理条件可以得出对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得对于任何 $f=(f_n)$，若

$$\| f \|_1 < \delta, \text{则 } P(S^{(q)}(f) \geqslant \varepsilon) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

若不然，有 $\varepsilon_0>0$ 和 WP 鞅 $f_k(k=1,2,\cdots)$

$$\| f_k \|_1 \leqslant \frac{1}{2^k}, \text{但 } P(S^{(q)}(f_k) \geqslant \varepsilon_0) \geqslant \varepsilon_0.$$

记 $f_k=(f_{kn})$，对应的 σ 代数序列为$(\mathscr{B}_{kn})$，则存在自然数 n_k 使得

$$P\left(S^{(q)}_{n_k}(f_k) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} \right) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

不失一般性，假定基础概率空间是同一个并且 $\mathscr{B}_{k\infty} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{B}_{kn}(k=1,2,\cdots)$彼此独立. 考虑 σ 代数序列 $(\mathscr{B}_n)$，其中

$$\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}_{10}, \mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_{11}, \cdots, \mathscr{B}_{n_1-1} = \mathscr{B}_{1n_1-1},$$

$$\mathscr{B}_{n_1} = \mathscr{B}_{1n_1} \vee \mathscr{B}_{20}, \cdots, \mathscr{B}_{n_1+n_2-1} = \mathscr{B}_{1n_1} \vee \mathscr{B}_{2n_2-1},$$

$$\mathscr{B}_{n_1+n_2} = \mathscr{B}_{1n_1} \vee \mathscr{B}_{2n_2} \vee \mathscr{B}_{30}, \cdots\cdots,$$

以及序列

$$(df_{11}, \cdots, df_{1n_1}, df_{21}, \cdots, df_{2n_2}, df_{31}, \cdots)$$

由 $\mathscr{B}_{k\infty}$的相互独立性知道此序列是鞅差序列(见附录 2)，记对应的鞅为 $F=(F_n)$，一方面显然有

$$\| F \|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| f_k \|_1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1;$$

另一方面，至少在某个集合 $A\left(P(A)\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2} \right)$ 上，对于任何 $k\geqslant1$，

$$S^{(q)}(F) \geqslant S^{(q)}_{n_k}(F) \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}k^{1/q}.$$

换句话说，在一个正测度集合上有 $S^{(q)}(F)=+\infty$. 这与定理所给

的条件矛盾.

由(2.2)还可知道，在定理条件成立时，存在常数 $c>0$ 使得对于任何 WP 鞅 f，若

$$S^{(\varphi)}(f) > 1 \ a.e.\text{，则 } \|f\|_1 \geqslant c. \tag{2.3}$$

2° 由(2.3)，存在常数 $L>0$ 使对于每个 WP 鞅 f 和 $\lambda>0$，

$$\lambda P(S^{(\varphi)}(f) > \lambda) \leqslant L\|f\|_1. \tag{2.4}$$

(L 仅与(2.3)中的 c 有关)实际上可以证明对于任何自然数 j，

$$cP(S_j^{(\varphi)}(f) > 2) \leqslant \|f\|_1. \tag{2.5}$$

只要(2.5)对于每个 f 成立，以 $2\lambda^{-1}f$ 代替 f 即得出(2.4).

现在证明(2.5)成立. 不妨设 $P(S_j^{(\varphi)}(f)>2)>0$. 取与 f 同分布且彼此独立的鞅 $f_k(k=1,2,\cdots)$，记

$$A_k = \{S_j^{(\varphi)}(f_k) > 2\}, u_k = \chi_{\bar{A}_k},$$

其中 $\bar{A}_k$ 是 A_k 的余集，$\chi_{\bar{A}_k}$ 是 $\bar{A}_k$ 的特征函数，则

$$Eu_k = P(S_j^{(\varphi)}(f_k) \leqslant 2) = P(S_j^{(\varphi)}(f) \leqslant 2) < 1. \tag{2.6}$$

定义鞅差序列

$$(df_{11},\cdots,df_{1j},u_1df_{21},\cdots,u_1df_{2j},u_1u_2df_{31},\cdots),$$

相应的鞅记为 $F=(F_n)$，则由独立性，

$$\begin{aligned}E\|F_{kj}\| &= E(1+u_1+u_1u_2+\cdots+u_1\cdots u_{k-1})E\|f_j\| \\ &\leqslant (1-Eu_1)^{-1}E\|f_j\| \\ &= P(S_j^{(\varphi)}(f) > 2))^{-1}E\|f_j\|.\end{aligned}$$

或者

$$P(S_j^{(\varphi)}(f) > 2)\|F_{kj}\|_1 \leqslant \|f_j\|_1. \tag{2.7}$$

注意到 $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)=\infty$，由 Borel-Cantelli 引理，

$$P(A^*) = P(A_k, i, o.) = 1.$$

这说明 $S^{(\varphi)}(F)>1 \ a.e.$，由(2.3)得出 $\|F_{kj}\|_1\geqslant c$，从而由(2.7)得到(2.5)和(2.4).

3° 为了得到(2.1)，现在对于任意的 $\lambda>0, \delta>0$ 和 $\beta^q>\delta^q+1$，定义停时

$$
\begin{aligned}
\mu &= \inf\{n, S_n^{(q)}(f) > \lambda\}, \\
\nu &= \inf\{n, S_n^{(q)}(f) > \beta\lambda\}, \\
\sigma &= \inf\{n, \| f_n \| \vee \| df_{n+1} \| > \delta\lambda\}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

(约定 $\inf\varnothing=\infty$). 记 $A_k=\{\mu<k\leqslant\nu\wedge\delta\}$, $u_k=\chi_{A_k}$, 由于 f 是 WP 鞅, (u_k)是可料序列,令

$$
\hat{f}_n = \sum_{k=1}^{n} u_k df_k, \hat{f} = (\hat{f}_n).
$$

注意当 $u_n=1$ 时, $\omega\in\{\mu<n\leqslant\nu\wedge\sigma\}=\{\mu<n\}\cap\{n\leqslant\nu\wedge\sigma\}$, 此时存在 k_0, $1\leqslant k_0<n$, $\omega\overline{\in} A_{k_0}$, $\omega\in A_{k_0+1}$, 从而

$$
\hat{f}_n = \sum_{k=k_0+1}^{n} df_k = f_n - f_{k_0} = f_{n-1} + df_n - f_{k_0}.
$$

由 σ 的定义和 $n\leqslant\sigma$ 可以得出

$$
\| \hat{f}_n \| \leqslant \| f_{n-1} \| + \| df_n \| + \| f_{k_0} \| \leqslant 3\delta\lambda
$$

从而

$$
\begin{aligned}
E \| \hat{f}_n \| &\leqslant 3\delta\lambda P(\mu < \infty) \\
&= 3\delta\lambda P(S^{(q)}(f) > \lambda).
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

但在 $\{\nu=n,\sigma=\infty\}$ 上, $f^*\leqslant\delta\lambda$, $d^*(f)\leqslant\delta\lambda$ 并且对于上面所说的 k_0 有 $k_0-1<\mu$, 从而

$$
\begin{aligned}
S_n^{(q)}(\hat{f})^q &= \sum_{k=1}^{n} \| u_k df_k \|^q \\
&= \sum_{k=1}^{n} \| df_k \|^q - \| df_{k_0} \|^q - \sum_{k=1}^{k_0} \| df_k \|^q \\
&\geqslant (\beta^q - \delta^q - 1)\lambda^q.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\{\nu = n, \sigma = \infty\} \subset \{S_n^{(q)}(\hat{f})^q \geqslant (\beta^q - \delta^q - 1)\lambda^q\}
$$

或者进一步地,

$$
\begin{aligned}
&\{S^{(q)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee d^*(f) \leqslant \delta\lambda\} \\
&\quad \subset \{S^{(q)}(\hat{f})^q \geqslant (\beta^q - \delta^q - 1)\lambda^q\}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

将(2.4)应用于$(\hat{f}_n)$，则(2.9)，(2.10)给出

$$
\begin{aligned}
P(S^{(q)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee d^*(f) \leqslant \delta\lambda) &\leqslant P(S^{(q)}(\hat{f})^q \geqslant (\beta^q - \delta^q - 1)\lambda^q) \\
&\leqslant (\beta^q - \delta^q - 1)^{-1/q}\lambda^{-1}L \sup_n E\|\hat{f}_n\| \\
&\leqslant 3\delta L(\beta^q - \delta^q - 1)^{-1/q}P(S^{(q)}(f) > \lambda). \quad (2.11)
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
P(S^{(q)}(f) > \beta\lambda) &\leqslant P(f^* \vee d^*(f) > \delta\lambda) \\
&\quad + P(S^{(q)}(f) > \beta\lambda, f^* \vee d^*(f) \leqslant \delta\lambda) \\
&\leqslant P(f^* \vee d^*(f) > \delta\lambda) \\
&\quad + 3\delta\lambda(\beta^q - \delta^q - 1)^{-1/q}P(S^{(q)}(f) > \lambda) \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

此即关于$(S^{(q)}(f), f^* \vee d^*(f))$的好$\lambda$不等式，取$\Phi(t)=t^q$，则§1引理4给出

$$ES^{(q)}(f)^q \leqslant CE(f^* \vee d^*(f))^q \leqslant CE(f^*)^q$$

由Doob不等式最后得出(1.1).

引理1 若X值WP鞅f满足$\|f\|_1<\infty$和$P(S^{(q)}(f)=\infty)>0$，则存在另一WP鞅$\hat{f}$，$\hat{f}$是一致有界的并且

$$P(S^{(q)}(\hat{f}) = \infty) \geqslant \frac{1}{2}P(S^{(q)}(f) = \infty). \qquad (2.13)$$

证明 记$A=\{S^{(q)}(f)=\infty\}$. 由极大不等式，

$$P(f^* > \lambda) \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

取λ，使得$P(f^*>\lambda)<\frac{1}{2}P(A)$. 定义

$$A_k = \{\|f_i\| \leqslant \lambda, 1 \leqslant i \leqslant k-1;\ \|df_j\| \leqslant 2\lambda, 1 \leqslant j \leqslant k\},$$

$$u_k = \chi_{A_k}.$$

$$\hat{f}_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_k df_k, \hat{f} = (\hat{f}_n).$$

则有$\|\hat{f}_n\| \leqslant 3\lambda$，$\hat{f}$是一致有界Walsh-Paley鞅. 另一方面

$$P(S^{(q)}(\hat{f}) = \infty) \geqslant P(S^{(q)}(\hat{f}) = S^{(q)}(f), S^{(q)}(f) = \infty),$$

$$P(S^{(q)}(\hat{f}) \neq S^{(q)}(f), S^{(q)}(f) = \infty)$$

$$\leqslant P(f^* > \lambda, S^{(q)}(f) = \infty) \leqslant \frac{1}{2}P(A),$$

所以 $P(S^{(q)}(\hat{f})=\infty)\geqslant\frac{1}{2}P(A)$. 引理得证.

定理 2 设 $2\leqslant q<\infty$,则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 一致凸空间.

(ii) 对于任何 X 值鞅 f, $\| f \|_\infty<\infty$则 $S^{(q)}(f)<\infty$ $a.e.$

(iii) 对于任何 X 值鞅 f,若 $E(d^*(f)^q<\infty$,则

$$\{f^* < \infty\} \subset \{S^{(q)}(f) < \infty\} \ a.e.$$

以上结论限于 WP 鞅仍成立.

证明 (i)⇒(ii) 显然.

(ii)⇒(i) 只需对 WP 鞅证明这一点. 由引理 1,只要(ii)对任何一致有界 WP 鞅成立,则(ii) 对任何 $\| f \|_1<\infty$ 的 WP 鞅成立,应用定理 1 即得出所要的结论.

(ii)⇒(iii) 对于 $\lambda>0$,定义 $\tau_\lambda=\inf\{n, \| f_n \| >\lambda\}$ $(\inf\varnothing=\infty)$,考虑鞅 $f^{(\tau_\lambda)}=(f_{\tau_\lambda\wedge n})$,由于

$$\begin{aligned} \| f_{\tau_\lambda\wedge n} \| &= \| f_n \| \chi_{\{\tau_\lambda>n\}} + \| f_{\tau_\lambda} \| \chi_{\{\tau_\lambda\leqslant n\}} \\ &\leqslant \lambda + \| df_{\tau_\lambda} \| \chi_{\{\tau_\lambda\leqslant n\}} \leqslant \lambda + d^*(f) \end{aligned} \tag{2.14}$$

所以

$$\| f^{(\tau_\lambda)} \|_q^q = \sup_{n\geqslant 1} E \| f_{\tau_\lambda\wedge n} \|^q \leqslant 2^q(\lambda^q + E(d^*(f)^q)) < \infty.$$

由 (ii), $S^{(q)}(f^{(\tau_\lambda)})<\infty$ $a.e.$, 但在 $\{\tau_\lambda=\infty\}=\{f^*\leqslant\lambda\}$ 上 $S^{(q)}(f^{(\tau_\lambda)})=S^{(q)}(f)$,所以 $S^{(q)}(f)<\infty$ 在 $\{\tau_\lambda=\infty\}$上 $a.e.$ 成立. λ 是任意的,故$\{f^*<\infty\}\subset\{S^{(q)}(f)<\infty\}$ $a.e.$

(iii)⇒(ii). 当 $\| f \|_\infty<\infty$时, $d^*(f)\leqslant 2f^*\leqslant 2\| f \|_\infty<\infty$,依照(iii)的条件得出 $S^{(q)}(f)<\infty$ $a.e.$,于是(ii)成立.

引理 2 (Davis 分解) 每个 X 值鞅 $f=(f_n)$有分解 $f=g+h$,其中 $g=(g_n)$, $h=(h_n)$ 均为鞅并且满足

$$\| dg_n \| \leqslant 4d^*_{n-1}(f) \tag{2.15}$$

$$E\sum_{n=1}^{\infty} \| dh_n \| \leqslant 4Ed^*(f) \tag{2.16}$$

证明 记 $\triangle'_i = df_i \chi_{\{\|df_i\| \leqslant 2d^*_{n-1}(f)\}}$，$\triangle''_i = df_i \chi_{\{\|df_i\| > 2d^*_{n-1}(f)\}}$ 然后令

$$dg_i = \triangle'_i - E(\triangle'_i | \mathscr{B}_{i-1}), g_n = \sum_{i=1}^{n} dg_i \qquad (n \geqslant 0)$$

$$dh_i = \triangle''_i - E(\triangle''_i | \mathscr{B}_{i-1}), h_n = \sum_{i=1}^{n} dh_i \qquad (n \geqslant 0)$$

显然 $g=(g_n), h=(h_n)$ 是鞅并且

$$\| dg_n \| \leqslant \| \triangle'_n \| + E(\| \triangle'_n \| | \mathscr{B}_{n-1}) \leqslant 4d^*_{n-1}(f),$$

又由 $\| \triangle''_n \| \leqslant 2d^*_n(f) - 2d^*_{n-1}(f)$ 得到

$$E\sum_{n=1}^{\infty} \| dh_n \| \leqslant 4Ed^*(f).$$

定理 3 设 $2 \leqslant q < \infty$，Φ 是限制增长的 Young 函数，则以下条件等价：

(i) X 同构于 q 一致凸空间.

(ii) 存在 $C_q > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f，

$$\lambda^q P(S^{(q)}(f) > \lambda) \leqslant C_q^q \| f \|_q^q. \tag{2.17}$$

(iii) 存在 $C_\Phi > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f，

$$\| S^{(q)}(f) \|_\Phi \leqslant C_\Phi \| f^* \|_\Phi. \tag{2.18}$$

(iv) 若 Φ 还是严格凸的，则代替(2.18)有

$$\| S^{(q)}(f) \|_\Phi \leqslant C_\Phi \| f \|_\Phi. \tag{2.19}$$

这里 $\| f \|_\Phi = \sup_n \| f_n \|_\Phi$. 以上叙述中的鞅换为 WP 鞅仍成立.

证明 (i)⇒(ii) 应用Ⅶ. §2 定理 4 得到

$$\lambda^q P(S^{(q)}(f) > \lambda) \leqslant \| S^{(q)}(f) \|_q^q \leqslant C_q^q \| f \|_q^q.$$

(ii)⇒(iii). 设 W_n 是 $\| df_n \|$ 的任一强函数（$\| df_n \| \leqslant W_n$ 并且 W_n 关于 B_{n-1} 可测)，记 $W = (W_n)$. 对于任何 $\lambda > 0, \delta > 0$ 和 $\beta^q > \delta^q + 1$. 定义停时

$$\mu = \inf\{n, S_n^{(q)}(f) > \lambda\}.$$

$$\nu = \inf\{n, S_n^{(q)}(f) > \beta\lambda\}.$$

$$\sigma = \inf\{n, \| f_n \| \vee W_{n+1} > \delta\lambda\}.$$

记 $A_k=\{\mu<k\leqslant\nu\wedge\sigma\}$，$u_k=\chi_{A_k}$，则$(u_k)$是可料序列，令

$$\hat{f}_n=\sum_{k=1}^{n}u_k df_k,\hat{f}=(\hat{f}_n).$$

类似于定理 1(3°)的证明可以得到：

$$E\|\hat{f}_n\|^q\leqslant(3\delta\lambda)^q P(S^{(q)}(f)>\lambda),$$

在$\{\nu=n,\sigma=\infty\}$上，

$$S_n^{(q)}(\hat{f})^q\geqslant(\beta^q-\delta^q-1)\lambda^q,$$

从而

$$P(S^{(q)}(f)>\beta\lambda,f^*\vee W^*\leqslant\delta\lambda)$$
$$\leqslant P(S^{(q)}(\hat{f})^q\geqslant(\beta^q-\delta^q-1)\lambda^q).$$

由以上诸式及(2.17)得到

$$P(S^{(q)}(f)>\beta\lambda,f^*\vee W^*\leqslant\delta\lambda)\leqslant c_q(\beta^q-\delta^q-1)^{-1}\lambda^{-q}\|\hat{f}\|_q^q$$
$$\leqslant c_q(3\delta)^q(\beta^q-\delta^q-1)^{-1}P(S^{(q)}(f)>\lambda)\tag{2.20}$$

或者

$$P(S^{(q)}(f)>\beta\lambda)\leqslant P(S^{(q)}(f)>\beta\lambda,f^*\vee W^*\leqslant\delta\lambda)$$
$$+P(f^*\vee W^*>\delta\lambda)$$
$$\leqslant C_q(3\delta)^q(\beta^q-\delta^q-1)^{-1}P(S^{(q)}(f)>\lambda)$$
$$+P(f^*\vee W^*>\delta\lambda)\tag{2.21}$$

此即关于$(S^{(q)}(f),f^*\vee W^*)$的好 λ 不等式. 由 §1 引理 4，当 δ 足够小时有

$$E\Phi(S^{(q)}(f)\leqslant LE\Phi(f^*\vee W^*)\tag{2.22}$$

现在应用鞅的 Davis 分解 $f=g+h$，对于 $g=(g_n)$，以 $4d_n^*$ (f) 作为强函数，g 满足 (2.22)

$$E\Phi(S^{(q)}(g))\leqslant LE\Phi(g^*\vee 4d^*(f))$$

由 $g^*\leqslant f^*+h^*$ 以及 $d^*(f)\leqslant 2f^*$ 和 $\Phi(t)$的单调增长性质可知

$$E\Phi(S^{(q)}(g)\leqslant LE\Phi(f^*\vee 4d^*(f))+LE\Phi(h^*\vee 4d^*(f)$$
$$\leqslant LE\Phi(f^*)+LE\Phi(h^*)\tag{2.23}$$

对于 $h=(h_n)$，由 Davis 分解的证明知道，实际上对于任何 $n\geqslant1$，

$$E\left(\sum_{i=n}^{\infty}\|dh_i\| \mid \mathscr{B}_n\right) \leqslant E(4d^*(f) \mid \mathscr{B}_n),$$

应用§1推论1得出

$$E\Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|dh_i\|\right) \leqslant E\Phi(4d^*(f)), \qquad (2.24)$$

从而

$$E\Phi(S^{(q)}(h)) \leqslant E\Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|dh_i\|\right) \leqslant E(4d^*(f) \leqslant LE\Phi(f^*),$$

$$E\Phi(h^*) \leqslant E\Phi\left(\sum_{i=n}^{\infty}\|dh_i\|\right) \leqslant LE\Phi(f^*),$$

注意 $S^{(q)}(f) \leqslant S^{(q)}(g) + S^{(q)}(h)$，由(2.23)和以上两式得到

$$\begin{aligned} E\Phi(S^{(q)}(f)) &\leqslant CE\Phi(S^{(q)}(g) + CE\Phi(S^{(q)}(h)) \\ &\leqslant CE\Phi(f^*). \end{aligned} \qquad (2.25)$$

为得到(2.18)，可设 $\|f^*\|_\Phi = 1$，此时 $E\Phi(f^*) \leqslant \|f^*\|_\Phi$，故有

$$\|S^{(q)}(f)\|_\Phi \leqslant 1 + E\Phi(S^{(q)}(f)) \leqslant 1 + CE\Phi(f^*) \leqslant 1 + C,$$

由 $\|f\|_\Phi$ 的齐性得出

$$\|S^{(q)}(f)\|_\Phi \leqslant (1+c)\|f^*\|_\Phi = C_\Phi\|f^*\|_\Phi.$$

(iii)⇒(iv) 应用§1推论4得出.

(iv)⇒(i) 由(2.19)知道，每个 $\|f\|_\infty < \infty$ 的鞅有 $S^{(q)}(f) < \infty$ $a.e.$，故可得到 X 同构于 q 一致凸空间.

定理 4 Banach 空间 X 同构于 q 一致凸空间($2 \leqslant q < \infty$)当且仅当存在 $c > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f，

$$\|S^{(q)}(f)\|_1 \leqslant c\|f^*\|_1 \qquad (2.26)$$

限于 WP 鞅结论仍成立.

证明 只需证明必要性，设 X 同构于 q 一致凸空间，象定理3中(ii)⇒(iii)的证明一样可得到关于($S^{(q)}(f)$，$f^* \vee W^*$)的好 λ 不等式. 积分得出

$$\|S^{(q)}(f)\|_1 \leqslant L\|f^* \vee W^*\|_1 \qquad (2.27)$$

应用 Davis 分解 $f = g + h$，首先对于 g 有

$$\| S^{(q)}(g) \|_1 \leqslant L \| g^* \vee 4d^*(f) \|_1 \leqslant 8L \| f^* \|_1 + L \| g^* \|_1$$
$$\leqslant 9L \| f^* \|_1 + L \| h^* \|_1 \tag{2.28}$$

其中用到了 $g^* \leqslant f^* + h^*$. 对于 $h = (h_n)$, 显然,

$$\| S^{(q)}(h) \|_1 \leqslant E \sum_{i=1}^{\infty} \| dh_i \| \leqslant 4Ed^*(f) \leqslant 8 \| f^* \|_1$$

$$\| h^* \|_1 \leqslant E \sum_{i=1}^{\infty} \| dh_i \| \leqslant 8 \| f^* \|_1 \tag{2.29}$$

总之得到

$$\| S^{(q)}(f) \|_1 \leqslant \| S^{(q)}(g) \|_1 + \| S^{(q)}(h) \|_1 \leqslant c \| f^* \|_1.$$

对于不是严格凸的 Φ 函数(2.19)一般不成立,甚至在实值情况也是如此. 定理 4 说明(2.18)对于并非 Young 函数的 Φ 也成立. (2.19)称为 Burkholder-Gundy 型不等式,(2.26)称为 Davis 型不等式. 让我们转到 p 一致光滑空间的情况.

定理 5 设 $1 < p \leqslant 2$,则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 一致光滑空间.

(ii) 对于任何 X 值鞅 $f = (f_n)$,若 $S^{(p)}(f) \in L_\infty$,则 f_n $a.e.$ 收敛.

(iii) 对于任何 X 值鞅 $f = (f_n)$,若 $Ed^*(f)^p < \infty$ 则

$$\{ S^{(p)}(f) < \infty \} \subset \{ f_n \text{ 收敛} \} \ a.e.$$

这里 f_n 收敛的意思是点点收敛.

以上结论限于 WP 鞅仍成立.

证明 我们已经得到过当 $ES^{(p)}(f)^p < \infty$ 时 f_n $a.e.$ 收敛(Ⅶ. §3 定理 2),现在 (ii)的条件更强,故 (i)⇒(ii)成立.

根据 §1 推论 3,在(ii),(iii)两种情况都有 $\{\sigma^{(p)}(f) < \infty\} = \{S^{(p)}(f) < \infty\}$ $a.e.$ 于是为了证明(ii)⇒(iii) 我们证明将 (iii)中的 $S^{(p)}(f)$ 换为 $\sigma^{(p)}(f)$ 时(ii)⇒(iii)成立. 实际上定义

$$\tau_\lambda = \inf\{ n, \sigma_{n+1}^{(p)}(f) > \lambda \},$$

考虑鞅 $f^{(\tau_\lambda)} = (f_{\tau_\lambda \wedge n})$,由于 $df_{\tau_\lambda \wedge n} = df_n \chi_{(\tau_\lambda \geqslant n)}$,则

$$\sigma^{(p)}(f^{(\tau_\lambda)}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} E(\| df_{\tau_\lambda \wedge n} \|^p | \mathscr{B}_{n-1}) \right)^{1/p}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} E(\| df_n \|^p | \mathscr{B}_{n-1}) \right)^{1/p} \leqslant \lambda \qquad (2.30)$$

由(ii)，$f_{\tau_\lambda \wedge n}$ $a.e.$ 收敛. 在 $\tau_\lambda = \infty$ 上，f_n $a.e.$ 收敛. λ 任意，故 $\{\sigma^{(p)}(f) < \infty\} \subset \{f_n \text{收敛}\}$ $a.e.$ 此即所求.

(iii)⇒(i)　对于每个 X 值鞅 $f = (f_n)$. 若 $\sum_{i=1}^{\infty} E \| df_i \|^p < \infty$，则 $S^{(p)}(f) < \infty$ $a.e.$ 对于这种鞅，$Ed^*(f)^p \leqslant ES^{(p)}(f)^p < \infty$ 于是由(iii)必有 f_n $a.e.$ 收敛. 由 Ⅶ. §3 定理 2，X 同构于 p 一致光滑空间.

定理 6　设 $1 < p \leqslant 2$，Φ 是限制增长的 Young 函数，则以下条件等价：

(i) X 同构于 p 一致光滑空间.

(ii) 存在 $C_p > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f，

$$\lambda^p P(f^* > \lambda) \leqslant C_p^p \| S^{(p)}(f) \|_p^p \qquad (2.31)$$

(iii) 存在 $C_\Phi > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f，

$$\| f^* \|_\Phi \leqslant C_\Phi \| S^{(p)}(f) \|_\Phi \qquad (2.32)$$

限于 WP 鞅结论仍成立.

证明　(i)⇒(ii). 仍由 Ⅶ. §2 定理 4，

$$\lambda^p P(f^* > \lambda) \leqslant \| f^* \|_p^p \leqslant C_p^p \| S^{(p)}(f) \|_p^p.$$

(ii)⇒(iii)　定义停时

$$\mu = \inf\{n, f_n^* > \lambda\},$$

$$\nu = \inf\{n, f_n^* > \beta\lambda\},$$

$$\sigma = \inf\{n, S_n^{(p)}(f) \vee W_{n+1} > \delta\lambda\}.$$

这里 $\lambda > 0, \delta > 0, \beta^p > 1 + \delta^p$，$W = (W_n)$ 是$(\| df_n \|)$的可料强函数序列.

类似于定理 3 相应部分的分析可得到关于$(f^*, S^{(p)}(f) \vee W^*)$的好 λ 不等式，从而得到

$$E\Phi(f^*)\leqslant LE\Phi(S^{(p)}(f)\vee W^*)\qquad(2.33)$$

设 f 的Davis 分解是 $f=g+h$. 对于 $g=(g_n)$，$4d_{n-1}^*(f)$是可料强函数，故 g 适合 (2.33)，即

$$E\Phi(g^*)\leqslant LE\Phi(S^{(p)}(g)\vee W^*)=LE\Phi(S^{(p)}(g)\vee 4d^*(f))$$

由于 $S^{(p)}(g)\leqslant S^{(p)}(f)+S^{(p)}(h)$ 以及 $d^*(f)\leqslant S^{(p)}(f)$，所以上式变为

$$E\Phi(g^*)\leqslant LE\Phi(S^{(p)}(f))+LE\Phi(S^{(p)}(h)).\qquad(2.34)$$

对于 $h=(h_n)$，仍由§1 推论 1 得出

$$E\Phi(h^*)\leqslant E\Phi\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|dh_i\|\Big)\leqslant E\Phi(4d^*(f))\leqslant L'E\Phi(S^{(p)}(f)),$$

$$E\Phi(S^{(p)}(h))\leqslant E\Phi\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|dh_i\|\Big)\leqslant L'E\Phi(S^{(p)}(f)).$$

最后得出

$$E\Phi(f^*)\leqslant c(E\Phi(g^*)+E\Phi(h^*))\leqslant CE\Phi(S^{(p)}(f)).$$

若设 $\|S^{(p)}(f)\|_\Phi=1$，则 $E\Phi(S^{(p)}(f))\leqslant\|S^{(p)}(f)\|_\Phi$，故

$$\|f^*\|_\Phi\leqslant 1+E\Phi(f^*)\leqslant 1+cE\Phi(S^{(p)}(f))\leqslant 1+C,$$

由 $\|\cdot\|_\Phi$ 的齐性得到(2.32)，其中 $C_\Phi=1+C$.

(iii)⇒(i) 设 $f=(f_n)$是满足 $S^{(p)}(f)\in L_\Phi$ 的 X 值鞅，对于每个 $m\geqslant1$，定义鞅 $f^{(m)}=(f_n-f_m,n\geqslant m)$，则

$$S^{(p)}(f^{(m)})=\Big(\sum_{n=m}^{\infty}\|df_n\|^p\Big)^{1/p}\to 0\ (m\to\infty).$$

对于 (iii)中的(2.32)式，现在有

$$\begin{aligned}\|\sup_{n\geqslant m}\|f_n-f_m\|\,\|_\Phi&=\|f^{(m)*}\|_\Phi\\&\leqslant C_\Phi\|S^{(p)}(f^{(m)})\|_\Phi\to 0\ (m\to\infty).\end{aligned}$$

m 是任意的，这说明 $f_n(\omega)$是 Cauchy 序列从而 f_n $a.e.$ 收敛. 由定理 5(ii)，X 同构于 p 一致光滑空间.

定理 7 Banach 空间 X 同构于 p 一致光滑空间 $(1<p\leqslant2)$ 当且仅当存在 $c>0$ 使得任何 X 值鞅 f 满足

$$\|f^*\|_1\leqslant C\|S^{(p)}(f)\|_1\qquad(2.35)$$

限于 WP 鞅结论仍成立.

证明 由定理 5(ii),只须证明必要性. 为此对于 $\lambda>0$、$\delta>0$, $\beta^p>1+\delta^p$ 和($\|df_n\|$)的强函数可料序列仍象定理 6 证明中那样定义停时 μ,ν,σ 并且得到关于(f^*, $S^{(p)}(f)\vee W^*$)的好 λ 不等式,积分得到

$$\|f^*\|_1\leqslant LE(S^{(p)}(f)\vee W^*) \tag{2.36}$$

作 f 的 Davis 分解 $f=g+h$. 首先对于 g 有

$$\begin{aligned}\|g^*\|_1&\leqslant LE(S^{(p)}(g)\vee 4d^*(f))\\&\leqslant L\|S^{(p)}(f)\|_1+L\|S^{(p)}(h)\|_1.\end{aligned}$$

对于 $h=(h_n)$ 有

$$\|h^*\|_1\leqslant E\sum_{n=1}^{\infty}\|dh_n\|\leqslant 4Ed^*(f)\leqslant 4\|S^{(p)}(f)\|_1,$$

$$\|S^{(p)}(h)\|_1\leqslant E\sum_{n=1}^{\infty}\|dh_n\|\leqslant 4\|S^{(p)}(f)\|_1$$

以上诸式给出

$$\|f^*\|_1\leqslant\|g^*\|_1+\|h^*\|_1\leqslant C\|S^{(p)}(f)\|_1.$$

由 Kwapien 定理我们有

推论 设 X 是 Banach 空间,Φ 是限制增长的 Young 函数,则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) 存在 $c_\Phi>0$ 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$C_\Phi^{-1}\|f^*\|_\Phi\leqslant\|S^{(2)}(f)\|_\Phi\leqslant C_\Phi\|f^*\|_\Phi.$$

(iii) 存在 $c>0$ 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$C^{-1}\|f^*\|_1\leqslant\|S^{(2)}(f)\|_1\leqslant C\|f^*\|_1.$$

(iv) 若 Φ 是严格凸的,存在 $c_\Phi>0$ 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$C_\Phi^{-1}\|f\|_\Phi\leqslant\|S^{(2)}(f)\|_\Phi\leqslant C_\Phi\|f\|_\Phi.$$

(v) 对于任何 X 值鞅 f,若 $Ed^*(f)^2<\infty$,则

$$\{f^*<\infty\}=\{S^{(2)}(f)<\infty\}=\{f_n\text{收敛}\}\ a.e.$$

这些结论限于 WP 鞅也成立.

§ 3 鞅空间

让我们引进若干类型的 B 值鞅空间并讨论它们之间的相互嵌入关系.记

$$R = \{\Lambda = (\lambda_n), \lambda_n \text{ 是非负增加适应 } R.V. \text{ 序列}, \lambda_\infty = \lim_{n\to\infty}\lambda_n, E\lambda_\infty \leqslant 1\}.$$

定义 X 值鞅空间:

$$H_a = \{f = (f_n), \| f \|_{H_a} = \| f^* \|_a < \infty\}, \ (1 \leqslant a \leqslant \infty)$$

$${}_p\widetilde{H}_a = \{f = (f_n), \| f \|_{{}_p\widetilde{H}_a} = \| S^{(p)}(f) \|_a < \infty\}, \quad (0 < p, a \leqslant \infty, p \neq \infty)$$

$${}_p\Sigma_a = \{f = (f_n), \| f \|_{{}_p\Sigma_a} = \| \sigma^{(p)}(f) \|_a < \infty\}, \quad (0 < p, a \leqslant \infty, p \neq \infty)$$

$${}_pK_a = \{f = (f_n), \exists\, \gamma \in L_a, \gamma \geqslant 0, E(\| f_m - {}_{n-1} \|^p | \mathscr{B}_n) \leqslant E(\gamma | \mathscr{B}_n), \ \forall\, O \leqslant n \leqslant m < \infty\}, \quad (0 < p \leqslant a \leqslant \infty, p \neq \infty)$$

$$\| f \|_{{}_pK_a} = \inf_\gamma \| \gamma \|_a.$$

$${}_p\mathscr{K}_a = \{f = (f_n), \forall\, \gamma \in L_a, \gamma \geqslant 0, E(\| f_m - f_n \|^p | \mathscr{B}_n) \leqslant E(\gamma | \mathscr{B}_n), \quad \exists\, 0 \leqslant n \leqslant m < \infty\}, \quad (0 < p \leqslant a \leqslant \infty, p \neq \infty)$$

$$\| f \|_{{}_p\mathscr{K}_a} = \inf_\gamma \| \gamma \|_a.$$

$${}_pL_a = \{f = (f_n), \| f \|_{{}_pL_a} = \sup_{\Lambda \in R}\Big(E\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{1-\frac{p}{a}} \| df_n \|^p\Big)^{1/p} < \infty\}, \quad (0 < p \leqslant a \leqslant \infty, p \neq \infty)$$

$${}_p\mathscr{L}_a = \{f = (f_n), \| f \|_{{}_p\mathscr{L}_a} = \sup_{\Lambda \in R}\Big(E\sum_{n=1}^\infty \lambda_{n-1}^{1-\frac{p}{a}} \| df_n \|^p\Big)^{1/p} < \infty\}, \quad (0 < p \leqslant a \leqslant \infty, p \neq \infty),$$

在最后两空间情况假定 $\lambda_0 = 0$. 标准的验证表明以上 B 值鞅的空间都是 Banach 空间. 空间 ${}_pK_\infty$ 即是空间 BMO_p, ${}_p\mathscr{K}_a$ 即是

BMO_p^-.

引理 1 假设 $2\leqslant q<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 可凸的.

(ii) 存在 $c=c_q>0$ 使得对于每个 X 值 q 可积鞅 $f=(f_n)$（即 $\|f_n\|\in L_q,n\geqslant 0$）和任何 $0\leqslant n\leqslant m$，

$$E\Big(\sum_{i=n+1}^{m}\|df_i\|^q|\mathscr{B}_n\Big)\leqslant cE(\|f_m-f_n\|^q|\mathscr{B}_n),\qquad(3.1)$$

并且（或者）

$$E\Big(\sum_{i=n}^{m}\|df_i\|^q|\mathscr{B}_n\Big)\leqslant cE(\|f_m-f_{n-1}\|^q|\mathscr{B}_n).\qquad(3.2)$$

证明 首先设 X 是 q 凸的，Σ_i 是 Σ 的子 σ 代数，g_i 是 Σ_i 可测函数 $(i=1,2)$，$\Sigma_1\subset\Sigma_2$ 并且 $E(g_2|\Sigma_1)=g_1$，应用 Assouad 定理（Ⅶ. § 2 定理 1）于 g_1,g_2 得到

$$E(\|g_2\|^q-\|g_1\|^q|\Sigma_1)\geqslant kE(\|g_2-g_1\|^q|\Sigma_1),\qquad(3.3)$$

这里 k 是与 g_1,g_2 的选取无关的常数．固定 n 并且定义

$$\tilde{f}_i=f_{n+i}-f_n,\tilde{\mathscr{B}}_i=\mathscr{B}_{n+i}(i\geqslant 0)$$

则 $\tilde{f}=(\tilde{f}_i)$ 是鞅．在(3.3)式中令 $\tilde{f}_i=g_1,\tilde{f}_{i+1}=g_2,i=0,1,\cdots,m-n$，然后加起来，关于 $\mathscr{B}_n$ 取条件期望得到

$$E(\|f_m-f_n\|^q|\mathscr{B}_n)\geqslant kE\Big(\sum_{i=n+1}^{m}\|df_i\|^q|\mathscr{B}_n\Big),$$

记 $c=\dfrac{1}{k}$，则(3.1)成立．若 X 是 q 可凸的，先应用等价 q 凸范数得到(3.1)，然后必要时改变 c 的值，(3.1)仍成立.

在上述过程中，若代替 $\mathscr{B}_n$ 关于 $\mathscr{B}_{n-1}$ 取条件期望，则得到(3.2)式.

反过来，若每个 q 可积鞅满足(3.1)或(3.2)式，由 m,n 的任意性，取期望得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}E\|df_i\|^q\leqslant c2^q\sup_n E\|f_n\|^q,\qquad(3.4)$$

这说明 X 是 q 可凸的.

引理 2 假设 $1<p\leqslant 2$,则以下条件等价:

(i) X 是 p 可光滑的;

(ii) 存在 $c=c_p>0$ 使得对于每个 X 值 p 可积鞅 $f=(f_n)$ 和任何 $0\leqslant n\leqslant m$,

$$E(\|f_m-f_n\|^p|\mathscr{B}_n)\leqslant cE\Big(\sum_{i=n+1}^{m}\|df_i\|^q|\mathscr{B}_n\Big), \quad (3.5)$$

并且(或者)

$$E(\|f_m-f_{n-1}\|^p|\mathscr{B}_n)\leqslant cE\Big(\sum_{i=n}^{m}\|df_i\|^q|\mathscr{B}_n\Big). \quad (3.6)$$

此引理可类似于引理 1 证明之.

首先让我们来考察 ${}_p\widetilde{H}_a$ 与 ${}_pK_a$ 以及 ${}_p\Sigma_a$ 与 ${}_p\mathscr{K}_a$ 的关系.

定理 1 假设 $2\leqslant q\leqslant a<\infty$,则以下条件等价:

(i) X 是 q 可凸的;

(ii) ${}_qK_a\subset{}_q\widetilde{H}_a$ 并且存在 $c=c_{qa}>0$ 使得对于每个 $f\in{}_qK_a$,

$$\|f\|_{{}_q\widetilde{H}_a}\leqslant c\|f\|_{{}_qK_a}; \quad (3.7)$$

(iii) ${}_q\mathscr{K}_a\subset{}_q\Sigma_a$ 并且存在 $c=c_{qa}>0$ 使得对于每个 $f\in{}_q\mathscr{K}_a$,

$$\|f\|_{{}_q\Sigma_a}\leqslant c\|f\|_{{}_q\mathscr{K}_a}. \quad (3.8)$$

证明 假设 X 是 q 可凸的,往证(3.7)和(3.8). 首先设 $f=(f_n)\in{}_qK_a$ 并且 $\gamma\geqslant 0,\gamma\in L_a$ 使得

$$E(\|f_m-f_{n-1}\|^q|\mathscr{B}_n)\leqslant E(\gamma^q|\mathscr{B}_n)\ (0\leqslant n\leqslant m), \quad (3.9)$$

由(3.2),存在 $c>0$ 使得

$$E\Big(\sum_{i=n}^{m}\|df_i\|^q|\mathscr{B}_n\Big)\leqslant cE(\|f_m-f_n\|^q|\mathscr{B}_n)\leqslant cE(\gamma^q|\mathscr{B}_n),$$

所以

$$E\Big(\sum_{i=n}^{\infty}\|df_i\|^q|\mathscr{B}_n\Big)\leqslant cE(\gamma^q|\mathscr{B}_n). \quad (3.10)$$

现在若 $q=a$, 在(3.10) 中取 $n=1$,则 $E\sum_{i=1}^{\infty}\|df_i\|^q\leqslant cE\gamma^q$ 或者 $\|S^{(q)}(f)\|_q\leqslant c\|\gamma\|_q$,由 $\|f\|_{{}_qK_a}$ 的定义知道 (3.7)成立. 若 $q<a$,对于任意的 $\alpha>0,\lambda>0$ 定义停时

$$\tau_1 = \inf\{n, S_n^{(q)}(f) > \alpha\lambda\},$$
$$\tau_2 = \inf\{n, S_n^{(q)}(f) > (\alpha+1)\lambda\},$$

$(\inf\varnothing=\infty)$ 则 $\tau_1\leqslant\tau_2$, $\{\tau_1<\infty\}\in\mathscr{B}_{\tau_1}\subset\mathscr{B}_{\tau_2}$ 并且

$$\{S^{(q)}(f)>(\alpha+1)\lambda\} = \{\tau_2<\infty\}\subset\{\tau_1<\infty, S_{\tau_2}^{(q)}(f)^q - S_{\tau_1-1}^{(q)}(f)^q > (\alpha+1)^q\lambda^q - \alpha^q\lambda^q\}$$
$$= \{\tau_1<\infty, \sum_{i=\tau_1}^{\tau_2}\|df_i\|^q > A^q\lambda^q\}, \tag{3.11}$$

其中$(A^q=(\alpha+1)^q-\alpha^q)$. 由(3.10)和(3.11)得出

$$P(S^{(q)}(f)>(\alpha+1)\lambda)\leqslant\frac{1}{A^q\lambda^q}\int_{\{\tau_1<\infty\}}\sum_{i=\tau_1}^{\tau_2}\|df_i\|^q dP$$
$$=\frac{1}{A^q\lambda^q}\int_{\{\tau_1<\infty\}}E\Big(\sum_{i=\tau_1}^{\tau_2}\|df_i\|^q|\mathscr{B}_{\tau_1}\Big)dP$$
$$\leqslant\frac{1}{A^q\lambda^q}\int_{\{S^{(q)}(f)>\alpha\lambda\}}\gamma^q dP, \tag{3.12}$$

于是

$$\|S^{(q)}(f)\|_a^a = (\alpha+1)^a\int_0^\infty P(S^{(q)}(f)>(\alpha+1)\lambda)d\lambda^a$$
$$=\frac{c(\alpha+1)^a}{A^q}\int_0^\infty\lambda^{-q}d\lambda^a\int_{\{S^{(q)}(f)>\alpha\lambda\}}\gamma^q dP$$
$$=\frac{ca(\alpha+1)^a}{A^q}\int_\Omega\gamma^q dP\int_0^{S^{(q)}(f)/\alpha}\lambda^{a-q-1}d\lambda$$
$$=\frac{ca(\alpha+1)^a}{(a-q)A^q\alpha^{a-q}}\int_\Omega\gamma^q S^{(q)}(f)^{a-q}dP$$
$$\leqslant c'^q\|\gamma\|_a^q\|S^{(q)}(f)\|_a^{a-q},$$

从而 $\|S^{(q)}(f)\|_a\leqslant c'\|\gamma\|_a$，其中 c'（例如取 $\alpha=1$）是仅依赖于 q 与 a 的常数. (3.7)成立.

为证(3.8)，设 $f\in{}_q\mathscr{K}_a$，由${}_q\mathscr{K}_a$ 的定义和不等式(3.1)，

$$E\Big(\sum_{i=n+1}^\infty E(\|df_i\|^q|\mathscr{B}_{i-1})|\mathscr{B}_n\Big)\leqslant cE(\gamma^q|\mathscr{B}_n) \tag{3.13}$$

$(n\geqslant 0)$其中 $\gamma\geqslant 0,\gamma\in L_a$. 当 $q=a$ 时(3.8)为显然. 当 $q<a$ 时对于 $\alpha>0,\lambda>0$ 仿照上面定义停时 τ_1,τ_2,不过将其中的 $S_n^{(q)}(f)$ 换为 $\sigma_{n+1}^{(q)}(f)$,类似地讨论得出(3.8).

反过来若(3.7),(3.8)成立并且 f 是 X 值一致有界鞅(即 $f^*\leqslant M<\infty$),显然 $f\in {}_qK_a\cap {}_q\mathscr{K}_a$,从而由(3.7)得出

$$\|S_n^{(q)}(f)\|_a\leqslant c\|f\|_{{}_qK_a}\leqslant 2c\sup_n\|f_n\|_\infty<\infty,$$

由(3.8)得出

$$\begin{aligned}\|S^{(q)}(f)\|_q&=\|\sigma^{(q)}(f)\|_q\leqslant\|\sigma^{(q)}(f)\|_a\\&\leqslant c\|f\|_{{}_q\mathscr{K}_a}\leqslant 2c\sup_n\|f_n\|_\infty<\infty,\end{aligned}$$

总之有 $S^{(q)}(f)<\infty$ a.e., §2 定理 1 说明 X 是 q 可凸的.

定理 2 假设 $1<p\leqslant 2,p\leqslant a<\infty$,则以下条件等价:

(i) X 是 p 可光滑的;

(ii) ${}_p\widetilde{H}_a\subset {}_pK_a$并且存在 $c=c_{pa}>0$ 使得对于每个 $f\in {}_p\widetilde{H}_a$,

$$\|f\|_{{}_pK_a}\leqslant c\|f\|_{{}_p\widetilde{H}_a};\tag{3.14}$$

(iii) ${}_p\Sigma_a\subset {}_p\mathscr{K}_a$并且存在 $c=c_{pa}>0$ 使得对于每个 $f\in {}_p\Sigma_a$,

$$\|f\|_{{}_p\mathscr{K}_a}\leqslant c\|f\|_{{}_p\Sigma_a}.\tag{3.15}$$

证明 假设 X 是 p 可光滑的,为证明(3.14),设 $f\in {}_p\widetilde{H}_a$并应用(3.6) 则

$$\begin{aligned}E(\|f_m-f_{n-1}\|^p|\mathscr{B}_n)&\leqslant cE\Big(\sum_{i=n}^m\|df_i\|^p|\mathscr{B}_n\Big)\\&\leqslant cE(S^{(p)}(f)^p|\mathscr{B}_n),\ (0\leqslant n\leqslant m)\end{aligned}\tag{3.16}$$

于是 $\|f\|_{{}_pK_a}\leqslant c'\|S^{(p)}(f)\|_a=c'\|f\|_{{}_p\widetilde{H}_a}$,故(3.14)成立.

为证明(3.15),假设 $\sigma^{(p)}(f)\in L_a$,从(3.5)推出

$$\begin{aligned}E(\|f_m-f_n\|^p|\mathscr{B}_n)&\leqslant cE\Big(\sum_{i=n+1}^m\|df_i\|^p|\mathscr{B}_n\Big)\\&\leqslant cE\Big(\sum_{i=1}^\infty E(\|df_i\|^p|\mathscr{B}_{i-1})|\mathscr{B}_n\Big)\\&=cE(\sigma^{(p)}(f)^p|\mathscr{B}_n),\end{aligned}\tag{3.17}$$

从而 $\|f\|_{{}_p\mathscr{K}_a}\leqslant c'\|\sigma^{(p)}(f)\|_a=c'\|f\|_{{}_p\Sigma_a}$.

反过来，假定 (3.14)成立并且 $f\in{}_p\widetilde{H}_a$，由${}_pK_a$ 的定义，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\gamma\geqslant 0,\gamma\in L_a$使得

$$E(\|f_m-f_{n-1}\|^p|\mathscr{B}_n)\leqslant E(\gamma^p|\mathscr{B}_n),\ \|\gamma\|_a\leqslant\|f\|_{{}_pK_a}+\varepsilon,$$

取期望则

$$\begin{aligned}E\|f_m-f_{n-1}\|^p&\leqslant E\gamma^p\leqslant(c\|f\|_{{}_p\widetilde{H}_a}+\varepsilon)^p\\&=(c\|S^{(p)}(f)\|_a+\varepsilon)^p.\end{aligned}$$

以 $\mathcal{J}=(\mathcal{J}_i)$ 代替 $f=(f_n)$，其中 $\mathcal{J}_i=f_{n+1+i}-f_{n-1}(i\geqslant 0)$ 可得

$$E\|f_m-f_{n-1}\|^p\leqslant\Big(c\Big\|\Big(\sum_{i=n}^{\infty}\|df_i\|^p\Big)^{1/p}\Big\|_a+\varepsilon\Big)^p.$$

当 $n\to\infty$时右端趋于零，Fatou 引理说明 f_n L_p 收敛，从而 f_n $a.e.$ 收敛.

若(3.15)成立并且 $f\in{}_p\Sigma_a$，可以证明同样的结论.

现在设 $S^{(p)}(f)\in L_\infty$，则 $f\in{}_p\widetilde{H}_a$，则上面讨论知道 f_n $a.e.$ 收敛，若 $\sigma^{(p)}(f)<\infty$ $a.e.$，定义

$$\tau_\lambda=\inf\{n,\sigma_{n+1}^{(p)}(f)>\lambda\}\ (\lambda>0),$$

则 $f^{(\tau_\lambda)}=(f_{\tau_\lambda\wedge n})$ 是鞅并且 $\sigma^{(p)}(f^{(\tau_\lambda)})=\sigma_{\tau_\lambda}^{(p)}(f)\leqslant\lambda$，所以 $f^{(\tau_\lambda)}\in{}_p\Sigma_a$ 并且 $f_{\tau_\lambda\wedge n}$ $a.e.$ 收敛. 但在集合 $\{\tau_\lambda=\infty\}=\{\sigma^{(p)}(f)\leqslant\lambda\}$ 上 $f_{\tau_\lambda\wedge n}=f_n$，从而由 $\sigma^{(p)}(f)<\infty$ $a.e.$ 得出 f_n $a.e.$ 收敛.

最后假定 $f=(f_n)$ 是 Walsh-Paley 鞅并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-p}\|df_n\|^p\in L_\infty$，定义 $\mathcal{J}_n=\sum\limits_{i=1}^{n}i^{-1}df_i$，$\mathcal{J}=(\mathcal{J}_n)$ 则 $S^{(p)}(\mathcal{J})\in L_\infty$ 并且 $\|\sigma^{(p)}(\mathcal{J})\|_p=\|S^{(p)}(\mathcal{J})\|_p<\infty$，无论 (3.14) 或(3.15) 都能保证 $\sigma^{(p)}(\mathcal{J})<\infty$ $a.e.$，由此知道，$\mathcal{J}_n$ $a.e.$ 收敛. 由 Kronecher 引理 $n^{-1}f_n\to 0$ $a.e.$，Ⅶ. § 3 定理 3 说明 X 是 p 可光滑的.

对于 ${}_pK_a$与 ${}_pL_a$以及 ${}_p\mathscr{K}_a$与 ${}_p\mathscr{L}_a$，首先我们有

定理 3 若 $0<p\leqslant a<\infty$，则

(i) ${}_p\widetilde{H}_a\sim{}_pL_a$，此时对于每个鞅 $f=(f_n)$ $(f_0=0)$，

$$\left(\frac{p}{a}\right)^{1/p}\|f\|_{{}_pH_a}\leqslant\|f\|_{{}_pL_a}\leqslant\|f\|_{{}_pH_a},\qquad(3.18)$$

(ii) ${}_p\Sigma_a\sim{}_p\mathscr{L}_a$，此时对于每个鞅 $f=(f_n)$ $(f_0=0)$，

$$\left(\frac{p}{a}\right)^{1/p}\|f\|_{{}_p\Sigma_a}\leqslant\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_a}\leqslant\|f\|_{{}_p\Sigma_a}.\qquad(3.19)$$

证明 这里仅证(i)，类似地可证明(ii).

设 $f=(f_n)\in{}_p\widetilde{H}_a$，对于任何 $\Lambda=(\lambda_n)\in R$ 有

$$E\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1-\frac{p}{a}}\|df_n\|^p\leqslant E\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_\infty^{1-\frac{p}{a}}\|df_n\|^p=E\lambda_\infty^{1-\frac{p}{a}}S^{(p)}(f)^p$$
$$\leqslant(E\lambda_\infty)^{1-\frac{p}{a}}\|S^{(p)}(f)\|_a^p\leqslant\|S^{(p)}(f)\|_a^p,\qquad(3.20)$$

故(3.18)式右端成立.

为证左端，注意若每个有限鞅(停止于某个 n)满足左端，则 ${}_pL_a$ 中的每个 f 也满足. 现在假定 $f\in{}_pL_a$ 是有限鞅，对于每个 $\Lambda=(\lambda_n)$，显然 $E\sum\limits_n\lambda_n^{1-\frac{p}{a}}\|df_n\|^p\leqslant\|f\|_{{}_pL_a}^p<\infty$，由 Λ 的任意性和 $E\lambda_n\leqslant1$(换句话说 $E\lambda_n^{(1-\frac{p}{a})(1-\frac{p}{a})^{-1}}\leqslant1$，$\frac{p}{a}$ 是 $\left(1-\frac{p}{a}\right)^{-1}$ 的共轭数)，故 $\|df_n\|\in L_a$ 并且 $\|S^{(p)}(f)\|_a<\infty$. 不失一般性，假定 $\|S^{(p)}(f)\|_a=1$，若 $\bar\lambda_n=S_n^{(p)}(f)^a$，则 $\bar\Lambda=(\bar\lambda_n)\in R$. 注意对于 $\alpha\leqslant1\leqslant\rho$，$\alpha(\rho-1)\rho^{\alpha-1}\leqslant\rho^\alpha-1$，取 $\alpha=\frac{p}{a}$，$\rho=S_n^{(p)}(f)^a/S_{n-1}^{(p)}(f)^a$ 得到

$$1=ES^{(p)}(f)^a=E\sum_n(S_n^{(p)}(f)^a-S_{n-1}^{(p)}(f)^a)$$
$$\leqslant\frac{a}{p}E\sum_n(S_n^{(p)}(f)^p-S_{n-1}^{(p)}(f)^p)S_n^{(p)}(f)^{a-p}$$
$$=\frac{a}{p}E\sum_n\bar\lambda_n^{1-\frac{p}{a}}\|df_n\|^p\leqslant\frac{a}{p}\|f\|_{{}_pL_a}^p,\qquad(3.21)$$

从而 $\|f\|_{{}_pH_a}\leqslant\left(\frac{a}{p}\right)^{1/p}\|f\|_{{}_pL_a}$，此即(3.18)左端.

由此定理可以得到

推论 1 设 $2\leqslant q\leqslant a<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 可凸的；

(ii) ${}_qK_a\subset{}_qL_a$ 并且 存在 $c=c_{qa}>0$ 使得每个 $f\in{}_qK_a(f_0=0)$，

$$\|f\|_{{}_qL_a}\leqslant c\|f\|_{{}_qK_a};\qquad(3.22)$$

(iii) ${}_q\mathscr{K}_a\subset{}_q\mathscr{L}_a$ 且存在 $c=c_{qa}>0$ 使得每个 $f\in{}_q\mathscr{K}_a(f_0=0)$，

$$\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_a}\leqslant c\|f\|_{{}_q\mathscr{K}_a}.\qquad(3.23)$$

推论 2 设 $1<p\leqslant2$，$p\leqslant a<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 可光滑的；

(ii) ${}_pL_a\subset{}_pK_a$ 并且 存在 $c=c_{pa}>0$ 使得每个 $f\in{}_pK_a(f_0=0)$.

$$\|f\|_{{}_pK_a}\leqslant c\|f\|_{{}_pL_a};\qquad(3.24)$$

(iii) ${}_p\mathscr{L}_a\subset{}_p\mathscr{K}_a$ 且存在 $c=c_{pa}>0$ 使得每个 $f\in{}_p\mathscr{K}_a(f_0=0)$，

$$\|f\|_{{}_p\mathscr{K}_a}\leqslant c\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_a}.\qquad(3.25)$$

注意(3.18)，(3.19) 式对于任何 Banach 空间值鞅成立，于是推论 1，2 从定理 1，2，3 推出.

同样地，为了得到 H_a 与 ${}_pL_a$ 和 ${}_p\mathscr{L}_a$ 的关系，我们有

定理 4 设 $1<p\leqslant a<\infty$，则

(i) $H_a\sim{}_pK_a$，此时存在 $c=c_{pa}>0$，使得对于每个鞅 $f=(f_n)$，

$$c^{-1}\|f\|_{H_a}\leqslant\|f\|_{{}_pK_a}\leqslant c\|f\|_{H_a},\qquad(3.26)$$

(ii) $H_a\sim{}_p\mathscr{K}_a$，此时有 $c=c_{p_a}>0$，使得对于每个鞅 $f=(f_n)$，

$$c^{-1}\|f\|_{H_a}\leqslant\|f\|_{{}_p\mathscr{K}_a}\leqslant c\|f\|_{H_a}.\qquad(3.27)$$

证明 为证 (i)，设 $f\in H_a$(即 $f^*\in L_a$)，显然，

$$E(\|f_m-f_{n-1}\|^p|\mathscr{B}_n)\leqslant E((2f^*)^p|\mathscr{B}_n)$$

$(0\leqslant n\leqslant m)$，由此知道

$$\|f\|_{{}_pK_a}=\inf_\gamma\|\gamma\|_a\leqslant2\|f^*\|_a,\qquad(3.28)$$

这说明 $H_a\subset{}_pK_a$ 并且 (3.26)右端成立.

另一方面，若 $f\in{}_pK_a$ 并且 $\gamma\geqslant0$，$\gamma\in L_a$ 使得

$$E(\|f_m-f_{n-1}\|^p|\mathscr{B}_n)\leqslant E(\gamma^p|\mathscr{B}_n)\quad(0\leqslant n\leqslant m),$$

则

$$E((\| f_m \| - \| f_{n-1} \|)^p | \mathscr{B}_n) \leqslant E(\gamma^p | \mathscr{B}_n) \quad (0 \leqslant n \leqslant m), \tag{3.29}$$

从而 $E\| f_n \|^p \leqslant E\gamma^p < \infty$, (f_n)是一致可积的. 若 $p=a$, 由 Doob 不等式得到

$$\| f^* \|_p \leqslant p' \sup_n \| f_n \|_p \leqslant p' \| \gamma \|_p \left(p' = \frac{p}{p-1} \right),$$

所以(3.26)左端成立. 若 $p<a$, 由于 $(\| f_n \|)$是实值下鞅, 故存在实值可积函数 h_∞ 使得 $\| f_n \| \to h_\infty$ $a.e.$ 同时在 L_p 中收敛. 从(3.29)推出

$$\sup_{0\leqslant n<\infty} E(|h_\infty - \| f_{n-1} \||^p | \mathscr{B}_n) \leqslant E(\gamma^p | \mathscr{B}_n). \tag{3.30}$$

对于 $\alpha>0, \lambda>0$ 定义

$$\tau_1 = \inf\{n, \| f_n \| > \alpha\lambda\}, \tau_2 = \inf\{n, \| f_n \| > (\alpha+1)\lambda\}$$

则 $\tau_1 \leqslant \tau_2$, $\{\tau_1 < \infty\} \in \mathscr{B}_{\tau_1} \subset \mathscr{B}_{\tau_2}$ 并且

$$\begin{aligned} \{f^* > (\alpha+1)\lambda\} &= \{\tau_2 < \infty\} \\ &\subset \{\tau_1 < \infty, \| f_{\tau_2} \| - \| f_{\tau-1} \| \geqslant \lambda\}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

应用 (3.30), (3.31) 得出

$$\begin{aligned} P(f^* > (\alpha+1)\lambda) &\leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{\tau_1<\infty\}} (\| f_{\tau_2} \| - \| f_{\tau_1-1} \|)^p dP \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{\tau_1<\infty\}} E(|h_\infty - \| f_{\tau_1-1} \||^p | \mathscr{B}_{\tau_1}) dP \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda^p} \int_{\{f^*>\alpha\lambda\}} \gamma^p dP \end{aligned} \tag{3.32}$$

从而

$$\begin{aligned} \| f^* \|_a^a &= (\alpha+1)^a \int_0^\infty P(f^* > (\alpha+1)\lambda) d\lambda^a \\ &\leqslant (\alpha+1)^a \int_0^\infty \lambda^{-p} d\lambda^a \int_{\{f^*>\alpha\lambda\}} \gamma^p dP \\ &\leqslant \frac{a(\alpha+1)^a}{(a-p)\alpha^{a-p}} \int_\Omega \gamma^p (f^*)^{a-p} dP \\ &\leqslant \frac{a(\alpha+1)^a}{(a-p)\alpha^{a-p}} \| \gamma \|_a^q \| f^* \|_a^{a-p}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

最后得出 $\|f^*\|_a\leqslant c\|\gamma\|_a$，其中 c（例如取 $\alpha=a$）是仅与 a、p 有关的常数. 于是(3.26) 左端成立.

(3.27) 右端是显然的. 对于左端，注意 ${}_pK_a\subset{}_p\mathscr{K}_a$ 并且对于每个 $f\in{}_pK_a$，$\|f\|_{{}_pK_a}\leqslant 2\|f\|_{{}_p\mathscr{K}_a}$，故(3.27)从(3.26)得出.

推论 3 设 $2\leqslant q\leqslant a<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 可凸的；

(ii) $H_a\subset{}_qL_a$ 并且存在 $c=c_{qa}>0$，使得每个 $f\in H_a(f_0=0)$，

$$\|f\|_{{}_qL_a}\leqslant c\|f\|_{H_a};\tag{3.34}$$

(iii) $H_a\subset{}_q\mathscr{L}_a$ 并且存在 $c=c_{qa}>0$，使得每个 $f\in H_a(f_0=0)$，

$$\|f\|_{{}_q\mathscr{L}_a}\leqslant c\|f\|_{H_a}.\tag{3.35}$$

推论 4 设 $1<p\leqslant 2$，$p\leqslant a<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 可光滑的；

(ii) ${}_pL_a\subset H_a$ 并且存在 $c=c_{pa}>0$ 使得每个 $f\in{}_pL_a(f_0=0)$，

$$\|f\|_{H_a}\leqslant c\|f\|_{{}_pL_a};\tag{3.36}$$

(iii) ${}_p\mathscr{L}_a\subset H_a$ 并且存在 $c=c_{pa}>0$ 使得每个 $f\in{}_pL_a(f_0=0)$，

$$\|f\|_{H_a}\leqslant c\|f\|_{{}_p\mathscr{L}_a}.\tag{3.37}$$

由定理 1，2 和定理 4 又可得到

推论 5 设 $2\leqslant q\leqslant a<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 可凸的；

(ii) $H_a\subset{}_q\widetilde{H}_a$ 并且存在 $c=c_{qa}>0$，使得对于每个 $f\in H_a$，

$$\|f\|_{{}_q\widetilde{H}_a}\leqslant c\|f\|_{H_a};\tag{3.38}$$

(iii) $H_a\subset{}_q\Sigma_a$ 并且存在 $c=c_{qa}>0$，使得对于每个 $f\in H_a$，

$$\|f\|_{{}_q\Sigma_a}\leqslant c\|f\|_{H_a}.\tag{3.39}$$

推论 6 设 $1<p\leqslant 2$，$p\leqslant a<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 p 可光滑的；

(ii) ${}_p\widetilde{H}_a\subset H_a$ 并且存在 $c=c_{pa}>0$，使得对于每个 $f\in{}_p\widetilde{H}_a$，

$$\|f\|_{H_a}\leqslant c\|f\|_{{}_p\widetilde{H}_a};\tag{3.40}$$

(iii) ${}_p\Sigma_a\subset H_a$ 并且存在 $c=c_{pa}>0$，使得对于每个 $f\in{}_p\Sigma_a$，

$$\| f \|_{H_a} \leqslant c \| f \|_{{}_p\Sigma_a} \tag{3.41}$$

根据 Kwapien 定理又可得到下面推论.

推论 7 设 $2 \leqslant a < \infty$,则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) ${}_2\widetilde{H}_a \sim {}_2K_a$,此时存在 $c = c_a > 0$,使得每个鞅 $f = (f_n)$,

$$c^{-1} \| f \|_{{}_2\widetilde{H}_a} \leqslant \| f \|_{{}_2K_a} \leqslant c \| f \|_{{}_2\widetilde{H}_a}; \tag{3.42}$$

(iii) ${}_2K_a \sim {}_2L_a$,此时存在 $c = c_a > 0$,使得对于每个鞅 $f = (f_n)$,

$$c^{-1} \| f \|_{{}_2K_a} \leqslant \| f \|_{{}_2L_a} \leqslant c \| f \|_{{}_2K_a}; \tag{3.43}$$

(iv) $H_a \sim {}_2L_a$,此时存在 $c = c_a > 0$,使得对于每个鞅 $f = (f_n)$,

$$c^{-1} \| f \|_{H_a} \leqslant \| f \|_{{}_2L_a} \leqslant c \| f \|_{H_a}; \tag{3.44}$$

(v) $H_a \sim {}_2\widetilde{H}_a$,此时存在 $c = c_a > 0$,使得对于每个鞅 $f = (f_n)$,

$$c^{-1} \| f \|_{H_a} \leqslant \| f \|_{{}_2\widetilde{H}_a} \leqslant c \| f \|_{H_a} \tag{3.45}$$

此外,当分别以 ${}_2\Sigma_a$, ${}_2\mathscr{K}_a$, ${}_2\mathscr{L}_a$ 代替 ${}_2\widetilde{H}_a$, ${}_2K_a$, ${}_2L_a$ 时上述论断仍成立.

让我们转到限制增长的 Young 函数和 Orlicz 空间范数的情况. 首先定义相应的鞅空间如下:对于 $1 \leqslant p < \infty$,记

$${}^pL^\Phi = \{\varphi, \varphi \text{ 是实可测函数并且 } \| \varphi \|_{{}^pL^\Phi} = \| \, |\varphi|^p \, \|_\Phi^{1/p} < \infty\},$$

$$R_\Phi^p = \{\Lambda = (\lambda_n) \text{ 是非负增加适应 } R.V. \text{ 序列}, E\Psi(\lambda_\infty^q) \leqslant 1\}.$$

定义 B 值鞅空间

$$H = \{f = (f_n), \| f \|_H = \| \varphi \|_{{}^pL^\Phi} < \infty\},$$

$$H = p\widetilde{H}_\Phi, \text{若 } \varphi = S^{(p)}(f); \; H = {}_p\Sigma_\Phi, \text{若 } \varphi = \sigma^{(p)}(f).$$

$$K = \{f = (f_n), \exists \, \gamma \geqslant 0, \gamma \in {}^pL^\Phi, E(\| f_m - \theta_n \|^p | \mathscr{B}_n) \leqslant E(\gamma^p | \mathscr{B}_n), \forall \; 0 \leqslant n \leqslant m < \infty\},$$

$$\| f \|_k = \inf_\gamma \| r \|_{{}^pL^\Phi}.$$

$$K = {}_pK_\Phi, \text{若 } \theta_n = f_{n-1}; \; K = p\mathscr{K}_\Phi, \text{若 } \theta_n = f_n.$$

$$L = \left\{f = (f_n), \| f \|_L = \sup_{\Lambda \in R_\Phi^p} \left(E \sum_{n=1}^\infty \theta_n^p \| df_n \|^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

$L={}_pL_\Phi$，若 $\theta_n=\lambda_n$；$L={}_p\mathscr{L}_\Phi$，若 $\theta_n=\lambda_{n-1}(\lambda_0=0)$.

定理 5 假设 $2\leqslant q<\infty$，Young 函数 Φ 满足 $1<q_\Phi\leqslant p_\Phi<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 是 q 可凸的；

(ii) $qK_\Phi\subset q\widetilde{H}_\Phi$ 并且存在 $c=c_{q\Phi}>0$ 使得对于每个 $f\in{}_qK_\Phi$，

$$\| f \|_{q\widetilde{H}_\Phi}\leqslant c\| f \|_{qK_\Phi}; \tag{3.46}$$

(iii) $qK_\Phi\subset qL_\Phi$ 且存在 $c=c_{q\Phi}>0$ 使每个 $f\in{}_qK_\Phi(f_0=0)$，

$$\| f \|_{qL_\Phi}\leqslant c\| f \|_{qK_\Phi}. \tag{3.47}$$

此外，若分别以 $q\Sigma_\Phi, q\mathscr{K}_\Phi, q\mathscr{L}_\Phi$ 代替 $q\widetilde{H}_\Phi, qK_\Phi, qL_\Phi$，以上论断仍然成立.

证明 在§1 引理 3 中以 $\lambda^q, S^{(q)}(f)^q, cL^{-q}\gamma^q$ 代替 λ,ξ,η，若 f 是 q 可凸 的，借助于(3.12)和 Φ 的限制增长性得出 $\| S^{(q)}(f)^q \|_\Phi\leqslant c\| \gamma^q \|_\Phi$，故(3.46)成立.

为了证明 (3.47)，注意 ${}_qK_\Phi\subset{}_qL_\Phi$，对于 $f\in qK_\Phi$，存在满足(3.10) 的 $\gamma\geqslant0,\gamma\in{}^qL^\Phi$，从而

$$\begin{aligned}
\| f \|_{qL_\Phi}^q &= \sup_{\Lambda\in R_\Phi^q} E\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^q \| df_n \|^q \\
&= \sup_{\Lambda\in R_\Phi^q} E\sum_{n=1}^\infty\sum_{j=1}^n(\lambda_j^q-\lambda_{j-1}^q)\| df_n \|^q \\
&= \sup_{\Lambda\in R_\Phi^q} E\sum_{j=1}^\infty(\lambda_j^q-\lambda_{j-1}^q)E\Big(\sum_{n=j}^\infty\| df_n \|^q\,|\,\mathscr{B}_{j-1}\Big) \\
&\leqslant c\sup_{\Lambda\in R_\Phi^q} E\lambda_\infty^q\gamma^q \\
&\leqslant c\sup_{\Lambda\in R_\Phi^q}\max(E\Psi(\lambda_\infty^q),1)\| \gamma^q \|_\Phi = c\| \gamma^q \|_\Phi.
\end{aligned}$$

于是(3.47)成立.

反过来，若(3.46)成立，由 §2 定理 1 得到 X 的 q 可凸性. 若(3.47)成立并且 $f=(f_n)$是一致有界鞅，在(3.47)中取 λ_n 恒为常数 c，则有 $\| S^{(q)}(f)^q \|_\Phi<\infty$，所以 $S^{(q)}(f)<\infty$ *a.e.*，仍由 §2 定

理 1 得出所要的结论.

定理的最后论断用类似方法得出.

特别地,若 $\Phi(t)=t^{a/q}(q\leqslant a<\infty)$,不等式(3.46)、(3.47) 变为 (3.7)和(3.22).

定理 6 假设 $1<p\leqslant 2$,Young 函数 Φ 满足 $1<q_\Phi\leqslant p_\Phi<\infty$,则以下条件等价:

(i) X 是 p 可光滑的;

(ii) $p\widetilde{H}_\Phi\subset pK_\Phi$并且存在 $c=c_{p\Phi}>0$ 使得对于每个 $f\in{}_p\widetilde{H}_\Phi$,

$$\|f\|_{pK_\Phi}\leqslant c\|f\|_{p\widetilde{H}_\Phi};\tag{3.48}$$

(iii) $pL_\Phi\subset pK_\Phi$且存在 $c=c_{p\Phi}>0$ 使每个 $f\in{}_pL_\Phi(f_0=0)$,

$$\|f\|_{pK_\Phi}\leqslant c\|f\|_{pL_\Phi}.\tag{3.49}$$

此外,若分别以 $p\Sigma_\Phi, p\mathscr{K}_\Phi, p\mathscr{L}_\Phi$代替 $p\widetilde{H}_\Phi, pK_\Phi, pL_\Phi$,以上论断仍然成立.

证明 设 X 是 p 可光滑的,$f\in{}_p\widetilde{H}_\Phi$,显然${}_p\widetilde{H}_\Phi\subset{}_pK_\Phi$,从(3.16)得出

$$\|f\|_{{}_pK_\Phi}\leqslant\|cS^{(p)}(f)^p\|_\Phi^{1/p}\leqslant c\|f\|_{{}_p\widetilde{H}_\Phi}.$$

此即 (3.48).

为证 (3.49),不失一般性假设 $\|f\|_{{}_pL_\Phi}=1$,即

$$\sup_{\Lambda\in R_\Phi^p}E\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^p\|df_n\|^p\leqslant 1,\tag{3.50}$$

对于 $f=(f_n)$ 和 $m>0$,定义

$$g_n^p=E(\|f_m-f_n\|^p|\mathscr{B}_n),F_n=\{\omega,g_{n-1}^{*p}<g_n^p=g_m^{*p}\},\tag{3.51}$$

则 $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$. 若 $\gamma\geqslant 0, E\Psi(\gamma)\leqslant 1$,定义

$$\lambda_n^p=E\left(\gamma\chi_{\bigcup_{i=1}^{n}F_i}|\mathscr{B}_n\right)\quad(\lambda_0=0),$$

则 $E\Psi(\lambda_\infty^p)=E\Psi(\gamma)\leqslant 1, \Lambda=(\lambda_n)\in R_\Phi^p$,现在借助于(3.51),(3.52),由 X 的 p 可光滑性得到

$$
\begin{aligned}
Eg_m^{*p}\gamma &= E\sum_{j=1}^{m}E(g_j^p\gamma\chi_{F_j}\,|\,\mathscr{B}_j)\\
&= E\sum_{j=1}^{m}E(g_j^pE(\lambda_j^p-\lambda_{j-1}^p\,|\,\mathscr{B}_j))\\
&= E\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j^p-\lambda_{j-1}^p)E(\|f_m-f_{j-1}\|^p\,|\,\mathscr{B}_j)\\
&\leqslant cE\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j^p-\lambda_{j-1}^p)E\Big(\sum_{n=j}^{m}\|df_n\|^p\,|\,\mathscr{B}_j\Big)\\
&= cE\sum_{j=1}^{m}\lambda_n^p\|df_n\|^p\leqslant c.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

从而 $\|g_m^{*p}\|_\Phi=\sup\limits_{E\Psi(\gamma)\leqslant 1}Eg_m^{*p}\gamma\leqslant c$. 令 $m\to\infty$，由(3.51) 得出

$$
\|f\|_{{}_pK_\Phi}\leqslant\|g_n^p\|_\Phi^{1/p}\leqslant c\|f\|_{{}_pL_\Phi}=c,
$$

于是(3.49)成立.

反过来,X 的 p 可光滑性可象定理 2 那样从(3.48)得到. 当(3.49)成立时,类似的方法得出 X 的 p 可光滑性.

特别地,取 $\Phi(t)=t^{a/p}(p\leqslant a<\infty)$,(3.48),(3.49)变为(3.14),(3.24).

这里没有涉及关于 BMO 鞅和鞅空间的情况. 实际上应用鞅空间 BMO_p 与空间${}_a\widetilde{H}_p$,以及 BMO_p^+ 与${}_a\Sigma_p$ 的相互连续嵌入的关系同样也能给出值空间 X 的凸性和光滑性的刻划. 这里我们仅指出一点,即 B 值的 BMO 鞅象实值情况一样成立

$$
E(\exp\alpha\sup_{n\geqslant 1}\|f_n-f_1\|\,|\,\mathscr{B}_1)\leqslant K_\alpha<\infty,
$$

这里 $\|f\|_{\mathrm{BMO}_1}\leqslant 1$, $0<\alpha<e^{-1}$,证明方法也与实值情况类似(见 Long[1] § 5.1,引理 1),由此知道任何指标的 $\mathrm{BMO}_a(q\leqslant a<\infty)$ 是相互等价的,于是下标可以略去,统记为BMO,当然为了某种需要,有时仍写 BMO_a 将更为明确.

§ 4 鞅空间上若干算子的有界性

我们考虑 B 值鞅空间上的如下算子.

1° 平削算子：

$$f_p^{\#}=\sup_{n\geq 1} f_{pn}^{\#},\ f_{pn}^{\#}=\sup_{m\geqslant n}[E(\|f_m-f_{n-1}\|^p|\mathscr{B}_n)]^{1/p}.$$

$$\mathcal{J}_p^{\#}=\sup_{n\geqslant 1}\mathcal{J}_{pn}^{\#},\ \mathcal{J}_{pn}^{\#}=\sup_{m\geqslant n}[E(\|f_m-f_n\|^p|\mathscr{B}_n)]^{1/p}.$$

2° 变差算子：对自然数的每个增加序列 $0=n_0<n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots\cdots$，记

$$W_p^{(n_k)}(f)=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|^p\Big)^{1/p},$$

$$\widetilde{W}_p^{(n_k)}(f)=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}E(\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|^p|\mathscr{B}_{n_k})\Big)^{1/p}.$$

对于限制增长的 Young 函数 Φ，令

$$\|W_p(f)^p\|_{\Phi}^{1/p}=\sup_{(n_k)}\|W_p^{(n_k)}(f)^p\|_{\Phi}^{1/p},$$

$$\|\widetilde{W}_p(f)^p\|_{\Phi}^{1/p}=\sup_{(n_k)}\|\widetilde{W}_p^{(n_k)}(f)^p\|_{\Phi}^{1/p}$$

其中 sup 是关于所有这样的自然数序列 (n_k) 而取的.

3° 鞅变换算子：记

$$\Gamma_p=\{\gamma=(\gamma_n),(\gamma_n)\text{是实值非负适应 } R.V.\text{ 序列},\ \gamma_n\text{ 随 } n \text{ 单调增加},\gamma_\infty=\lim_{n\to\infty}\gamma_n,E\gamma_\infty^p<\infty\}$$

对于每个 $\gamma\in\Gamma_p$，在鞅空间 BMO_p^+ 上定义

$$T_\gamma(f)=g,\ g_n=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{i-1}df_i,\ \forall\ f=(f_n)\in\mathrm{BMO}_p^+.$$

定理 1 设 $2\leqslant q<\infty$，Φ 是限制增长的 Young 函数，则以下条件等价：

(i) X 同构于 q 一致凸空间.

(ii) 存在 $c=c_{q\Phi}>0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$\|S^{(q)}(f)^q\|_{\Phi}^{1/q}\leqslant c\|f_q^{\#q}\|_{\Phi}^{1/q}\tag{4.1}$$

(iii) 存在 $c=c_{q\Phi}>0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$\|\sigma^{(q)}(f)^q\|_{\Phi}^{1/q}\leqslant c\|\mathcal{J}_q^{\#q}\|_{\Phi}^{1/q}\tag{4.2}$$

证明 (i)⇒(ii) 对于 $f=(f_n)$ 和 $\alpha>0,\beta>0,\lambda>0$ 定义

$$\tau=\inf\{n,S_n^{(q)}(f)^q>(1+\alpha)\lambda\},$$

$$\theta = \inf\{n, S_n^{(q)}(f)^q > \alpha\lambda\},$$
$$\mu = \inf\{n, f_{qn}^{\#q} > \beta\lambda\}$$

τ,θ,μ 均为停时并且 $\theta \leqslant \tau$. 明显地

$$P(\tau < \infty) \leqslant P(\tau < \infty, \theta < \mu) + P(\mu < \infty), \quad (4.3)$$

其中

$$\begin{aligned} P(\tau < \infty, \theta < \mu) &\leqslant P(\theta < \mu, S_\tau^{(q)}(f)^q - S_{\theta-1}^{(q)}(f)^q > \lambda) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} (S_\tau^{(q)}(f)^q - S_{\theta-1}^{(q)}(f)^q) dP \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} E\Big(\sum_{i=\theta}^{\tau} \| df_i \|^q | \mathscr{B}_\theta\Big) dP \\ &\leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} E(\| f_\tau - f_{\theta-1} \|^q | \mathscr{B}_\theta) dP \\ &\leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} f_{q\theta}^{\#q} dP \leqslant c\beta P(\theta < \infty). \quad (4.4) \end{aligned}$$

中间应用了 X 的 q 一致凸性. 从而由(4.3),(4.4)得出

$$P(S^{(q)}(f)^q > (1+\alpha)\lambda) \leqslant c\beta P(S^{(q)}(f)^q > \alpha\lambda) + P(f_q^{\#q} > \beta\lambda).$$

此即关于$(S^{(q)}(f)^q, f_q^{\#q})$ 的好 λ 不等式. 当 β 足够小时, 存在 $c>0$ 使得(4.1)成立.

(i)⇒(iii) 证明与上面类似, 这一次定义

$$\tau = \inf\{n, \sigma_{n+1}^{(q)}(f)^q > (1+\alpha)\lambda\},$$
$$\theta = \inf\{n, \sigma_{n+1}^{(q)}(f)^q > \alpha\lambda\},$$
$$\mu = \inf\{n, \mathcal{J}_{qn}^{\#q}(f)^q > \beta\lambda\}.$$

此时有

$$\begin{aligned} P(\tau < \infty, \theta < \mu) &\leqslant P(\theta < \mu, \sigma_{\tau+1}^{(q)}(f)^q - \sigma_\theta^{(q)}(f)^q > \lambda) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} E(\sigma_{\tau+1}^{(q)}(f)^q - \sigma_\theta^{(q)}(f)^q | \mathscr{B}_\theta) dP \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} E\Big(\sum_{i=\theta+1}^{\tau+1} \| df_i \|^q | \mathscr{B}_\theta\Big) dP \\ &\leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} E(\| f_{\tau+1} - f_\theta \|^q | \mathscr{B}_\theta) dP \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{c}{\lambda}\int_{\{\theta<\mu\}} \mathcal{J}_q^{\#q} dP \leqslant c\beta P(\theta < \infty). \tag{4.5}$$

中间用到 X 的 q 一致凸性. 于是

$$\begin{aligned} P(\sigma^{(q)}(f)^q > (1+\alpha)\lambda) &= P(\tau < \infty) \\ &\leqslant P(\tau < \infty, \theta < \mu) + P(\mu < \infty) \\ &\leqslant c\beta P(\sigma^{(q)}(f)^q > \alpha\lambda) + P(\mathcal{J}_q^{\#q} > \beta\lambda). \end{aligned} \tag{4.6}$$

这是关于$(\sigma^{(q)}(f)^q, \mathcal{J}_q^{\#q})$ 的好 λ 不等式. 类似的道理得出(4.2).

(ii)⇒(i) 和 (iii)⇒(i) 设 $f=(f_n)$是满足 $\|f\|_\infty<\infty$ 的 WP 鞅,则(4.1)给出

$$\|S^{(q)}(f)^q\|_\Phi^{1/q} \leqslant c\|f_q^{\#q}\|_\Phi^{1/q} \leqslant c\Phi(\|f\|_\infty^q)^{1/q} < \infty,$$

于是 $S^{(q)}(f)<\infty$ $a.e.$, 所以 X 是同构于 q 一致凸空间的. 类似地,(4.2)给出

$$\|\sigma^{(q)}(f)^q\|_\Phi^{1/q} \leqslant c\|\mathcal{J}_q^{\#q}\|_\Phi^{1/q} \leqslant c\Phi(\|f\|_\infty^q)^{1/q} < \infty$$

于是 $\sigma^{(q)}(f)<\infty$ $a.e.$, 但对于 WP 鞅 $\sigma^{(q)}(f)=S^{(q)}(f)$,所以同样的结论成立.

定理 2 设 $1<p\leqslant 2$,Φ 是限制增长的严格凸函数,则以下条件等价:

(i) X 同构于 p 一致光滑空间.

(ii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$ 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$\|f_p^{\#p}\|_\Phi^{1/p} \leqslant c\|S^{(p)}(f)^p\|_\Phi^{1/p} \tag{4.7}$$

(iii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$ 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$\|\mathcal{J}_p^{\#p}\|_\Phi^{1/p} \leqslant c\|\sigma^{(p)}(f)^p\|_\Phi^{1/p} \tag{4.8}$$

证明 (i)⇒(ii). 由 X 的 p 一致光滑性,对于任何 X 值 L_p 有界鞅 $f=(f_n)$有

$$\begin{aligned} f_p^{\#p} &= \sup_n \sup_{m\geqslant n} E(\|f_m - f_{n-1}\|^p | \mathscr{B}_n) \\ &\leqslant c \sup_n E\Big(\sum_{i=n}^{\infty} \|df_i\|^p | \mathscr{B}_n\Big) \\ &\leqslant c \sup_n E(S^{(p)}(f)^p | \mathscr{B}_n) \end{aligned}$$

由 $q_\Phi>1$ 和 §1 推论 4,

$$\| f_p^{\#p} \|_\Phi \leqslant c \| \sup_n E(S^{(p)}(f)^p | \mathscr{B}_n) \|_\Phi$$

$$\leqslant c' \sup_n \| E(S^{(p)}(f)^p | \mathscr{B}_n) \|_\Phi \leqslant c \| S^{(p)}(f)^p \|_\Phi.$$

所以 (4.7) 成立.

(i)⇒(iii) 类似地有

$$\mathcal{F}_p^{\#p} = \sup_n \sup_{m \geqslant n} E(\| f_m - f_{n-1} \|^p | \mathscr{B}_n)$$

$$\leqslant c \sup_n E\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \| df_i \|^p | \mathscr{B}_n \right)$$

$$\leqslant c \sup_n E(\sigma^{(p)}(f)^p | \mathscr{B}_n)$$

并且最后推出(4.8).

(ii)⇒(i) 和 (iii)⇒(i). 设 $f=(f_n)$ 是 X 值 WP 鞅, 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \| df_n \|^p \in L_\infty$, 定义 $\mathcal{F}^{(n)} = (\mathcal{F}_i^{(n)}, i \geqslant n)$, 其中 $d\mathcal{F}_i^{(n)} = i^{-1} df_i$, 此时 $S^{(p)}(\mathcal{F}^{(n)})^p = \sum_{i=n}^{\infty} i^{-p} \| df_i \|^p \to 0\ (n \to \infty)$. 由 Fatou 引理和(4.7),

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{F}_p^{(n)\#p} \|_\Phi = 0, \text{从而} \lim_{n\to\infty} E\Phi(\mathcal{F}_p^{(n)\#p}) = 0.$$

若 Ψ 是 Φ 的余函数, 则

$$E \| \mathcal{F}_m^{(n)} - \mathcal{F}_i^{(n)} \|^p \leqslant E\mathcal{F}_p^{(n)\#p} \leqslant \Psi(1) E\Phi(\mathcal{F}_p^{(n)\#p}) \to 0\ (n \to \infty)$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} df_n$ 以 L_p 范数收敛从而 $a.e.$ 收敛, 由 Kronecher 引理得出 $n^{-1} f_n\ a.e.$ 收敛. 故 X 同构于 p 一致光滑空间(Ⅶ, §3 定理 3).

推论 1 设 X 是 Banach 空间, Φ 是限制增长的 Young 函数, $q_\Phi>1$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) 存在 $c=c_\Phi>0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$c^{-1} \| f_2^{\#2} \|_\Phi^{1/2} \leqslant \| S^{(2)}(f)^2 \|_\Phi^{1/2} \leqslant c \| f_2^{\#2} \|_\Phi^{1/2} \qquad (4.9)$$

(iii) 存在 $c=c_\Phi>0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$c^{-1}\|\mathcal{J}_2^{\#2}\|_\Phi^{1/2}\leqslant\|\sigma^{(2)}(f)^2\|_\Phi^{1/2}\leqslant c\|\mathcal{J}_2^{\#2}\|_\Phi^{1/2}\qquad(4.10)$$

定理 3 设 $1<p\leqslant 2$，Φ 是限制增长的 Young 函数，则以下条件等价：

(i) X 同构于 p 一致光滑空间.

(ii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$c^{-1}\|S^{(p)}(f)^p\|_\Phi^{1/2}\leqslant\|W_p(f)^p\|_\Phi^{1/p}\leqslant c\|S^{(p)}(f)^p\|_\Phi^{1/2}\qquad(4.11)$$

(iii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$\|f^{*p}\|_\Phi^{1/p}\leqslant c\|W_p(f)^p\|_\Phi^{1/p}.\qquad(4.12)$$

证明 (i)⇒(ii) 对于固定的序列 (n_k)，不妨设 $0=n_0<n_1<\cdots$，$(f_{n_k},k\geqslant 0)$ 仍是鞅，由 p 光滑性，

$$E(W_p^{(n_k)}(f)^p|\mathscr{B}_0)=E\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|^p|\mathscr{B}_{n_k})|\mathscr{B}_0\Big)$$

$$=cE\Big(\sum_{k=0}^{\infty}E\Big(\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}\|df_i\|^p|\mathscr{B}_{n_k}\Big)\Big|\mathscr{B}_0\Big)$$

$$=cE(S^{(p)}(f)^p|\mathscr{B}_0)\qquad(4.13)$$

用 $g=(g_i,i\geqslant n_{k_0})=(f_i-f_{n_{k_0}},i\geqslant n_{k_0})$ 代替 $f=(f_n)$ 则上式变为

$$E(W_p^{(n_k)}(f)^p-W_{pn_{k_0}-1}^{(n_k)}(f)^p|\mathscr{B}_{n_{k_0}})=E(W_p^{(n_k)}(g)^p|\mathscr{B}_{n_{k_0}})$$

$$\leqslant cE(S^{(p)}(g)^p|\mathscr{B}_{n_{k_0}})\leqslant cE(S^{(p)}(f)^p|\mathscr{B}_{n_{k_0}}).$$

令 $A_i=W_{pn_i}^{(n_k)}(f)^p$，$B=S^{(p)}(f)^p$，则上式可改写为

$$E(A_\infty-A_{k_0-1}|\widetilde{\mathscr{B}}_{k_0})\leqslant E(cB|\widetilde{\mathscr{B}}_{k_0})$$

$(\widetilde{\mathscr{B}}_{k_0}=\mathscr{B}_{nk_0})$. 于是由 §1 推论 1，

$$E\Phi(W_p^{(n_k)}(f)^p)\leqslant cE\Phi(S^{(p)}(f)^p)$$

并且

$$\|W_p^{(n_k)}(f)^p\|_\Phi\leqslant c\|S^{(p)}(f)^p\|_\Phi.$$

(n_k) 是任意的，c 与 (n_k) 的选取无关，故 (4.11) 右端成立. 至于左端，只须取 $n_k=k$，即 (n_k) 是整个自然数序列即得出

(i)⇒(iii) 由 § 3 推论 9 和(4.11)左端即得出 (4.12).

应用与定理 2 证明中相应部分类似的方法可得出(ii)⇒(i) 和 (iii)⇒(i).

下面推论的证明方法与定理 3 类似,故这里略去.

推论 2 设 $1<p\leqslant 2$,Φ 是限制增长的 Young 函数,则下述条件等价:

(i) X 同构于 p 一致光滑空间;

(ii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$ 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$c^{-1}\|\sigma^{(p)}(f)^p\|_\Phi^{1/p}\leqslant\|\widetilde{W}_p(f)^p\|_\Phi^{1/p}\leqslant c\|\sigma^{(p)}(f)^p\|_\Phi^{1/p};\tag{4.14}$$

(iii) 存在 $c=c_{p\Phi}>0$ 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$\|f^{*p}\|_\Phi^{1/p}\leqslant c\|\widetilde{W}_p(f)^p\|_\Phi^{1/p}.\tag{4.15}$$

定理 4 设 $2\leqslant q<\infty$,Φ 是限制增长的 Young 函数,则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 一致凸空间;

(ii) 存在 $c=c_{q\Phi}>0$ 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$\|W_q(f)^q\|_\Phi^{1/q}\leqslant c\|f^{*q}\|_\Phi^{1/q};\tag{4.16}$$

(iii) 存在 $c=c_{q\Phi}>0$ 使得对于每个 X 值鞅 f,

$$\|\widetilde{W}_q(f)^q\|_\Phi^{1/q}\leqslant c\|f^{*q}\|_\Phi^{1/q}.\tag{4.17}$$

证明 (i)⇒(ii) 对于固定的序列 (n_k),$(f_{n_k},k\geqslant 0)$仍是 X 值鞅,由 q 一致凸性,

$$E\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\|df_{nk+1}-f_{nk}\|^q|\mathscr{B}_0\Big)\leqslant c\sup_k E(\|f_{nk}\|^q|\mathscr{B}_0)\leqslant cE(f^{*q}|\mathscr{B}_0)\tag{4.18}$$

将 $f=(f_n)$ 换为 $g=(g_i,i\geqslant n_{k_0})=(f_i-f_{n_{k_0}-1},i\geqslant n_{k_0})$,上式变为

$$E(W_q^{(nk)}(f)^q-W_{qn_{k_0}-1}^{(nk)}(f)^q(f)^q|\mathscr{B}_{n_{k_0}})\leqslant CE(f^{*q}|\mathscr{B}_{n_{k_0}})$$

设 $A_i=W_{qk_i}^{(nk)}(f)^q$,$B=f^{*q}$,重写上面不等式得出

$$E(A_\infty-A_{k_0-1}|\mathscr{B}_{k_0})\leqslant cE(B|\mathscr{B}_{k_0}),$$

§1 推论 1 给出

$$E\Phi(W_q^{(nk)}(f)^q) \leqslant cE\Phi(f^{*q}),$$

最后可得到不等式(4.16).

(ii)⇒(iii) 由 Garsia 不等式(§1 推论 2)可知

$$E\Phi(\widetilde{W}_q^{(nk)}(f)^q) \leqslant cE\Phi(W_q^{(nk)}(f)^q) \tag{4.19}$$

于是(4.17) 由(4.16) 推出.

(iii)⇒(i) 这里的证明如同定理 1 的(iii)⇒(i).

推论 3 设 X 是 Banach 空间,Φ 是限制增长的 Young 函数,则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间;

(ii) 存在 $c=c_\Phi>0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$c^{-1}\|f^{*2}\|_\Phi^{1/2} \leqslant \|W_2(f)^2\|_\Phi^{1/2} \leqslant c\|f^{*2}\|_\Phi^{1/2}; \tag{4.20}$$

(iii) 存在 $c=c_\Phi>0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$c^{-1}\|f^{*2}\|_\Phi^{1/2} \leqslant \|\widetilde{W}_2(f)^2\|_\Phi^{1/2} \leqslant c\|f^{*2}\|_\Phi^{1/2}. \tag{4.21}$$

最后考虑算子 T_γ. 为了方便,对于每个 $\gamma=(\gamma_n)\in P_p$,记 $\|\gamma\|_{\Gamma_p}=\|\gamma_\infty\|_p$,注意这并不是一个范数,因为 Γ_p 不是线性空间. 此外我们将${}_q\Sigma_q$ 简记为 Σ_q. 对于 BMO_p^+,在§3 开头已定义过,实际上等价地

$$\mathrm{BMO}_p^+ = \{f=(f_n), \exists\, 0<\beta<\infty,$$
$$\sup_{1\leqslant n\leqslant m<\infty}\|E(\|f_m-f_n\|^p|\mathscr{B}_n)\|_\infty^{1/p}\leqslant\beta\},$$
$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_p^+} = \inf\beta.$$

现在我们有

定理 5 设 $2\leqslant q<\infty$,则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 一致凸空间.

(ii) $\Gamma_q\times\mathrm{BMO}_q^+\subset\Sigma_q$ 并且存在 $c=c_q>0$ 使得前面所说的 f,γ,g 满足

$$\|g\|_{\Sigma_q} \leqslant c\|\gamma\|_{\Gamma_q}\|f\|_{\mathrm{BMO}_q^+}. \tag{4.22}$$

证明 (i)⇒(ii) 若 $f\in\mathrm{BMO}_q^+$,则存在 $\beta\geqslant0$ 使得

$$E(\| f_m - f_n \|^q | \mathscr{B}_n) \leqslant \beta \ (\forall\, m \geqslant n \geqslant 0).$$

对于 $\gamma = (\gamma_n) \in \Gamma_q$，记 $\gamma_{i-1}^q = \sum_{j=0}^{i-1} p_j, (i = 1,2,\cdots)$，则

$$E\sigma^{(q)}(g)^q = E\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{i-1}^q E(\| df_i \|^q | \mathscr{B}_{i-1})$$

$$= E\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{i-1}^q \| df_i \|^q$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} E\Big(p_j E\Big(\sum_{i=j+1}^{\infty} \| df_i \|^q | \mathscr{B}_j\Big)\Big). \tag{4.23}$$

X 同构于 q 一致凸空间，由 § 3 中引理 1 的不等式，则

$$E\sigma^{(q)}(g)^q \leqslant c\sum_{j=0}^{\infty} E p_j \beta \doteq cE\gamma_\infty^q \beta,$$

从而上式变为

$$\| g \|_{\Sigma_q} \leqslant c^{\frac{1}{q}}(E\gamma_\infty^q)\beta^{1/q} = c^{1/q} \| \gamma \|_{\gamma_q} \| f \|_{\mathrm{BMO}_q^+},$$

(ii)成立.

(ii)⇒(i) 若(4.22) 对于每个 $f \in \mathrm{BMO}_q^+$，$\gamma \in \Gamma q$ 及相应的变换 g 成立，特别地取 $\gamma_n \equiv 1 (n \geqslant 1)$，则 $g_n \equiv f_n$，(2.22)变为

$$\| f \|_{\Sigma_q} \leqslant c \| f \|_{\mathrm{BMO}_q^+}.$$

显然每个一致有界鞅属于 BMO_q^+，并且此时有 $\| f \|_{\mathrm{BMO}_q^+} \leqslant 2 \sup\limits_n \| f_n \| < \infty$，于是 $\| f \|_{\Sigma_q} < \infty$. 由于 $E \sup\limits_n \| df_n \|^q < \infty$ 得出 $S^{(q)}(f) < \infty$ $a.e.$，§ 2 定理 1 保证了 X 同构于 q 一致凸空间.

定理 6 设 $1 < p \leqslant 2$，则以下条件等价：

(i) X 同构于 p 光滑空间.

(ii) $\Sigma_p \subset \Gamma_p \times \mathrm{BMO}_p^+$ 并且存在 $c = c_p > 0$ 使得

$$\| \gamma \|_{\Gamma_p} \| f \|_{\mathrm{BMO}_p^+} \leqslant c \| g \|_{\Sigma_p} \tag{4.24}$$

特别地可以取 f, g 使得 $\| f \|_{\mathrm{BMO}_p^+} \leqslant c$ 并且 $\| \gamma \|_{\Gamma_p} \leqslant a' \| g \|_{\Sigma_p}$，$a^{-1} + a'^{-1} = 1$.

证明 (i)⇒(ii) 设 $g \in \Sigma_p$，则 $\sigma^{(p)}(g) \in L_p$. 令 $f_n =$

$\sum_{i=1}^{n}\gamma_{i-1}^{-1}dg_i$，其中 $\gamma_i=\sup_{j\leq i}E(\sigma^{(p)}(g)|\mathscr{B}_j)$，则 γ_i 是非负单调增加的，由 Doob 不等式

$$E\gamma_\infty^p\leqslant a'^pE\sigma^{(p)}(g)^p<\infty,$$

于是 $\gamma=(\gamma_n)\in\Gamma_p$，

$$\|\gamma\|_{\Gamma_p}\leqslant a'\|\sigma^{(p)}(g)\|_p=a'\|g\|_{\Sigma_p}.$$

现在考虑 $f=(f_n)$. 由于 X 同构于 p 光滑空间，根据 §2 引理 2，当 $m\geqslant n\geqslant 1$ 时

$$\begin{aligned}E(\|f_m-f_n\|^p|\mathscr{B}_n)&\leqslant c\left(\sum_{i=n+1}^{m}\|df_i\|^p|\mathscr{B}_n\right)\\&\leqslant c\left(\sum_{i=n+1}^{m}\frac{\|dg_i\|^p}{\gamma_{i-1}^p}|\mathscr{B}_n\right)\\&\leqslant c\left(\sum_{i=n+1}^{m}\frac{\sigma_i^{(p)}(g)^p-\sigma_{i-1}^{(p)}(g)^p}{\gamma_{i-1}^p}|\mathscr{B}_n\right),\end{aligned}\qquad(4.25)$$

但由于

$$1\leqslant E(\sigma^{(p)}(g)|\mathscr{B}_{i-1})E\left(\frac{1}{\sigma^{(p)}(g)}|\mathscr{B}_{i-1}\right)\leqslant\gamma_{i-1}E\left(\frac{1}{\sigma^{(p)}(g)}|\mathscr{B}_{i-1}\right),$$

$$\frac{1}{\gamma_{i-1}^p}\leqslant E\left(\frac{1}{\sigma^{(p)}(g)^p}|\mathscr{B}_{i-1}\right).$$

(4.25)变为

$$\begin{aligned}E(\|f_m-f_n\|^p|\mathscr{B}_n)&\leqslant cE\left(\sum_{i=n+1}^{m}\frac{\sigma_i^{(p)}(g)^p-\sigma_{i-1}^{(p)}(g)^p}{\sigma^{(p)}(g)^p}|\mathscr{B}_n\right)\\&\leqslant cE\left(\frac{\sigma_m^{(p)}(g)^p-\sigma_n^{(p)}(g)^p}{\sigma^{(p)}(g)^p}|\mathscr{B}_n\right)\leqslant c\end{aligned}$$

故 $f\in\mathrm{BMO}_p^+$ 并且 $\|f\|_{\mathrm{BMO}_p^+}\leqslant c^{\frac{1}{p}}=c'$. 由于 $g_n=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{i-1}df_i$，所以(ii) 成立.

(ii)⇒(i) 当(ii) 成立时，若 $g\in\Sigma_p$，则有 $\gamma\in\Gamma_p$，$f\in\mathrm{BMO}_p^+$ 使得 $g_n=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{i-1}df_i$ 并且 $\|\gamma\|_{\Gamma_p}\leqslant a'\|g\|_{\Sigma_p}$，$\|f\|_{\mathrm{BMO}_p^+}\leqslant c$. 此

时对于 f 和 $m\geqslant i\geqslant 0$ 有

$$E(\|f_m-f_i\|\,|\mathscr{B}_i)\leqslant(E(\|f_m-f_i\|^a|\mathscr{B}_i))^{\frac{1}{a}}\leqslant c,$$

对于 $g=(g_n)$ 有

$$\begin{aligned}g_m-g_n&=\sum_{i=n+1}^{m}\gamma_{i-1}df_i\\&=\sum_{i=n+1}^{m-1}(\gamma_i-\gamma_{i-1})(f_m-f_i)+\gamma_n(f_m-f_n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\|g_m-g_n\|&\\&\leqslant\sum_{i=n+1}^{m-1}E[(\gamma_i-\gamma_{i-1})E(\|f_m-f_i\|\,|\mathscr{B}_i)]\\&\quad+E[\gamma_nE(\|f_m-f_n\|\,|\mathscr{B}_n)]\\&\leqslant cE\Big(\sum_{i=n+1}^{m-1}(\gamma_i-\gamma_{i-1})+\gamma_n\Big)\leqslant ca'\|g\|_{\Sigma_a}.\end{aligned}\tag{4.26}$$

将 g 换为 $\tilde{g}=(\tilde{g}_i)$，其中 $\tilde{g}_i=g_{i+n}-g_n(i\geqslant 1)$，由(4.26)应用 Fatou 引理可得出 g_nL_1 收敛从而 $a.e.$ 收敛. 当 g 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}E\|dg_n\|^p<\infty$ 时，令 $F_n=\sum_{i=1}^{n}i^{-1}dg_i$，以上讨论说明 $F_n a.e.$ 收敛，由 Kronecher 引理得出 $\frac{g_n}{n}\to 0\ a.e.$，于是 X 同构于 p 光滑空间.

推论 4 设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) $\Sigma_2\sim\Gamma_2\times\mathrm{BMO}_2^+$，即 $g\in\Sigma_2$ 当且仅当 g 可以表示为 $g_n=\sum_{i=1}^{n}\gamma_{i-1}df_i$，其中 $\gamma\in\Gamma_2$，$f\in\mathrm{BMO}_2^+$ 并且 f,γ,g 满足

$$c^{-1}\|\gamma\|_{\Gamma_2}\|f\|_{\mathrm{BMO}_2^+}\leqslant\|g\|_{\Sigma_2}\leqslant c\|\gamma\|_{\Gamma_2}\|f\|_{\mathrm{BMO}_2^+},\tag{4.27}$$

其中 c 是与 f,γ,g 无关的常数.

§5 上下函数不等式与微分从属

以上几节在论述 p 一致光滑和 q 一致凸空间的鞅特征时，我们利用 Kwapien 定理顺便地给出过与 Hilbert 空间同构的 Banach 空间的特征. 本节我们将介绍用鞅不等式刻划的 Hilbert 空间的另一些特征，这就是上下函数的不等式与微分从属不等式.

定义

$$M_n^{(p)}(f) = S_n^{(p)}(f) \vee f_n^*,\ M^{(p)}(f) = \sup_{n\geqslant 1} M_n^{(p)}(f),$$

$$m_n^{(p)}(f) = S_n^{(p)}(f) \wedge f_n^*,\ m^{(p)}(f) = \sup_{n\geqslant 1} m_n^{(p)}(f).$$

称 $M^{(p)}(f)$ 和 $m^{(p)}(f)$ 分别是 f 的上，下函数.

引理 1 设 $2\leqslant q<\infty$，X 同构于 q 一致凸空间，则存在 $c>0$ 使得对于任何 X 值鞅 f，当 $f^*\in L_q$ 时

$$E(S^{(q)}(f)\,|\,\mathscr{B}_0) \leqslant cE(f^*\,|\,\mathscr{B}_0) \tag{5.1}$$

从而对于任何 $n\geqslant 1$，

$$E(S^{(q)}(f) - S_{n-1}^{(q)}(f)\,|\,\mathscr{B}_n) \leqslant cE(f^*\,|\,\mathscr{B}_n) \tag{5.2}$$

证明 只需将已有的不等式"条件化". 实际上对于任何 $A\in \mathscr{B}_0$，$\mathcal{F}=(f_n\chi_A, n\geqslant 1)$ 仍是鞅，于是由 q 一致凸性，$ES^{(p)}(\mathcal{F})^q\leqslant c_q^q E\mathcal{F}^{*q}$. 或者

$$\int_A S^{(p)}(f)^q dP \leqslant c_q^q \int_A f^{*q} dP.$$

A 是任意的，从而(5.1)成立.

为得出(5.2)，对于每个 $n\geqslant 1$，定义 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_i, i\geqslant n)=(f_i - f_{n-1}, i\geqslant n)$，应用(5.1)于 $\mathcal{F}$ 则

$$\begin{aligned} E(S^{(p)}(f) - S_{n-1}^{(p)}(f)\,|\,\mathscr{B}_n) &\leqslant E((S^{(p)}(f)^q - S_{n-1}^{(p)}(f)^q)^{1/q}\,|\,\mathscr{B}_n) \\ &= E(S^{(q)}(\mathcal{F})\,|\,\mathscr{B}_n) \leqslant cE(\mathcal{F}^*\,|\,\mathscr{B}_n) \leqslant cE(f^*\,|\,\mathscr{B}_n) \end{aligned}$$

此即(5.2).

同样地，下面引理成立，其证明方法与引理 1 类似.

引理 2 设 $1<p\leqslant 2$，X 同构于 p 一致光滑空间，则存在 $c>0$ 使得对于任何 X 值鞅 f，当 $S^{(p)}(f)\in L_p$ 时

$$E(f^*\mid\mathscr{B}_0)\leqslant cE(S^{(p)}(f)\mid\mathscr{B}_0) \tag{5.3}$$

从而对于任何 $n\geqslant 1$，

$$E(f^*-f_{n-1}^*\mid\mathscr{B}_n)\leqslant cE(S^{(p)}(f)\mid\mathscr{B}_n). \tag{5.4}$$

定理 1 设 $1<p\leqslant 2\leqslant q<\infty$，

(i) 若 X 同构于 q 一致凸空间，则存在 $c>0$ 使得任何 X 值鞅 f 满足

$$ES^{(q)}(f)^2\leqslant cEf^*S^{(q)}(f) \tag{5.5}$$

(ii) 若 X 同构于 p 一致光滑空间，则存在 $c>0$ 使得任何 X 值鞅 f 满足

$$Ef^{*2}\leqslant cEf^*S^{(p)}(f) \tag{5.6}$$

证明 两者证明类似. 现仅证(5.5). 由于(5.2) 成立，故对于任何停时 τ，

$$E(S^{(p)}(f)-S_{\tau-1}^{(p)}(f)\mid\mathscr{B}_\tau)\leqslant cE(f^*\mid\mathscr{B}_\tau). \tag{5.7}$$

对于 $\lambda>0$，取 $\tau=\inf\{n,S_n^{(q)}(f)>\lambda\}$，则 $S_{\tau-1}^{(q)}(f)\leqslant\lambda$，从而

$$\int_{\{S^{(q)}(f)>\lambda\}}(S^{(q)}(f)-\lambda)dP\leqslant\int_{\{\tau<\infty\}}(S^{(q)}(f)-S_{\tau-1}^{(q)}(f))dP$$

$$\leqslant c\int_{\{\tau<\infty\}}f^*dP. \tag{5.8}$$

对两端积分分别得到

$$\int_0^\infty d\lambda\int_{\{S^{(q)}(f)>\lambda\}}(S^{(q)}(f)-\lambda)dP=\int_\Omega dP\int_0^{S^{(q)}(f)}(S^{(q)}(f)-\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{1}{2}ES^{(q)}(f)^2,$$

$$c\int_0^\infty d\lambda\int_{\{S^{(q)}(f)>\lambda\}}f^*dP=c\int_\Omega f^*dP\int_0^{S^{(q)}(f)}d\lambda=cEf^*S^{(q)}(f).$$

所以(5.5)成立.

定理 2 设 X 是 Banach 空间，则 X 同构于 Hilbert 空间当且

仅当存在 $c>0$ 使得任何 X 值鞅 f 满足

$$EM^{(2)}(f)^2 \leqslant cEm^{(2)}(f)^2. \tag{5.9}$$

证明 设 X 同构于 Hilbert 空间，X 是 2 一致可光滑和 2 一致可凸的，由(5.5)，(5.6)，

$$\begin{aligned}EM^{(2)}(f)^2 &\leqslant E(f^{*2} + S^{(2)}(f)^2) \leqslant cEf^* S^{(2)}(f)\\ &= cE(M^{(2)}(f)m^{(2)}(f))\\ &\leqslant c(EM^{(2)}(f))^{1/2}(Em^{(2)}(f))^{1/2},\end{aligned}$$

由此得到(5.9).

反之，(5.9)意味着

$$ES^{(2)}(f)^2 \leqslant EM^{(2)}(f)^2 \leqslant cEm^{(2)}(f)^2 \leqslant cE(f^*)^2,$$

$$E(f^*)^2 \leqslant EM^{(2)}(f)^2 \leqslant cEm^{(2)}(f)^2 \leqslant cES^{(2)}(f)^2.$$

两式分别蕴含着 X 同构于 2 一致凸和 2 一致光滑空间，从而 X 同构于 Hilbert 空间.

定理 3 设 X 同构于 Hilbert 空间，$f=(f_n)$ 是 X 值鞅，并且存在单调增加适应过程 (d_n) 使得 $\| df_n \| \leqslant d_{n-1}$，则存在 $C>0$

$$EM^{(2)}(f) \leqslant CE(m^{(2)}(f) + d^*). \tag{5.10}$$

证明 记 $\rho_n = m_n^{(2)}(f) + d_n$. 对于 $a>0$，定义

$$\tau_a = \inf\{n, \rho_n > a\}, \inf\varnothing = \infty,$$

则 τ_a 为停时，$f_{\tau_a} = (f_{\tau_a \wedge n})$ 是鞅. 注意对于 f_{τ_a} 与 f 有，$S^{(2)}(f_{\tau_a}) = S_{\tau_a}^{(2)}(f)$，$(f_{\tau_a})^* = \sup\limits_{n\leqslant\tau_a} \| f_n \| = f_{\tau_a}^*$，故

$$\begin{aligned}P(M^{(2)}(f) > a) &\leqslant P(\tau_a < \infty) + P(\tau_a = \infty, M^{(2)}(f) > a)\\ &\leqslant P(\tau_a < \infty) + P(M^{(2)}(f_{\tau_a}) > a)\\ &\leqslant P(\tau_a < \infty) + \frac{1}{a^2}EM^{(2)}(f_{\tau_a})^2\\ &\leqslant P(\tau_a < \infty) + \frac{C}{a^2}Em^{(2)}(f_{\tau_a})^2\end{aligned} \tag{5.11}$$

由于 ρ_n 的递增性质，当 $\tau_a<\infty$ 时，

$$m^{(2)}(f_{\tau_a}) = \min\{(f_{\tau_a})^*, S^{(2)}(f_{\tau_a})\}$$

$$\leqslant \min\{(f_{\tau_a}-1)^* + \|df_{\tau_a}\|, S^{(2)}(f_{\tau_a-1}) + \|df_{\tau_a}\|\}$$
$$\leqslant m^{(2)}_{\tau_a-1}(f) + d_{\tau_a-1} = \rho_{\tau_a-1} \leqslant a,$$

当 $\tau_a=\infty$时，$m^{(2)}(f_{\tau_a})=m^{(2)}(f)$，从而

$$Em^{(2)}(f_{\tau_a})^2 \leqslant E(m^{(2)}(f)\chi_{\{\tau_a=\infty\}} + a\chi_{\{\tau_a<\infty\}})^2$$

(5.11)变为

$$P(M^{(2)}(f) > a) \leqslant CP(\tau_a < \infty) + \frac{C}{a^2}Em^{(2)}(f)^2\chi_{\{\tau_a=\infty\}}. \tag{5.12}$$

注意 $\{\tau_a=\infty\}\subset\{\rho^*\leqslant a\}\subset\{m^{(2)}(f)\leqslant a\}$，所以

$$\begin{aligned} EM^{(2)}(f) &= \int_0^\infty P(M^{(2)}(f) > a)da \\ &\leqslant C\int_0^\infty P(\tau_a < \infty)da + C\int_0^\infty \frac{da}{a^2}\int_{\{m^{(2)}(f)<a\}} m^{(2)}(f)^2 dP \\ &\leqslant C\int_0^\infty P\left(m^{(2)}(f) > \frac{a}{2}\right)da + C\int_0^\infty P\left(d^* > \frac{a}{2}\right)da \\ &\quad + C\int_\Omega m^{(2)}(f)^2 dP\int_{m^{(2)}(f)}^\infty \frac{da}{a^2} \\ &\leqslant CE(m^{(2)}(f) + d^*). \end{aligned}$$

此即(5.10).

定理 4 设 X 是 Banach 空间，Φ 是限制增长的 Young 函数，则以下条件等价：

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) 存在 $C=C_\Phi>0$，使得任何 X 值鞅 $f=(f_n)$满足

$$E\Phi(M^{(2)}(f)) \leqslant CE\Phi(m^{(2)}(f)). \tag{5.13}$$

(iii) 存在 $C=C_\Phi>0$，使得任何 X 值鞅 $f=(f_n)$满足

$$\|M^{(2)}(f)\|_\Phi \leqslant C\|m^{(2)}(f)\|_\Phi. \tag{5.14}$$

证明 (i)⇒(ii) 先将(5.10)条件化，即在定理 3 条件下，

$$E(M^{(2)}(f)\,|\,\mathscr{B}_0) \leqslant CE(m^{(2)}(f) + d^*\,|\,\mathscr{B}_0). \tag{5.15}$$

实际上，代替 $f=(f_n)$考虑 $f_A=(f_n\chi_A)$和 $d_A=(d_n\chi_A)$，$A\in\mathscr{B}_0$，则

f_A, d_A 满足其中条件. 这样(5.10)变为(5.15).

其次,对于任何 $n\geqslant 1$,考虑鞅 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_i)=(f_i-f_{n-1}), i\geqslant n$,若 $\|df_n\|\leqslant d_{n-1}, n\geqslant 1$,则 $\|d\mathcal{F}_i\|\leqslant 2d_{i-1}$,于是

$$
\begin{aligned}
M^{(2)}(f)-M_{n-1}^{(2)}(f)&=\max\{f^*, S^{(2)}(f)\}-\max\{f_{n-1}^*, S_{n-1}^{(2)}(f)\}\\
&\leqslant\max\{f^*-f_{n-1}^*, S^{(2)}(f)-S_{n-1}^{(2)}(f)\}\\
&\leqslant\max\{\mathcal{F}^*, S^{(2)}(\mathcal{F})\}=M^{(2)}(\mathcal{F}),\\
m^{(2)}(\mathcal{F})&=\min\{\mathcal{F}^*, S^{(2)}(\mathcal{F})\}\\
&\leqslant\min\{2f^*, S^{(2)}(f)\}\leqslant 2\min m^{(2)}(f).
\end{aligned}
$$

应用(5.15)于 $\mathcal{F}$,则

$$
\begin{aligned}
E(M^{(2)}(f)-M_{n-1}^{(2)}(f)\,|\,\mathscr{B}_n)&\leqslant E(M^{(2)}(\mathcal{F})\,|\,\mathscr{B}_n)\\
&\leqslant cE(M^{(2)}(\mathcal{F})+2d^*\,|\,\mathscr{B}_n)\\
&\leqslant cE(m^{(2)}(f)+d^*\,|\,\mathscr{B}_n).
\end{aligned}
$$

由§1 推论 1 得出

$$
E\Phi(M^{(2)}(f))\leqslant cE\Phi(m^{(2)}(f)+d^*). \qquad (5.16)
$$

利用 f 的 Davis 分解最后可得出(5.13),其方法在§2 中已遇到过,这里不拟复述.

(ii)⇒(iii) 设 $\|m^{(2)}(f)\|_\Phi=a>0$,考虑鞅 $\mathcal{F}=a^{-1}f$,则 $\|m^{(2)}(\mathcal{F})\|_\Phi=1$,由(5.13)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a}\|M^{(2)}(f)\|_\Phi&=\|M^{(2)}(\mathcal{F})\|_\Phi\leqslant E\Phi(M^{(2)}(\mathcal{F}))+1\\
&\leqslant CE\Phi\left(\frac{m^{(2)}(f)}{a}\right)+1\leqslant c\|m^{(2)}(f)\|_\Phi
\end{aligned}
$$

总之得到(5.14).

(iii)⇒(i) 由(5.14)可分别得出

$$
\|S^{(2)}(f)\|_\Phi\leqslant C\|f^*\|_\Phi, \|f^*\|_\Phi\leqslant C\|S^{(2)}(f)\|_\Phi
$$

此时 X 必同构于 Hilbert 空间.

对于两个鞅 f, g,我们称 g 是 f 的微分从属,若 g 与 f 适应于同一非降子 σ 代数序列($\mathscr{B}_n, n\geqslant 1$)并且 $\|dg_n\|\leqslant\|df_n\|$ ($n\geqslant$

1)，这里 $df=(df_n)$，$dg=(dg_n)$ 分别是 f 与 g 的鞅差序列. 记 $\mathscr{X}$ 是 X 值鞅 f 及其微分从属 g 构成的序对 (f,g) 的全体（同样地，$(\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 甚至概率空间 (Ω,Σ,P) 可以变动）.

定理 5 (Burkholder)　若 X 同构于 Hilbert 空间，$(f,g)\in\mathscr{X}$ 并且 $\|f\|_1<\infty$，则

$$P(\sup_{n\geqslant 1}\{\|f_n\|+\|g_n\|\}>\lambda)\leqslant\frac{2}{\lambda}\|f\|_1 \tag{5.17}$$

证明　设 L 是 $X\times X\to R$ 的函数，

$$L(x,y)=\begin{cases}1+\|x\|^2-\|y\|^2, & \text{若 } \|x\|+\|y\|<1,\\ 2\|x\|, & \text{若 } \|x\|+\|y\|\geqslant 1.\end{cases}$$

我们先验证 L 具有以下性质：

1°　$L(x,y)\leqslant 2\|x\|+1$，

2°　$L(x,y)\geqslant 1$，若 $\|y\|\leqslant\|x\|$，

3°　$EL(f_n,g_n)\geqslant EL(f_{n-1},g_{n-1})\geqslant\cdots\geqslant EL(f_0,g_0)$.

再由 1°得出

$$\begin{aligned}P(\|f_n\|+\|g_n\|\geqslant 1)&\leqslant P(2\|f_n\|>L(f_n,g_n))\\&=P(2\|f_n\|-L(f_n,g_n)+1\geqslant 1)\\&\leqslant E(2\|f_n\|-L(f_n,g_n)+1)\end{aligned}$$

由 2°，3°，$EL(f_n,g_n)\geqslant EL(f_0,g_0)\geqslant 1$，于是

$$P(\|f_n\|+\|g_n\|\geqslant 1)\leqslant 2\|f\|_1. \tag{5.18}$$

以 $\frac{f}{\lambda}$，$\frac{g}{\lambda}$ 替换 f,g 则得到

$$P(\|f_n\|+\|g_n\|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{2}{\lambda}\|f\|_1. \tag{5.19}$$

然后，只需作一个停时的讨论即可得到(5.17).

现在验证 1°，2°，3°.

首先 1°，$\|x\|+\|y\|\geqslant 1$ 时由定义即知. 当 $\|x\|+\|y\|<1$ 时 $\|x\|^2\leqslant\|x\|\leqslant 2\|x\|$ 故 $L(x,y)=1+\|x\|^2-\|y\|^2\leqslant 1+2\|x\|$.

对于 2°，若 $\|y\|\leqslant\|x\|$，当 $\|x\|+\|y\|<1$ 时，$L(x,y)$

$=1+\|x\|^2-\|y\|^2\geqslant 1$；当 $\|x\|+\|y\|\geqslant 1$ 时，$\|x\|\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $L(x,y)=2\|x\|\geqslant 1$.

为验证 3°，考虑实函数 $G(t)=L(x+th,y+tk)$，这里 $x,y,h,k\in X$ 并且 $\|k\|\leqslant\|h\|$. 不妨就假定 X 是 Hilbert 空间，此时 G 是局部凸函数，因此在整个 R 上是凸函数(可直接验证). 我们证明 $G'(0)$是存在的，从而 $G'(1)\geqslant 0, G(1)\geqslant G(0)+G'(0)$. 于是 $L(x+H,y+k)\geqslant L(x,y)$，$L(f_n,g_n)\geqslant L(f_{n-1},g_{n-1})$，得到 3°.

为验证 $G'(0)$存在，考虑以下几种情况.

(i) $\|x\|+\|y\|<1$. 此时只要 t 充分小，$\|x+th\|+\|y+tk\|<1$. 于是

$$
\begin{aligned}
&L(x+th,y+tk)-L(x,y)\\
&=2t(Re(x,h)-Re(y,k))+t^2(\|h\|^2-\|k\|^2)
\end{aligned}
$$

容易知道 $G'(0)$ 存在.

(ii) $\|x\|+\|y\|>1$. 此时只要 t 充分小，$\|x+th\|+\|y+tk\|>1$. 于是当 $x\neq 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
&L(x+th,y+tk)-L(x,y)=2\|x+th\|-2\|x\|\\
&=\frac{2(\|x+th\|^2-\|x\|^2)}{\|x+th\|+\|x\|}=\frac{4Re(x,h)t+t^2\|h\|^2}{\|x+th\|+\|x\|};
\end{aligned}
$$

当 $x=0$ 时 $L(x+k,y+k)-L(x,y)=0$. 此时也有 $G'(0)$ 存在.

(iii) $\|x\|+\|y\|=1$. 注意此时 $L(x,y)=2\|x\|$. $L(x+th,y+tk)$ 有两种情况，要么等于 $\|x+th\|$，要么等于 $1+\|x+th\|^2-\|y+tk\|^2$. 对于前者如同 (ii). 对于后者，由于 $\|y\|=1-\|x\|$，故

$$
\begin{aligned}
&L(x+th,y+tk)-L(x,y)\\
&\quad=1+\|x+th\|^2-\|y+tk\|^2-2\|x\|\\
&\quad=2t(Re(x,h)-Re(y,k))+t^2(\|h\|^2-\|k\|^2)
\end{aligned}
$$

如同 (i) 故 $G'(0)$ 仍存在.

定理 6 (Burkholder) 设 X 是 Banach 空间，则以下等价：

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) 对于每个 $(f,g)\in\mathscr{Z}$，$\|f\|_1<\infty$，则 g_n $a.e.$ 收敛.

(iii) 存在 $c>0$ 使得每个 $(f,g)\in\mathscr{Z}$，只要 $g^*>1$ $a.e.$ 则 $\|f\|_1>c$.

(iv) 存在 $c>0$ 使得每个 $(f,g)\in\mathscr{Z}$，满足

$$\lambda P(g^*>\lambda)\leqslant c\|f\|_1 \tag{5.20}$$

(v) 对于每个(或某个) $1<p<\infty$，存在 $C_p>0$ 使得每个 $(f,g)\in\mathscr{Z}$ 满足

$$\|g\|_p\leqslant c_p\|f\|_p. \tag{5.21}$$

证明 (i)⇒(ii) 不妨设 X 是 Hilbert 空间. 令

$$A_\varepsilon=\{\omega\in\Omega,\inf_{k\geqslant 0}\sup_{m,n\geqslant k}|g_n(\omega)-g_m(\omega)|>2\varepsilon\},$$

这里 $\varepsilon>0$ 是任一正数，记

$$\tau_0(\omega)=\inf\{n\geqslant 0,|g_n(\omega)|>\varepsilon\},$$

若 $\tau_0(\omega)<\infty$，记

$$\tau_1(\omega)=\inf\{n>\tau_0(\omega),|g_n(\omega)-g_{\tau_0}(\omega)|>\varepsilon\},$$

....

我们设 $K=l_X^2$，这里 $l_X^2=\{x=(x_n),x_n\in X,\Sigma\|x_n\|^2<\infty\}$，$\|x\|=(\sum\|x_n\|^2)^{1/2}$. 容易知道 K 仍是 Hilbert 空间. 定义 K 值鞅 $F=(F_n),G=(G_n)$ 使得 其差序列

$$\begin{aligned}dF_k&=(df_k,0,0,\cdots),\\ dG_k&=(dg_k,0,0,\cdots),\qquad \text{若 } k<\tau_0(\omega)+1,\\ &=(\underbrace{0,\cdots,0,dg_k}_{j},0,\cdots)\ \text{若 } \tau_{j-1}(\omega)<k\leqslant\tau_j(\omega).\end{aligned}$$

注意由 K 中的范数

$$\|dG_k\|_K=\|dg_k\|\leqslant\|df_k\|\leqslant\|dF_k\|$$

并且 $\|F_k\|_K=\|f_n\|$. 若 $\tau_j\leqslant n$，则

$$\|G_n\|_K^2\geqslant\|g_{\tau_0}\|^2+\|g_{\tau_1}-g_{\tau_0}\|^2+\cdots+\|g_{\tau_j}-g_{\tau_{j-1}}\|^2$$

由定理 5，$j\geqslant 0$ 时

$$P(A_\varepsilon)\leqslant\lim_{n\to\infty}P(0\leqslant\tau_0<\cdots\cdots<\tau_j<n)$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} P(\|G_n\|_K \geqslant \varepsilon(j+1)^{1/2})$$

$$\leqslant 2\|F\|_1/\varepsilon(j+1)^{1/2} = 2\|f\|_1/\varepsilon(j+1)^{1/2}$$

于是对于 $\forall\ \varepsilon>0, P(A_\varepsilon)=0$. 即 g_n $a.e.$ 收敛.

(ii)⇒(iii) 若 c 不存在,则对于每个自然数 j,存在鞅 $f_j=(f_{j1},f_{j2},\cdots),g_j=(g_{j1},g_{j2},\cdots)$ 使得 $(f_j,g_j)\in\mathscr{X}$, $\|f_j\|_1\leqslant 2^{-j}$, $g_j^*>1$ $a.e.$ 不失一般性,假定基础概率空间是同一个并且 $\mathscr{B}_{j\infty}=\bigvee_{k=1}^{\infty}\mathscr{B}_{jk}(j\geqslant 1)$ 彼此相互独立. 此时存在正整数 n_j 使得

$$A_j = \{\|g_{jn}\| > 1, \text{对于某个 } n\leqslant n_j\} \tag{5.22}$$

并且 $P(A_j)>\frac{1}{2}$. 现在设

$$\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_{10},\cdots,\mathscr{B}_{n_1-1} = \mathscr{B}_{1n_1-1},$$

$$\mathscr{B}_{n_1} = \mathscr{B}_{1n_1}\vee\mathscr{B}_{20},\cdots,\mathscr{B}_{n_1+n_2-1} = \mathscr{B}_{1n_1}\vee\mathscr{B}_{2n_2-1},$$

$$\mathscr{B}_{n_1+n_2} = \mathscr{B}_{1n_1}\vee\mathscr{B}_{2n_1}\vee\mathscr{B}_{30},\cdots\cdots$$

考虑差序列

$$(df_{11},\cdots,df_{1n_1},df_{21},\cdots,df_{2n_2},df_{31},\cdots)$$

$$(dg_{11},\cdots,dg_{1n_1},dg_{21},\cdots,dg_{2n_2},dg_{31},\cdots)$$

以 F 记前一鞅,G 记后一鞅,则有

$$\|F\|_1\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\|f_j\|_1\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}=1,$$

但由于 $\sum_{j=1}^{\infty}P(A_j)=\infty$ 并且 A_j 相互独立,故

$$P(G^*=\infty)\geqslant P(\limsup_{m,n\to\infty}\|G_m-G_n\|>1)$$

$$\geqslant P(\limsup_{j\to\infty}A_j)=1,$$

与(ii)矛盾. 故(iii)成立.

(iii)⇒(iv). 我们将证明对于任何自然数 n,

$$cP(g_n^*>2)\leqslant\|f\|_1 \tag{5.23}$$

然后对$\forall\ \lambda>0$,令 $\tilde{f}=\frac{\lambda}{2}f,\tilde{g}=\frac{\lambda}{2}g$ 则得到 $cP(g_n^*>\lambda)\leqslant\frac{2}{\lambda}\|f\|_1$

从而得到(5.21). 取 $(f_j, g_j)\in \mathscr{Z}$ 并且 (f_j, g_j)是(f,g) 的独立 copy. 这是可以做到的,因为 f,g 适应于同一 σ 代数序列. 这时 $(\mathscr{B}_{j\infty}, j\geqslant 1)$ 相互独立. 设 $P(g_n^*>2)>0$, 令 $u_j=\chi_{\{g_{jn}^*\leqslant 2\}}$,考虑差序列

$$(df_{11},\cdots,df_{1n},u_1df_{21},\cdots,u_1df_{2n},u_1u_2df_{31},\cdots)$$

$$(dg_{11},\cdots,dg_{1n},u_1dg_{21},\cdots,u_1dg_{2n_2},u_1u_2dg_{31},\cdots)$$

注意 $(u_j, j\geqslant 1)$ 是独立 $R.V.$ 并且 第二个鞅 G 是第一个鞅 f 的微分从属. 此外

$$\|F\|_1\leqslant \|f\|_1 E(1+u_1+u_1u_2+\cdots)$$

$$=\|f\|_1\frac{1}{1-Eu_1}=\|f\|_1/P(g_n^*>2).$$

由于 $G^*>1$ $a.e.$ 所以由 (iii), $\|F\|_1\geqslant c$. 从而得出 (5.23).

(iv)⇒(v). 假设 $W=(W_n)$ 是 $(\|df_n\|)$ 的可料强函数. 定义

$$\mu=\inf\{n, \|g_n\|>\lambda\}$$

$$\nu=\inf\{n, \|g_n\|>\beta\lambda\}$$

$$\sigma=\inf\{n, \|f_n\|\vee W_{n+1}>\delta\lambda\}$$

这里 $\delta>0, \beta>\delta+1, \lambda>0$, 记 $A_k=\{\mu<k\leqslant\nu\wedge\sigma\}$, $u_k=\chi_{A_k}$, 则 $(u_k, k\geqslant 1)$ 是可料序列, 若 $F_n=\sum_{k=1}^n u_k df_k, G_n=\sum_{k=1}^n u_k dg_k$,则 $G=(G_n)$ 是 $F=(F_n)$ 的微分从属,类似于Ⅶ. §3 定理 2 中的证明可以得到

$$P(g^*>\beta\lambda, f^*\vee W^*\leqslant\delta\lambda)\leqslant 3\delta c(\beta-\delta-1)^{-1}P(g^*>\lambda) \tag{5.24}$$

此即关于 $(g^*, f^*\vee W^*)$ 的好 λ 不等式,由 §1 引理 4 不难知道 (5.22) 成立.

(v)⇒(i) 我们只取 $p=2$ 来证明(i). 设 $x_n, z\in X, \|z\|=1$, $\{r_n\}$是 Rademacher 函数序列,令

$$f_n=\sum_{i=1}^n r_i x_i,\quad g_n=\sum_{i=1}^n r_i|x_i|z,\quad n\geqslant 1.$$

则 $g=(g_n)$ 是 $f=(f_n)$ 的微分从属，反过来也一样，于是由(v)，

$$\| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \|_2 \sim \| \sum_{i=1}^{n} r_i \| x_i \|_Z \|$$

$$= \| \sum_{i=1}^{n} r_i \| x_i \| \|_2 \sim \Big(\sum_{i=1}^{n} r_i \| x_i \|^2 \Big)^{1/2}.$$

由 Kwapien 定理知道，X 同构于 Hilbert 空间.

下面引理可仿照 §1 引理 1 去证明.

引理 3 对于每个 WP 鞅的配对 $(f,g)\in\mathscr{Z}$，若 $\|f\|_1<\infty$ 并且 $g^*>1$ $a.e.$，则存在 $(F,G)\in\mathscr{Z}$ 使得

$$\|F\|_\infty \leqslant 6\|f\|_1, P(G^*>1)\geqslant \frac{1}{2}. \tag{5.25}$$

定理 7 设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) 对于每个 $(f,g)\in\mathscr{Z}$，$\|f\|_1<\infty$，则 $g^*<\infty$ $a.e.$

(iii) 对于每个 $(f,g)\in\mathscr{Z}$，$\|f\|_1<\infty$，则 g_n依概率收敛.

(iv) 对于每个限制增长的 Young 函数 Φ，存在 $c_\Phi>0$ 使得每个 $(f,g)\in\mathscr{Z}$ 满足

$$\|g^*\|_\Phi \leqslant c_\Phi \|f^*\|_\Phi \tag{5.26}$$

若 Φ 还是严格凸的，则有

$$\|g\|_\Phi \leqslant c_\Phi \|f\|_\Phi \tag{5.27}$$

(v) 对于每个限制增长的 Young 函数 Φ，存在 $c_\Phi>0$ 使得每个 $(f,g)\in\mathscr{Z}$ 满足

$$\|M(g)\|_\Phi \leqslant c_\Phi \|m(f)\|_\Phi \tag{5.28}$$

其中 $M(g)=g^*\vee S^{(2)}(g)$，$m(f)=f^*\wedge S^{(2)}(f)$.

证 (i)⇒(ii)与(i)⇒(iii)容易从定理 6(ii)得出. 为证 (ii)⇒(i)，注意在定理 6(ii)⇒(iii)的证明中已经知道，若 X 不同构于 Hilbert 空间，则存在$(F,G)\in\mathscr{Z}$，$\|F\|_1<\infty$ 但 $G^*=\infty$ $a.e.$，这与(ii)矛盾.

为证 (iii)⇒(i). 仍考虑上面例子(F,G)，由于

$$P(G_n \text{不依概率收敛}) \geqslant P(\limsup_{m,n\to\infty} \| G_m - G_n \|)$$
$$\geqslant P(\lim_{j\to\infty} A_j) = 1$$

与(iii)矛盾.

(i)⇒(iv) 事实上定理 6 的证明中我们已得到关于$(g^*, f^* \vee W^*)$的好 λ 不等式,故通过 Davis 分解便可得到(5.26),再由§1 推论 4 得出(5.27).

(iv)⇒(i) 根据引理 3,若 X 不同构于 Hilbert 空间,则存在 WP 鞅使得 $f^* \leqslant M < \infty, g^* = \infty$ $a.e.$, 自然与(iv) 矛盾.

剩下只须证明(i)⇒(v).注意用"条件化"方法可将(5.9)写成

$$E(M(f)^2 | \mathscr{B}_0) \leqslant cE(m(f)^2 | \mathscr{B}_0) \qquad (5.29)$$

当然此不等式对于 $g = (g_n)$ 也成立.于是

$$E(M(g)^2 | \mathscr{B}_0) \leqslant cE(m(g)^2 | \mathscr{B}_0) \leqslant cE(S^{(2)}(g)^2 | \mathscr{B}_0)$$
$$\leqslant cE(S^{(2)}(f)^2 | \mathscr{B}_0)$$
$$\leqslant cE(M(f)^2 | \mathscr{B}_0) \leqslant c^2 E(m(f)^2 | \mathscr{B}_0) \quad (5.30)$$

事实上,由标准的停时方法的论证,(5.30)对于每个满足 $Em(f)^2 < \infty$ 的$(f,g) \in \mathscr{Z}$ 成立.

现在设

$$M_n = M_n(g), A = (M_n),$$
$$q_n = q_n(f) = m_{n-1}(f) + W_n, Q = (q_n);$$

注意到

$$m_n(f) \leqslant (f_{n-1}^* + W_n) \wedge (S_{n-1}(f) + W_n)$$
$$\leqslant m_{n-1}(f) + W_n = q_n,$$

对于 $\alpha > 0, \beta > 1$ 和 $\lambda > 0$ 定义

$$\tau = \inf\{n, q_{n+1} > \alpha\lambda\},$$
$$\sigma = \inf\{n, M_n > \lambda\},$$

并且令 $\tilde{f}_m = f_{m+\sigma}^{(\tau)} - f_{\sigma-1}^{(\tau)}, \tilde{f} = (\tilde{f}_m)$; $\tilde{g}_m = g_{m+\sigma}^{(\tau)} - g_{\sigma-1}^{(\tau)}, \tilde{g} = (\tilde{g}_m)$; $\widetilde{\mathscr{B}}_m = \mathscr{B}_{m+\sigma}, m \geqslant 0)$,实际计算知道

$$M_\tau - M_{\tau\wedge(\sigma-1)} \leqslant (g_\tau^* - g_{\tau\wedge(\sigma-1)}^*) \vee (S_\tau(g)$$

$$-S_{\tau\wedge(\sigma-1)}(g))\leqslant M(\widetilde{g}),$$

$$m(\mathcal{F})=\mathcal{F}^*\wedge S(\mathcal{F})\leqslant(2f_\tau^*\wedge S_\tau(f))\chi_{\{\sigma<\infty\}}$$

$$\leqslant cm_\tau(f)\chi_{\{\sigma<\infty\}}\leqslant cq_\tau\chi_{\{\sigma<\infty\}}\leqslant c\alpha\lambda\chi_{\{\sigma<\infty\}},\tag{5.31}$$

由(5.30)可推出

$$E(M_\tau-M_{\tau\wedge(\sigma-1)})^2\leqslant EM(\widetilde{g})^2\leqslant cEm(\mathcal{F})^2$$

$$\leqslant c\alpha^2\lambda^2P(\sigma<\infty),\tag{5.32}$$

从而(5.31)(5.32)给出

$$P(M(g)>\beta\lambda,\tau=\infty)=P(M_\tau(g)>\beta\lambda)$$

$$\leqslant P(M_\tau-M_{\tau\wedge(\sigma-1)}>(\beta-1)\lambda)$$

$$\leqslant(\beta-1)^{-2}\lambda^{-2}E(M_\tau-M_{\tau\wedge(\sigma-1)})^2$$

$$\leqslant c\alpha^2(\beta-1)^{-2}P(\sigma<\infty),$$

于是

$$P(M(g)>\beta\lambda)\leqslant P(\tau=\infty,M(g)>\beta\lambda)+P(\tau<\infty)$$

$$\leqslant c\alpha^2(\beta-1)^{-2}P(\sigma<\infty)+P(\tau<\infty)$$

$$\leqslant c\alpha^2(\beta-1)^{-2}P(M(g)>\lambda)$$

$$+P(m(f)+W^*>\alpha\lambda)\tag{5.33}$$

应用§1 引理 4 和 Davis 分解即得到(5.28).

§6 Fefferman 不等式与${}_a\widetilde{H}_p$的共轭

B 值鞅的 Fefferman 不等式在鞅空间理论中的地位远不及实值鞅情况,但它对于建立${}_a\widetilde{H}_p$的共轭空间仍是重要的.我们知道实值 H_1 鞅空间的共轭是 BMO 鞅空间,我们将对 B 值情况作相应的考察.此外,本节还将对 B 值 BMO 鞅给出等价刻划.

记 X*是 Banach 空间 X 的共轭空间,为了明确起见,以${}_p\widetilde{H}_a(X)$记取值于 X 的${}_p\widetilde{H}_a$空间.类似的,${}_p\widetilde{H}_a(X^*)$是取值于 X^* 的${}_p\widetilde{H}_a$空间等等.另外,本节总是以 p',a'记 p,a 的共轭数.

定理 1 设X是Banach空间,$1<p\leqslant 2$,$1\leqslant a\leqslant p$,则以下条

件等价：

(i) X 同构于 p 光滑空间.

(ii) 存在 $c=c_{ap}>0$ 使得对于任何 $f\in {}_pH_a(X)$，$\varphi= {}_{p'}K_{a'}(X^*)$ $(f_0=\varphi_0=0)$，

$$|Ef_n\varphi_n|\leqslant c\,\|f\|_{{}_p\tilde{H}_a(X)}\|\varphi\|_{{}_{p'}K_{a'}(X^*)}\qquad(n\geqslant 1).\quad(6.1)$$

证明 (i)⇒(ii). 当 $f\in {}_p\tilde{H}_a(X)$ 时，$df_i\in L_a(X)$，从而 $f_n\in L_a(X)$. 当 $\varphi\in {}_{p'}K_{a'}(X^*)$时，由 ${}_{p'}K_{a'}(X^*)$的定义，取 $m=n$，注意到 $p'\leqslant a'$ 则

$$\|d\varphi_n\| = (E(\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\|^{p'}|\mathscr{B}_n))^{1/p'}\leqslant E(\gamma^{p'}|\mathscr{B}_n))^{1/p'},$$

$$\|d\varphi_n\|_{a'}\leqslant\|(E(\gamma^{p'}|\mathscr{B}_n))^{1/p'}\|_{a'}\leqslant\|\gamma\|_{a'}<\infty,$$

从而 $\varphi_n\in L_{a'}(X^*)$. 这说明积分 $Ef_n\varphi_n$是有意义的.

对于任何 $n\geqslant 1$，有

$$Ef_n\varphi_n=\sum_{i=1}^n Edf_id\varphi_i.\qquad(6.2)$$

现在

$$|Ef_n\varphi_n|\leqslant\sum_{i=1}^n|Edf_iS_i^{(p)}(f)^{a/p-1}d\varphi_iS_i^{(p)}(f)^{1-a/p}|$$

$$\leqslant\Big(\sum_{i=1}^n E\|df_i\|^pS_i^{(p)}(f)^{a-p}\Big)^{1/p}.$$

$$\Big(\sum_{i=1}^n E\|d\varphi_i\|^{p'}S_i^{(p)}(f)^{p'(a/p-1)}\Big)^{1/p'}\triangleq AB.\qquad(6.3)$$

对于 A，利用不等式 $\rho^\alpha-1\geqslant\alpha(\rho-1)\rho^{\alpha-1}$，$(\alpha\leqslant 1\leqslant\rho)$，$\alpha=a/p$，$\rho=S_i^{(p)}(f)^pS_{i-1}^{(p)}(f)^{-p}$则得到

$$S_i^{(p)}(f)^a-S_{i-1}^{(p)}(f)^a\geqslant\frac{a}{p}(S_i^{(p)}(f)^p-S_{i-1}^{(p)}(f)^p)S_{i-1}^{(p)}(f)^{a-p},$$

由此得出

$$A^p=\sum_{i=1}^n E\|df_i\|^pS_i^{(p)}(f)^{a-p}$$

$$=E\sum_{i=1}^n(S_i^{(p)}(f)^p-S_{i-1}^{(p)}(f)^p)S_i^{(p)}(f)^{a-p}$$

$$\leqslant \frac{p}{a} ES_n^{(p)}(f)^a. \tag{6.4}$$

为了估计 B，注意 Banach 空间 X 是 p 光滑的，则 X^* 是 p' 凸的. 于是对于 φ 和 $m\geqslant n\geqslant 0$，

$$E\Big(\sum_{i=n}^{m} \| df_i \|^{p'} | \mathscr{B}_n\Big) \leqslant cE(\| f_m - f_{n-1} \|^{p'} | \mathscr{B}_n) \tag{6.5}$$

由于 $\varphi\in {}_{p'}K_{a'}(X^*)$，故有 $\gamma\geqslant 0,\gamma\in L_{a'}$ 使得

$$E(\| \varphi_m - \varphi_{j-1} \|^{p'} | \mathscr{B}_j) \leqslant E(\gamma^{p'} | \mathscr{B}_j) \quad (m \geqslant j \geqslant 0) \tag{6.6}$$

若归纳地定义

$$S_i^{(p)}(f)^{p'(1-a/p)} = \sum_{j=1}^{i} Q_j \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

则 Q_j 关于 $\mathscr{B}_j$ 可测，由(6.5)，(6.6)可得

$$\begin{aligned} B^{p'} &= \sum_{i=1}^{n} E \| d\varphi_i \|^{p'} S_i^{(p)}(f)^{p'(1-a/p)} = \sum_{i=1}^{n} E \| d\varphi_i \|^{p'} \sum_{j=1}^{i} Q_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} EQ_j \sum_{i=j}^{n} E(\| d\varphi_i \|^{p'} | \mathscr{B}_j) \\ &\leqslant c \sum_{j=1}^{n} EQ_j E(\| \varphi_i - \varphi_{j-1} \|^{p'} | \mathscr{B}_j) \\ &\leqslant c \sum_{j=1}^{n} EQ_j \gamma^{p'} = CES_n^{(p)}(f)^{p'(1-a/p)} \gamma^{p'} \end{aligned} \tag{6.7}$$

注意 $p'\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{p}\right)+\frac{p'}{a'}=1$，应用 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned} B &\leqslant c^{1/p'} [E(S_n^{(p)}(f)^a)^{p'(1/a-1/p)} (\gamma^{a'})^{p'/a'}]^{1/p'} \\ &\leqslant c^{1/p'} (ES_n^{(p)}(f)^a)^{(1/a-1/p)} (E\gamma^{a'})^{1/a'}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

(6.3)，(6.4)，(6.8)给出

$$\begin{aligned} |Ef_n\varphi_n| &\leqslant \left(\frac{p}{a}\right)^{1/p} c^{1/p'} (ES_n^{(p)}(f)^a)^{1/a} (E\gamma^{a'})^{1/a'} \\ &= c' \| S_n^{(p)}(f) \|_a \| \gamma \|_{a'}. \end{aligned}$$

γ 是使(6.6)成立的任一函数，由此得到(6.1)式.

(ii)⇒(i). 若(6.1)对于任何 ${}_p\widetilde{H}_a'(X)$ 与 ${}_{p'}K_{a'}(X^*)$ 中的元素成

立. 则对于 $\varphi\in L_{a'}(X^*)$，令 $\varphi_n=E(\varphi|\mathscr{B}_n)$，$(\varphi_n)$是鞅并且由 Doob 不等式(以 φ^* 记(φ_n)的极大函数)有

$$\|\varphi^*\|_{a'}\leqslant a\|\varphi\|_{a'}. \tag{6.9}$$

由 $E(\|\varphi_m-\varphi_{n-1}\|^{p'}|\mathscr{B}_n)\leqslant E(2\varphi^*)^{p'}|\mathscr{B}_n)\quad(m\geqslant n\geqslant 0)$知道，$(\varphi_n)\in {}_{p'}K_{a'}(X^*)$并且

$$\|(\varphi_n)\|_{{}_{p'}K_{a'}(X^*)}\leqslant\|2\varphi^*\|_{a'}\leqslant 2p\|\varphi\|_{a'}. \tag{6.10}$$

(6.1)，(6.10)给出

$$\|f_n\|_a=\sup_{\|\varphi\|_{a'}=1}|Ef_n\varphi|=\sup_{\|\varphi\|_{a'}=1}|Ef_nE(\varphi|\mathscr{B}_n)|$$

$$\leqslant c\|f\|_{{}_pH_a(X)}\sup_{\|\varphi\|_{a'}=1}\|(\varphi_n)\|_{p'}K_{a'}(X^*)\leqslant 2ca\|f\|_{{}_aH_p(X)}.$$

换句话说

$$\|f\|_a\leqslant c'\|S^{(p)}(f)\|_a. \tag{6.11}$$

在 $p=a$ 的情况直接得出 X 同构于 p 一致光滑空间. 现在对于任何 $1\leqslant a\leqslant p$，将鞅 f 换为 $\mathcal{F}^{(n)}=(\mathcal{F}_{ni})$，其中 $\mathcal{F}_{ni}=f_{i+n}-f_n(i\geqslant 0)$，(6.11)变为

$$\begin{aligned}\|f_{i+n}-f_n\|_a&\leqslant c'\|S^{(p)}(\mathcal{F}^{(n)}\|_a\\&=c'\|S^{(p)}(f)-S^{(p)}_{n-1}(f)\|_a.\end{aligned} \tag{6.12}$$

由 Fatou 引理知道

$$\|S^{(p)}(f)-S^{(p)}_{n-1}(f)\|_a\to 0\quad(n\to\infty),$$

从而 f_n 是 L_a 中的Cauchy 序列，并且 f_n 在 L_a 中收敛和 $a.e.$ 收敛.

另一方面，若 $f=(f_n)$ 满足 $\quad\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}E\|df_n\|^p\in L_\infty$，

令 $\quad F_n=\sum_{i=1}^{n}i^{-1}df_i,\ F=(F_n)$，则 $\|S^{(p)}(F)\|_\infty<\infty$.

由以上讨论知道 $F_n\ a.e.$ 收敛. 由 Kronecher 引理，$n^{-1}f_n\to 0$，$a.e.$ 最后，Hoffmann-Jφrgensen 与 Pisier 的定理保证了 X 同构于 p 光滑空间.

当 $a=1$ 时，特别地得到向量值形式的 Fefferman 定理.

推论 1 设 X 是 p 一致光滑空间，$1<p\leqslant 2$，则存在 $c>0$ 使

得对于任何 $f\in {}_p\widetilde{H}_1(X)$，$\varphi\in \mathrm{BMO}_{p'}(X^*)$，$(f_0=\varphi_0=0)$ 有

$$|Ef_n\varphi_n| \leqslant c \| f \|_{{}_p\widetilde{H}_1(X)} \| \varphi \|_{\mathrm{BMO}(X^*)} \quad (n \geqslant 1) \tag{6.13}$$

推论 2 设 X 同构于 q 一致凸空间，$2\leqslant q\leqslant a\leqslant\infty$，$q\neq\infty$，则存在 $c=c_{a,p}>0$ 使得对于任何 $f\in {}_qK_a(X)$，$\varphi\in {}_{q'}H_{a'}(X^*)$ $(f_0=\varphi_0=0)$有

$$|Ef_n\varphi_n| \leqslant c \| f \|_{{}_qK_a(X)} \| \varphi \|_{{}_{q'}H'_{a'}(X^*)} \quad (n \geqslant 1) \tag{6.14}$$

证明 q 凸空间是自反空间，不妨将 X 视为 X^{**}，换句话说 $f\in {}_qK_a(X^{**})$，利用(6.1)即得到(6.14).

我们现在转到${}_p\widetilde{H}_a(X)$的共轭空间. 为此，考虑更大的空间 ${}_p\widetilde{\mathscr{H}}_a(X)\triangleq\widetilde{\mathscr{H}}(X)$，其中每个 $\theta\in {}_p\widetilde{\mathscr{H}}_a(X)$ 形如 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots)$，$\theta_i$ 是取值于 Banach 空间 X 的随机变量，满足

$$\| \theta \|_{\widetilde{\mathscr{H}}(X)} = \left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \| \theta_i \|^p \right)^{1/p} \right\|_a < \infty. \tag{6.15}$$

容易验证 $\widetilde{\mathscr{H}}(X)$ 是 Banach 空间.

引理 1 设 X 是自反空间，$1\leqslant a\leqslant p$，$l(\theta)$是 $\widetilde{\mathscr{H}}(X)$上的有界线性泛函，则存在 $\sigma\in {}_{p'}\widetilde{\mathscr{H}}_{a'}(X^*)\triangleq\widetilde{\mathscr{H}}'(X^*)$，使得

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} E\sigma_i\theta_i,\ \forall\ \theta \in \widetilde{\mathscr{H}}(X). \tag{6.16}$$

$$\| \sigma \|_{\widetilde{\mathscr{H}}'(X^*)} \leqslant \| l \|.$$

证明 先考虑 $a>1$ 的情况，对于任意的 $\theta_i\in L_a(X)$，若

$$\theta = (0,\cdots,0,\theta_i,0,\cdots),$$

令 $l_i(\theta_i)=l(\theta)$，则

$$|l_i(\theta_i)| \leqslant \| l \| \ \| \theta \|_{\widetilde{\mathscr{H}}(X)} = \| l \| \ \| \theta_i \|_a.$$

注意 X^* 具有 RN 性质，从而存在 $\sigma_i\in L_{a'}(X^*)$，

$$l_i(\theta_i) = E\sigma_i\theta_i,\ \forall\ \theta_i \in L_a(X).$$

由于 l 是线性的，当 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n,0,\cdots)$时，

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{n} E\sigma_i\theta_i. \tag{6.17}$$

记 $\sigma^{(n)}=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n,0,\cdots)$，为了估计 $\|\sigma^{(n)}\|_{\widetilde{\mathscr{F}}(X^*)}$，注意

$$\xi_i=\sigma_i\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\Big)^{1/p'(a'/p'-1)}\in L_{p'}(X^*)$$

且 $L_p(X)$ 是自反空间(Diestel，Uhl[1]，Ⅶ.1.2)，故有 $\bar{\theta}_i\in L_p(X)$，$\|\bar{\theta}_i\|_p=1$ 使得 $E\xi_i\bar{\theta}_i=\|\xi_i\|_{p'}$. 令 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n,0,\cdots)$，其中

$$\theta_i=\bar{\theta}_i\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\Big)^{1/p'(a'/p'-1)}\|\xi_i\|_{p'}^{p'-1},\tag{6.18}$$

则

$$\begin{aligned}l(\theta)&=\sum_{i=1}^{n}E\sigma_i\theta_i=\sum_{i=1}^{n}E\sigma_i\bar{\theta}\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\Big)^{1/p'(a'/p'-1)}\|\xi_i\|_{p'}^{p'-1}\\&=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i\bar{\theta}\|\xi_i\|_{p'}^{p'-1}=\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_{p'}^{p'}\\&=\sum_{i=1}^{n}E\|\sigma_i\|^{p'}\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\Big)^{a'/p'-1}=E\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\Big)^{a'/p'}.\end{aligned}\tag{6.19}$$

应用 Hölder 不等式以及 $E\|\bar{\theta}_i\|^p=1,1\leqslant a\leqslant p$ 可以得出

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{\mathscr{F}(X)}^{a}&=E\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\bar{\theta}_i\|^p\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\Big)^{p/p'(a'/p'-1)}\|\xi_i\|_{p'}^{p(p'-1)}\Big)^{a/p}\\&=E\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\bar{\theta}_i\|^p\|\xi_i\|_{p'}^{p'}\Big)^{a/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\Big)^{a'/p'(1-a/p)}\\&\leqslant\Big[E\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\bar{\theta}_i\|^p\|\xi_i\|_{p'}^{p'}\Big)\Big]^{a/p}\Big[E\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\Big)^{a'/p'}\Big]^{1-a/p}\\&\leqslant\Big[\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_{p'}^{p'}\Big]^{a/p}\Big[E\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\Big)^{a'/p'}\Big]^{1-a/p}\\&=E\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\Big)^{a'/p'}\end{aligned}\tag{6.20}$$

从而

$$\|\theta\|_{\widetilde{\mathscr{F}}(X)}\leqslant\Big[E\Big(\sum_{i=1}^{n}\|\sigma_i\|^{p'}\Big)^{a'/p'}\Big]^{1/a}$$

根据不等式 $|l(\theta)|\leqslant\|l\|\ \|\theta\|_{\widetilde{\mathscr{F}}(X)}$ 容易得到

$$\| \sigma^{(n)} \|_{\widetilde{\mathscr{H}}'(X^*)} = \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} \| \sigma_i \|^{p'} \right)^{a'/p'} \right]^{1/a'} \leqslant \| l \|. \quad (6.21)$$

n 是任意的，由此知道 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots)\in\widetilde{\mathscr{H}}'(X^*)$ 并且

$$l(\theta) = \lim_{n\to\infty} E \sum_{i=1}^{n} \sigma_i\theta_i = \sum_{i=1}^{\infty} E\sigma_i\theta_i.$$

于是(6.16)成立.

若 $a=1$，这时 ${}_p\widetilde{\mathscr{H}}_b(X)\subset{}_p\widetilde{\mathscr{H}}_1(X)$ $(\forall\ b>1)$ 并且此嵌入是连续的，从而${}_p\widetilde{\mathscr{H}}_1(X)$ 上每个有界线性泛函也是${}_p\widetilde{\mathscr{H}}_b(X)$上的有界线性泛函，故存在 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots)$满足

$$\| \sigma \|_{{}_{p'}\widetilde{\mathscr{H}}_{b'}(X^*)} \leqslant \| l \|, \ \forall\ 1 < a' < \infty$$

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} E\sigma_i\theta_i, \ \forall\ \theta \in {}_p\widetilde{\mathscr{H}}_b(X).$$

从其中的第一式得到

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \| \sigma_i \|^{p'} \right)^{1/p'}_{\infty} \right\| = \lim_{a'\to+\infty} \| \sigma \|_{{}_{p'}\widetilde{\mathscr{H}}_{b'}(X^*)} \leqslant \| l \|. \quad (6.22)$$

引理 2 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant2$，$p\leqslant a<\infty$，则以下条件等价：

(i) X 同构于 p 光滑空间，

(ii) 存在 $c=c_{ap}>0$，对于每个 $\sigma\in\widetilde{\mathscr{H}}(X)$，若以

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} [E(\sigma_i | \mathscr{B}_i) - E(\sigma_i | \mathscr{B}_{i-1})], \varphi_0 = 0$$

为鞅，则

$$\| \varphi \|_{{}_pK_a(X)} \leqslant c \| \sigma \|_{\widetilde{\mathscr{H}}(X)}. \quad (6.23)$$

证明 (i)⇒(ii). 容易验证 $\varphi=(\varphi_n)$确实为 X 值鞅. 记

$$g = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \| \sigma_i \|^p \right)^{1/p}, \ g^* = \sup_n E(g | \mathscr{B}_n),$$

则 $\sigma\in\mathscr{H}(X)$ 表明 $g\in L_a$. 根据 Doob 不等式

$$\| g^* \|_a \leqslant a' \| g \|_a$$

则 $g^*\in L_a$. 当 $i\geqslant n+1$ 时，

$$E(\| d\varphi_i \|^p | \mathscr{B}_n) = E(E(\| d\varphi_i \|^p | \mathscr{B}_{i-1}) | \mathscr{B}_n)$$

$$\leqslant 2^{p-1}E((\| E(\sigma_i|\mathscr{B}_i)\|^p + \| E(\sigma_i|\mathscr{B}_{i-1})\|^p)|\mathscr{B}_n)$$
$$\leqslant 2^pE(\|\sigma_i\|^p|\mathscr{B}_n). \tag{6.24}$$
又当 $i=n$ 时，
$$\| d\varphi_i\|^p \leqslant 2^{p-1}(\| E(\sigma_n|\mathscr{B}_n)\|^p + \| E(\sigma_n|\mathscr{B}_{n-1})\|^p)$$
$$\leqslant 2^{p-1}(E(\|\sigma_n\|^p|\mathscr{B}_n) + (g^*)^p), \tag{6.25}$$
从而
$$\sum_{i=n}^{\infty} E(\| d\varphi_i\|^p|\mathscr{B}_n)$$
$$\leqslant 2^p\sum_{i=n}^{\infty} E(\|\sigma_i\|^p|\mathscr{B}_n) + 2^{p-1}E((g^*)^p|\mathscr{B}_n)$$
$$\leqslant 2^pE(g^*|\mathscr{B}_n) + 2^{p-1}E((g^*)^p|\mathscr{B}_n)$$
$$\leqslant 2^pE(g^p + (g^*)^p|\mathscr{B}_n). \tag{6.26}$$
X 同构于 p 光滑空间，故
$$E(\|\varphi_m - \varphi_{n-1}\|^p|\mathscr{B}_n)$$
$$\leqslant cE\left(\sum_{i=n}^{m}\| d\varphi_i\|^p|\mathscr{B}_n\right) \leqslant c2^pE(g^p + (g^*)^p|\mathscr{B}_n). \tag{6.27}$$
从而
$$\|\varphi\|_{{}_pK_a(X)} \leqslant \| 2c^{1/p}(g^p + (g^*)^p)^{1/p}\|_a$$
$$\leqslant 2c^{1/p}\| g^p + g^*\|_a$$
$$\leqslant 2c^{1/p}(1 + a')\| g\|_a = c'\| g\|_a. \tag{6.28}$$
于是
$$\|\varphi\|_{{}_pK_a(X)} \leqslant c'\|\sigma\|_{\widetilde{\mathscr{H}}(X)}, \qquad \varphi\in {}_pK_a(X).$$
(ii)⇒(i) 注意 ${}_p\widetilde{H}_i(X)\subset\widetilde{\mathscr{H}}(X)$，其中当 $f\in {}_p\widetilde{H}_a(X)$ 时，
$$\sigma = df = (df_1, df_2, \cdots) \in \mathscr{H}(X),$$
特别地
$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n}[E(df_i|\mathscr{B}_i) - E(df_i|\mathscr{B}_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} df_i = f_n.$$
由(6.23)可知，对于 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\gamma\geqslant 0$，$\gamma\in L_a$ 使得
$$E(\| f_m - f_{n-1}\|^p|\mathscr{B}_n) \leqslant E(\gamma^p|\mathscr{B}_n) \qquad (m\geqslant n\geqslant 0),$$

并且

$$\|\gamma\|_a \leqslant \|\varphi\|_{{}_pK_a(X)} + \varepsilon \leqslant c \left\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|df_i\|^p \right)^{1/p} \right\|_a + \varepsilon \tag{6.29}$$

以 $\tilde{f}=(\tilde{f}_i)$ 代替 $f=(f_n)$，其中 $\tilde{f}_i=f_{i+n-1}-f_{n-1}(i\geqslant 0)$，则有

$$\begin{aligned} E\|f_m - f_{n-1}\|^p &\leqslant E\gamma^p \leqslant \|\gamma\|_a^p \\ &\leqslant \left(c \left\| \left(\sum_{i=n}^{\infty} \|df_i\|^p \right)^{1/p} \right\|_a + \varepsilon \right)^p. \end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{i=n}^{\infty} \|df_i\|^p \downarrow 0 \ (n \to \infty),$$

根据 Fatou 引理，存在 $n_0\in N$，当 $m\geqslant n\geqslant n_0$时，

$$E\|f_m - f_{n-1}\|^p \leqslant (c+1)^p\varepsilon^p.$$

从而 f_n 在 L_p 中收敛并且 $a.e.$ 收敛. 重复定理 1 中使用过的证明并且应用 Hoffmann-Jφrgensen，Pisier 定理可得出 X 同构于 p 光滑空间.

定理 2 设 X 是 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty$，$1\leqslant a\leqslant q$ 则以下条件等价：

(i) X 同构于 q 一致凸空间.

(ii) 存在 $c=c_{qa}>0$，使得对于每个 $l\in {}_q\tilde{H}_a(X)^*$ 相应地有 $\varphi\in {}_{q'}K_{a'}(X^*)$使得

$$\|\varphi\|_{{}_{q'}K_{a'}(X^*)} \leqslant c\|l\|,$$

$$l(f) = \lim_{n\to\infty} Ef_n\varphi_n,\ \forall\, f\in {}_q\tilde{H}_a(X). \tag{6.30}$$

证明 (i)⇒(ii)把${}_q\tilde{H}_a(X)$当作 $\tilde{\mathscr{H}}(X)$的子空间，其中每个 $\theta=df=(df_1,df_2,\cdots)$. 根据 Hahn-Banach 延拓定理，当 $l\in {}_q\tilde{H}_a(X)^*$ 时，将 l 延拓为 $\tilde{\mathscr{H}}(X)$上的有界线性泛函并且保持原范数不变. 由引理 1，存在 $\sigma\in {}_{q'}\tilde{\mathscr{H}}_{a'}(X^*)$使得(6.16)成立. 注意当 X 是 q 凸空间时，X^* 是 q' 光滑的. 引理 2 保证了存在鞅 $\varphi=(\varphi_n)\in {}_qK_a$

(X^*)使得

$$\|\varphi\|_{{}_{q'}K_{a'}(X^*)} \leqslant c\|\sigma\|_{{}_{q'}\widetilde{\mathscr{F}}_{a'}(X^*)} \leqslant c\|l\|,$$

$$l(f) = \lim_{n\to\infty} lf_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} E\sigma_i f_n = \lim_{n\to\infty} Ef_n\varphi_n.$$

(ii)⇒(i)设 $f=(f_n)$是一致有界 X 值鞅(例如 $f^*\leqslant M<\infty$).定义

$$f^{(n)} = (f_1,\cdots,f_n,f_n,\cdots),$$

显然,$f^{(n)}\in{}_q\widetilde{H}_a(X)$. 对于 $\forall\, l\in{}_q\widetilde{H}_a(X)^*$,取 $\varphi\in{}_{q'}K_{a'}(X^*)$使(6.30)成立.注意由(6.30)的第一式可推出对于 $\forall\,\varepsilon>0$,

$$\|\varphi\|_{q'} \leqslant c(\|l\| + \varepsilon),$$

从而

$$|Ef_n\varphi_n| \leqslant \|f_n\|_q\|\varphi_n\|_{q'} \leqslant c\|f_n\|_p(\|l\|+\varepsilon)$$

$$\lim_{n\to\infty}|l(f^{(n)})| = \lim_{n\to\infty}|Ef_n\varphi_n| \leqslant cM(\|l\| + \varepsilon).$$

根据共鸣定理,$f^{(n)}$是${}_q\widetilde{H}_a(X)$中的有界序列,从而

$$\|S^{(q)}(f)\|_a < \infty,\ S^{(q)}(f) < \infty, a.e.$$

这一事实表明 X 同构于 q 凸空间.

定理 3 设 X 是 Banach 空间,$1\leqslant a\leqslant 2$,以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) ${}_2\widetilde{H}_a(X)^*\sim{}_2K_{a'}(X^*)$,即${}_2\widetilde{H}_a(X)$的共轭空间同构于${}_2K_a(X^*)$.

证明 (i)⇒(ii) 由于 X 同构于 2 一致光滑空间,定理 1 成立($p=2$),这说明

$${}_2K_{a'}(X^*) \subset {}_2\widetilde{H}_a(X)^*.$$

X 又同构于 2 一致凸空间,于是定理 2 成立,${}_2\widetilde{H}_a(X)^*\subset{}_2K_{a'}(X^*)$,并且对于 $l\in{}_2\widetilde{H}_a(X)^*$,$f\in{}_2\widetilde{H}_a(X)$,

$$l(f) = \lim_{n\to\infty} Ef_n\varphi_n = \sum_{i=1}^{\infty} Edf_i d\varphi_i.$$

此时对应有 $\varphi\in{}_2K_{a'}(X^*)$使得

$$c_1 \| \varphi \|_{{}_2K_{a'}(X^*)} \leqslant \| l \| \leqslant c_2 \| \varphi \|_{{}_2K_{a'}(X^*)}, \tag{6.31}$$

其中 c_1,c_2 仅与 a 有关. 于是(ii)成立.

(ii)⇒(i) (ii)反过来说明(6.1)和(6.30)成立. 进一步地, (6.1)表明 X 同构于 2 光滑空间,(6.30)表明 X 同构于 2 凸空间. 根据 Kwapien 定理,X 同构于 Hilbert 空间.

推论 3 设 X 是 Banach 空间,则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) ${}_2\widetilde{H}_1(X)^* \sim \mathrm{BMO}_2(X^*)$,即${}_2\widetilde{H}_1(X)$的共轭空间同构于 $\mathrm{BMO}_2(X^*)$.

现在让我们转到 BMO 鞅的等价刻划.

定理 4 设 X 是 Banach 空间,$2 \leqslant a \leqslant \infty$,则以下条件等价:

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) 每个鞅 $\varphi=(\varphi_n) \in {}_2K_a(X)$当且仅当存在 $\sigma \in {}_2\widetilde{\mathscr{H}}_a(X)$使得

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} [E(\sigma_i | \mathscr{B}_i) - E(\sigma_i | \mathscr{B}_{i-1})], (\varphi_0 = 0) \tag{6.32}$$

此时存在仅与 a 有关的常数 $C_1,C_2>0$ 使得

$$C_1 \| \varphi \|_{{}_2K_a(X)} \leqslant \| \sigma \|_{{}_2\widetilde{\mathscr{H}}_a(X)} \leqslant C_2 \| \varphi \|_{{}_2K_a(X)}. \tag{6.33}$$

证明 (i)⇒(ii) 设 X 同构于 Hilbert 空间,由于 X 与 2 光滑空间同构,当(φ_n)满足(6.32)时,由引理 2 知道$(\varphi_n) \in {}_2K_a(X)$并且不等式(6.33)的左端成立.

现在设 $\varphi \in {}_2K_a(X)$,对于每个 $f \in {}_2\widetilde{H}_{a'}(X^*) = {}_2\widetilde{H}_{a'}(X)$(注意 X 同构于 Hilbert 空间),象实值情况一样,容易证明级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} Edf_i d\varphi_i \left(其中\ E\sum_{i=1}^{n} df_i d\varphi_i = Ef_n\varphi_n \right)$$

是绝对收敛的,所以极限

$$l_\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} Ef_n\varphi_n$$

存在. l_φ 是${}_2\widetilde{H}_{a'}(X)$上的有界线性泛函. 根据引理 1,存在 $\sigma \in {}_2\widetilde{\mathscr{H}}_a(X)$使得(6.16)成立. 从而(6.33)右端成立. 此外对于 $\forall\ f_n \in L_{p'}(X)$,

$$Ef_n\varphi_n = l_\varphi(f_n) = E\sum_{i=1}^n df_i d\varphi_i$$

$$= E\sum_{i=1}^n f_n[E(\sigma_i|\mathscr{B}_i) - E(\sigma_i|\mathscr{B}_{i-1})],$$

f_n 是任意的，故有

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n [E(\sigma_i|\mathscr{B}_i) - E(\sigma_i|\mathscr{B}_{i-1})],\ (\varphi_0 = 0)$$

(ii)成立.

(ii)⇒(i) 当 $f\in {}_2\widetilde{H}_a(X)$时，将 df 视为${}_2\mathscr{H}_a(X)$中的元素，(6.32)变为 $\varphi_n=f_n$，从(6.33)左端得到

$$C_1\|f\|_{{}_2K_a(X)} \leqslant \|f\|_{{}_2\mathscr{H}_a(X)} = \|S^{(2)}(f)\|_a. \qquad (6.34)$$

必要时将 f 换为 $\hat{f}^{(n)}=(\hat{f}_{in})$，其中 $\hat{f}_{in}=f_{i+n}-f_n(i\geqslant 1)$，则

$$C_1\|\hat{f}^{(n)}\|_{{}_2K_a(X)} \leqslant \|S^{(2)}(f) - S_n^{(2)}(f)\|_a.$$

由 Fatou 引理知道，当 $m\geqslant n, n\to\infty$时

$$\|f_m-f_n\|_p \leqslant \|\hat{f}^{(n)}\|_{{}_2K_a(X)} \leqslant C_1^{-1}\|S^{(2)}(f)-S_n^{(2)}(f)\|_a\to 0,$$

于是(f_n)是 L_a 收敛鞅，从而 $a.e.$ 收敛. 若 f 是满足 $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}\|df_n\|^2\in L_\infty$ 的 WP 鞅，令 $F_n = \sum_{i=1}^n i^{-1}df_i$，则 $F=(F_n)\in {}_2\widetilde{H}_a(X)$，由以上论述 $F_n\ a.e.$ 收敛. 再由 Kronecker 引理，$\frac{f_n}{n}\to 0$ $a.e.$，X 同构于 2 光滑空间.

另一方面，当 $\varphi\in L_\infty(X)$ 时，显然 $\varphi\in {}_2K_a(X)$. 此时有 $\sigma\in {}_2\widetilde{\mathscr{H}}_a(X)$ 使(6.32) 成立. 类似于引理 2 中的证明可以得到(6.26)成立. n 是任意的，故

$$ES^{(2)}(f)^2 \leqslant 2^2(Eg^2 + E(g^*)^2) < \infty.$$

其中用到 Doob 不等式，从 $S^{(2)}(\varphi)<\infty, a.e.$ 知道 X 是 2 一致可凸的.

由 Kwapien 定理得出 X 同构于 Hilbert 空间.

定理 4 在 $a=\infty$的情况便得到 BMO 鞅的等价刻划.

推论 4 设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) X 同构于 Hilbert 空间.

(ii) 每个鞅 $\varphi=(\varphi_n)\in \mathrm{BMO}_2(X)$ 当且仅当存在 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots)$, $\sum_{i=1}^{\infty}\|\sigma_i\|^2\leqslant B^2<\infty$, a.e. 使得

$$\varphi_n=\sum_{i=1}^{\infty}[E(\sigma_i|\mathscr{B}_i)-E(\sigma_i|\mathscr{B}_{i-1})]\quad(\varphi_0=0).$$

此时存在常数 $C_1,C_2>0$,

$$C_1\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2(X)}\leqslant\left\|\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\infty}\leqslant C_2\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}_2(X)}.$$

§7 正规鞅的一般 Φ 不等式

这里要介绍的正规鞅其性质与二进鞅相近. 我们将讨论关于这种鞅的 $S^{(p)}(f)$ 函数, f^* 函数的一般 Φ 函数不等式. 然后还将考察 Azema, Gundy, Yor 关于鞅的一致可积性问题.

设 (Ω,Σ,P) 是完备概率空间. $(\mathscr{B}_n,n\geqslant0)$ 是 Σ 的递增子 σ 代数序列, 称 $(\mathscr{B}_n,n\geqslant0)$ 是正规的, 若对于 $\forall\ A\in\mathscr{B}_n$, 至少存在一个 $B\in\mathscr{B}_{n-1}$ 使得 $A\subset B$ 并且

$$P(B)\leqslant dP(A).\tag{7.1}$$

这里 d 是一个与 n 无关的常数. 与正规 σ 代数序列适应的鞅称为正规鞅. 容易验证二进鞅是正规鞅. 有若干种条件与 σ 代数序列的正规性等价. 例如下面条件: 对于任何非负适应过程 $(\gamma_n,n\geqslant0)$ 和任何 $\lambda\geqslant\|\gamma_0\|_\infty$, 存在停时 τ_λ 使得

$$\begin{aligned}&\{\gamma^*>\lambda\}\subset\{\tau_\lambda<\infty\},P(\tau_\lambda<\infty)\leqslant dP(\gamma^*>\lambda),\\&\gamma^*_{\tau_\lambda}=\sup_{n\leqslant\tau_\lambda}|\gamma_n|\leqslant\lambda.\end{aligned}\tag{7.2}$$

关于这一结论的证明可见 Long[1] Ⅶ. §7.1.

定理 1 设 $2\leqslant q<\infty$, Φ 是限制增长的一般 Φ 函数, $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=\infty$, 则以下条件等价:

(i) X 同构于 q 一致凸空间.

(ii) 对于每个 X 值正规鞅 $f=(f_n)$，$(S^{(q)}(f),f^*)$满足好 λ 不等式.

(iii) 存在 $c=c_{q\Phi}>0$ 使得每个 X 值正规鞅满足

$$E\Phi(S^{(q)}(f))\leqslant cE\Phi(f^*) \tag{7.3}$$

证明 (i)⇒(ii). 根据 q 一致凸性和 § 3 引理 1 的不等式，对于任何停时 $\sigma,\gamma,\sigma\leqslant\gamma$，有

$$E\Big(\sum_{i=\sigma}^{\gamma}\|df_i\|^q|\mathscr{B}_\sigma\Big)\leqslant cE(\|f_\tau-f_{\sigma-1}\|^q|\mathscr{B}_\sigma) \tag{7.4}$$

所应注意的是，例如若 $\tau=\infty$时 f_τ 的定义问题. 实际上 X 具有 RN 性质，若 $f=(f_n)$一致有界($f^*\leqslant M<\infty$)，则以 L_a 中范数 $f_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$.

现在 $f=(f_n)$是正规鞅，对于 $\beta>0,\lambda>0$，存在停时 γ(仍设 $f_0=0$)使得

$$f_\tau^*\leqslant\beta\lambda,\{f^*>\beta\lambda\}\subset\{\tau<\infty\},$$
$$P(\tau<\infty)\leqslant dP(f^*>\beta\lambda).$$

考虑鞅 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n})$，则 $f^{(\tau)}$是一致有界的并且对于每个停时 σ

$$\begin{aligned}E(S_\tau^{(q)}(f)^q-(S_{\tau\wedge\sigma}^{(q)}(f)^q&=E[E(S_\tau^{(q)}(f)^q-S_{\tau\wedge\sigma}^{(q)}(f)^q|\mathscr{B}_{\tau\wedge\sigma})]\\&=E\Big[E\Big(\sum_{i=\tau\wedge\sigma+1}^{\tau}\|df_i\|^q\chi_{\{\sigma<\tau\}}|\mathscr{B}_{\tau\wedge\sigma}\Big)\Big]\\&\leqslant CE[E(\|f_\tau-f_{\tau\wedge\sigma}\|^q|\mathscr{B}_{\tau\wedge\sigma}])\chi_{\{\sigma<\tau\}}]\\&\leqslant C2^qE[(f_\tau^*)\chi_{\{\sigma<\tau\}}]\\&\leqslant C2^q\beta^q\lambda^qP(\sigma<\infty).\end{aligned} \tag{7.5}$$

对于非负适应过程$(S_n^{(q)}(f^{(\tau)}))$和 $\lambda>0$，同样由$(\mathscr{B}_n)$的正规性，存在停时 σ 使得

$$S_\sigma^{(q)}(f^{(\tau)}))\leqslant\lambda,P(\sigma<\infty)\leqslant dP(S_n^{(q)}(f^{(\tau)}))>\lambda),$$

对于如此的 σ，(7.5)成立. 此时若 $\alpha>1$，则

$$\{S^{(q)}(f)>\alpha\lambda\}\subset\{S^{(q)}(f^{(\tau)}))>\alpha\lambda\}\cup\{\tau<\infty\}. \tag{7.6}$$

注意 $S^{(q)}(f^{(\tau)}))=S_\tau^{(q)}(f)$，$S_\sigma^{(q)}(f^{(\tau)}))=S_{\tau\wedge\sigma}^{(q)}(f)$，所以

$$\{S^{(q)}(f^{(\tau)}))>\alpha\lambda\}\subset\{S_\tau^{(q)}(f)^q-S_{\tau\vee\sigma}^{(q)}(f)^q>\alpha^q\lambda^q-\lambda^q\}.$$

由(7.5),(7.6)和τ,σ的定义得到

$$\begin{aligned}P(S^{(q)}(f)>\alpha\lambda)&\leqslant P(S^{(q)}(f^{(\tau)}))>\alpha\lambda)+P(\tau<\infty)\\&\leqslant P(S_\tau^{(q)}(f)^q-S_{\tau\wedge\sigma}^{(q)}(f)^q>(\alpha^q-1)\lambda^q)+P(\tau<\infty)\\&\leqslant\frac{1}{(\alpha^q-1)\lambda^q}E(S_\tau^{(q)}(f)^q-S_{\tau\wedge\sigma}^{(q)}(f)^q)+P(\tau<\infty)\\&\leqslant\frac{C2^q\beta^q}{\alpha^q-1}P(\sigma<\infty)+P(\tau<\infty)\\&\leqslant\frac{Cd2^q\beta^q}{\alpha^q-1}P(S^{(q)}(f^{(\tau)}))>\lambda)+dP(f^*>\beta\lambda)\\&\leqslant\frac{Cd2^q\beta^q}{\alpha^q-1}P(S^{(q)}(f)>\lambda)+dP(f^*>\beta\lambda)\end{aligned}$$

令 $\varepsilon_{\alpha\beta}=\dfrac{Cd2^q\beta^q}{\alpha^q-1}$,则当$\alpha>1$固定时,$\lim\limits_{\beta\to0}\varepsilon_{\alpha\beta}=0$.故$(S^{(q)}(f),f^*)$满足好$\lambda$不等式.

(ii)⇒(iii).由§1引理4得到(7.3).

(iii)⇒(i).设$f=(f_n)$是一致有界WP鞅,$f^*\leqslant M<\infty$,则由(7.3),

$$E\Phi(S^{(q)}(f))\leqslant cE\Phi(f^*)\leqslant cE\Phi(M)<\infty$$

由于$\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t)=\infty$,故知$S^{(q)}(f)<\infty$ $a.e.$ 于是X是同构于q一致凸空间的.

定理 2 设$1<p\leqslant2$,Φ是限制增长的一般Φ函数并且$\Phi(t)$在$t=0$附近严格增加,则以下条件等价:

(i) X同构于p一致光滑空间.

(ii) 对于每个X值正规鞅f,$(f^*,S^{(p)}(f))$满足好λ不等式.

(iii) 存在$c=c_{p\Phi}>0$使得对于每个X值正规鞅f,

$$E\Phi(f^*)\leqslant cE\Phi(S^{(p)}(f))\tag{7.8}$$

证明 (i)⇒(ii).此时有

$$E(\|f_\tau-f_{\sigma-1}\|^p|\mathscr{B}_\sigma)\leqslant cE\Big(\sum_{i=\sigma}^{\tau}\|df_i\|^p|\mathscr{B}_\sigma\Big)\tag{7.9}$$

对于$\sigma\leqslant\tau$成立.由于当$S^{(p)}(f)\in L_p$时f_n依L_p范数收敛(Ⅶ.§3定理2).此时即使$\tau=\infty$也能使上式成立.

对于 $\beta>0,\lambda>0$,由正规性,存在停时 τ 使得

$$S_\tau^{(p)}(f)\leqslant\beta\lambda,\{S^{(p)}(f)>\beta\lambda\}\subset\{\tau<\infty\},$$

$$P(\tau<\infty)\leqslant dP(S^{(p)}(f)>\beta\lambda).$$

考虑鞅 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n})$. 显然对任何停时 σ,

$$f_\tau^*-f_{\tau\wedge\sigma}^*\leqslant\sup_{\tau\wedge\sigma<i\leqslant\tau}\|f_i-f_{\tau\wedge\sigma}\| \tag{7.10}$$

对于 $f^{(\tau)}$,存在停时 σ 使得

$$f_\sigma^{(\tau)^*}\leqslant\lambda,\{f^{(\tau)^*}>\lambda\}\subset\{\sigma<\infty\},$$

$$P(\sigma<\infty)\leqslant dP(f^{(\tau)^*}>\lambda),$$

由于 $f_\sigma^{(\tau)^*}=f_{\tau\wedge\sigma}^*,f^{(\tau)*}=f_\tau^*$, (7.9),(7.10)和 Doob 不等式给出

$$\begin{aligned}P(f^*>\alpha\lambda,\tau=\infty)&\leqslant P(f_\tau^*>\alpha\lambda)\\&\leqslant P(f_\tau^*-f_{\tau\wedge\sigma}^*>(\alpha-1)\lambda)\\&\leqslant\frac{1}{(\alpha-1)^p\lambda^p}E(\sup_{\sigma\wedge\sigma\leqslant i\leqslant\tau}\|f_i-f_{\tau\wedge\sigma}\|^p)\\&\leqslant\frac{p'^p}{(\alpha-1)^p\lambda^p}E[\|f_\tau-f_{\tau\wedge\sigma}\|^p\chi_{\{\sigma<\tau\}}]\\&\leqslant\frac{p'^p}{(\alpha-1)^p\lambda^p}E[E(\|f_\tau-f_{\tau\wedge\sigma}\|^p|\mathscr{B}_{\tau\wedge\sigma})\chi_{\{\sigma<\tau\}}]\\&\leqslant\frac{cp'^p}{(\alpha-1)^p\lambda^p}E\Big[E\Big(\sum_{i=\sigma\wedge\tau+1}^{\tau}\|df_i\|^p|\mathscr{B}_{\tau\wedge\sigma}\Big)\chi_{\{\sigma<\tau\}}\Big]\\&\leqslant\frac{cp'^p\beta^p}{(\alpha-1)^p}P(\sigma<\infty)\end{aligned}\tag{7.11}$$

从而

$$\begin{aligned}P(f^*>\alpha\lambda)&\leqslant P(f^*>\alpha\lambda,\tau=\infty)+P(\tau<\infty)\\&\leqslant\frac{cp'^p\beta^p}{(\alpha-1)^p}P(\sigma<\infty)+P(\tau<\infty)\\&\leqslant\frac{cdp'^p\beta^p}{(\alpha-1)^p}P(f^*>\lambda)+dP(S^{(p)}(f)>\beta\lambda).\end{aligned}$$

设 $\varepsilon_{\alpha\beta}=\dfrac{cdp'^p\beta^p}{(\alpha-1)^p}$,则对于固定的 $\alpha>1,\lim\limits_{\beta\to0}\varepsilon_{\alpha\beta}=0$,上式即所要的好 λ 不等式.

(ii)⇒(iii). 仍由 §1 引理 4 推出.

(iii)⇒(i). 假定 $E\Phi(S^{(p)}(\underset{\sim}{f}))<\infty$ 对于鞅 $f=(f_n)$ 成立,设 $\mathcal{F}^{(n)}=(\mathcal{F}_i^{(n)}$,其中 $\mathcal{F}_i^{(n)}=f_{i+n}-f_n,\mathscr{B}_i=\mathscr{B}_{i+n}(i\geqslant0)$. 我们有

$$S^{(p)}(\mathcal{F}^{(n)})^p=S^{(p)}(f)^p-S_n^{(p)}(f)^p,\mathcal{F}^{(n)*}=\sup_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|.$$

由(7.8)

$$E\Phi(\sup_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|)\leqslant cE\Phi((S^{(p)}(f)^p-S_n^{(p)}(f)^p)^{1/p}).$$

注意 $S^{(p)}(f)^p-S_n^{(p)}(f)^p\to0\ (n\to\infty)$,由 Fatou 引理

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}E\Phi(\sup_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}cE\Phi((S^{(p)}(f)^p-S_n^{(p)}(f)^p)^{1/p})=0.\end{aligned}\qquad(7.12)$$

于是 $\Phi(\sup_{m\geqslant n}\|f_m-f_n\|)$当 $n\to\infty$时依概率收敛于 0. 由定理中关于 Φ 在 0 点附近的性状. 必有 $f_n\to0\ a.e.$

对于一个满足 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-p}\|df_n\|^p\in L_\infty$的鞅,定义 $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n),\mathcal{F}_n=\sum_{i=1}^{n}i^{-1}df_i$,则由上述证明必可得出 $\mathcal{F}_n\to0\ a.e.$ 从而 $\frac{f_n}{n}\to0\ a.e.$ 所以 X 必同构于 p 一致光滑空间.

注意对于上述两个定理,$\Phi(t)=t^a(0<a<\infty)$是满足所说条件的,特别是对于 $0<a<1$,这给出以往没有出现过的新结论.

推论 1 设 $0<a<\infty$,则 X 同构于 Hilbert 空间当且仅当存在 $c=c_a>0$ 使得对于任何 X 值鞅 f,

$$C^{-1}E(f^*)^a\leqslant ES^{(2)}(f)^a\leqslant CE(f^*)^a\qquad(7.13)$$

定理 3 设 $1<p\leqslant2\leqslant q<\infty$,$X$ 是 Banach 空间.

(i) X 同构于 q 一致凸空间当且仅当对于任何 X 值鞅 $f=(f_n)$,$\{f^*<\infty\}\subset\{S^{(q)}(f)<\infty\}\ a.e.$

(ii) X 同构于 p 一致光滑空间当且仅当对于任何 X 值鞅 $f=(f_n)$,$\{S^{(p)}(f)<\infty\}\subset\{f_n 收敛\}\ a.e.$

(iii) X 同构于 Hilbert 空间当且仅当对于任何 X 值鞅 $f=(f_n)$. $\{S^{(2)}(f)<\infty\}=\{f^*<\infty\}=\{f_n 收敛\}\ a.e.$

证明 1° 先设 X 是同构于 q 一致凸空间的. $f=(f_n)$ 是 X 值鞅,由正规性,对于任何 $\lambda>0$,存在停时 τ 使得

$$\{f^* > \lambda\} \subset \{\tau_\lambda < \infty\}, P(\tau_\lambda < \infty) \leqslant dP(f^* > \lambda)$$

$$f^*_{\tau_\lambda} \leqslant \lambda.$$

考虑鞅 $f^{(\tau_\lambda)}=(f_{\tau_\lambda \wedge n})$. 注意 $f^{(\tau_\lambda)*}\leqslant\lambda$,所以 $f^{(\tau_\lambda)}$ 一致有界从而 L_q 可积. 由 q 一致凸性

$$ES^{(q)}_{\tau_\lambda}(f)^q = ES^{(q)}(f^{(\tau_\lambda)})^q \leqslant c_q^q \| f^{(\tau_\lambda)*} \|^q \leqslant c_q^q \lambda^q < \infty$$

于是 $S^{(q)}_{\tau_\lambda}(f)<\infty$ $a.e.$,即 $S^{(q)}(f)$ 在 $\{\tau_\lambda=\infty\}$ 上 $a.e.$ 有限. 另一方面,由 $P(\tau_\lambda<\infty)\leqslant dP(f^*>\lambda)$,后者的测度当 $\lambda\to\infty$ 时 趋于 $P(f^*=\infty)$,于是

$$\lim_{\lambda\to\infty} P(\tau_\lambda = \infty) = P(f^* < \infty),$$

得到 $\{f^*<\infty\}\subset\{S^{(q)}(f)<\infty\}$ $a.e.$

反过来,考虑 WP 鞅,若 $\{f^*<\infty\}\subset\{S^{(q)}(f)<\infty\}$ $a.e.$ 都成立,则由 § 2 定理 1 可得到 X 同构于 q 一致凸空间.

2° 证明方法与上面类似. 考虑序列 $(S^{(q)}_n(f), n\geqslant 1)$,由正规性,存在停时 τ_λ 使得

$$S^{(p)}_{\tau_\lambda}(f) \leqslant \lambda, \{S^{(p)}(f) > \lambda\} \subset \{\tau_\lambda < \infty\},$$

$$P(\tau_\lambda < \infty) \leqslant dP(S^{(p)}(f) > \lambda).$$

考虑鞅 $f^{(\tau_\lambda)}=(f_{\tau_\lambda \wedge n})$,由 p 一致光滑性,可得到

$$E \| f_{\tau_\lambda \wedge n} \|^p \leqslant c_p^p ES^{(p)}_{\tau_\lambda}(f)^p \leqslant c_p^p \lambda^p < \infty$$

此时 $f_{\tau_\lambda \wedge n}$ 是 $a.e.$ 收敛的. 类似的讨论得到

$$\{S^{(p)}(f) < \infty\} \subset \{f_n \text{ 收敛}\}\ a.e.$$

反过来的结论可以用定理 2 中相应部分的方法得到.

3° 由以上两点和 Kwapien 定理,(iii)成立.

Azema, Gundy, Yor 曾经证明对于 L_1 有界实值连续时间鞅 $f=(f_n)$ 来说,下面两条中每一条都是 $(f_n, n\geqslant 1)$ 一致可积的等价条件:

(i) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda P(f^*>\lambda)=0$, (ii) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda P(S^{(2)}(f)>\lambda)=0$.

实际上对于 B 值离散鞅,(i)仍是一致可积的等价条件.

现在让我们考察条件(ii).这里有两个例子:

例 1 考虑Ⅱ.§2 中利用有界无穷 δ 树构造的鞅 $f=(f_n)$,其中

$$\sup_n \| f_n(\omega) \| \leqslant \sup_n \| x_n \| < \infty,$$

$$\| f_n(\omega) - f_{n+1}(\omega) \| \geqslant \delta > 0 \ (\forall\ \omega \in [0,1)), n \geqslant 1.$$

于是 $f=(f_n)$是一致可积鞅,但 $S^{(p)}(f)=\infty$, $a.e.$ $(0<p<\infty)$.因此,如果 X 包含有有界无穷 δ 树,则 X 值鞅的一致可积性不能与(ii)等价.

例 2 由我们在§2 定理 1、2 中证明的结果,若 X 不同构于 q 一致凸($2\leqslant q<\infty$)空间,则存在一致有界 X 值鞅 $f=(f_n)$,$f^*\leqslant M<\infty$,$P(S^{(q)}(f)=\infty)>0$,此时不会有(ii)成立.这一情况甚至限于 WP 鞅也成立.

对于非负可测函数 h,记

$$\sigma_h = \sup_{\lambda>0} \lambda P(h > \lambda),\ l_h = \lim_{\lambda\to\infty} \sup \lambda P(h > \lambda).$$

引理 1 对于满足好 λ 不等式的非负 $R.V.$ 序对(f,g),存在常数 $C>0$ 使得

(i) $\sigma_f \leqslant C\sigma_g$.

(ii) $l_f \leqslant Cl_g$.

证明 记 $\theta(\lambda)=\lambda P(f>\lambda)$,则由好 λ 不等式

$$\theta(\alpha\lambda) \leqslant \alpha\varepsilon_{\alpha\beta}\theta(\lambda) + \alpha\beta^{-1}d_{\alpha\beta}\sigma_g$$

$$\begin{aligned}\theta(\lambda) &\leqslant \alpha\varepsilon_{\alpha\beta}\theta(\frac{\lambda}{\alpha}) + C_{\alpha\beta}\sigma_g \leqslant \cdots \\ &\leqslant (\alpha\varepsilon_{\alpha\beta})^n\theta\left(\frac{\lambda}{\alpha^n}\right) + C_{\alpha\beta}(1 + \alpha\varepsilon_{\alpha\beta} + \cdots \\ &\quad + (\alpha\varepsilon_{\alpha\beta})^{n-1})\sigma g,\end{aligned}$$

选 β 足够小,以至于 $\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}<1$,令 $n\to\infty$则得到

$$\sigma_f = \sup_{\lambda>0}\theta(\lambda) \leqslant C_{\alpha\beta}(1 - \alpha\varepsilon_{\alpha\beta})^{-1}\sigma_g.$$

若 $l_g<\infty$,则 $\sigma_g<\infty$ 同时有 $l_f\leqslant\sigma_f<\infty$,于是由上面证明

$$l_f \leqslant \alpha\varepsilon_{\alpha\beta} l_f + \alpha\beta^{-1} d_{\alpha\beta} l_g$$

β 足够小时，由 $l_f<\infty$ 得到 $l_f \leqslant \alpha\beta^{-1}(1-\alpha\varepsilon_{\alpha\beta})^{-1} d_{\alpha\beta} l_g$. 引理得证.

根据上面定理 1,2 的结论可得

推论 2 若 X 同构于 q 一致凸空间，$2\leqslant q<\infty$，则存在 $c>0$ 使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 有

(i) $\sigma_{S^{(q)}(f)} \leqslant c\sigma_{f^*}$.

(ii) $l_{S^{(q)}(f)} \leqslant c l_{f^*}$.

推论 3 若 X 同构于 p 一致光滑空间，$1<p\leqslant 2$，则存在 $c>0$ 使得每个 X 值鞅 $f=(f_n)$ 有

(i) $\sigma_{f^*} \leqslant c\sigma_{S^{(p)}(f)}$.

(ii) $l_{f^*} \leqslant c l_{S^{(p)}(f)}$.

引理 2 非负 L^1 有界下鞅 $f=(f_n)$ 一致可积的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} Ef_{\tau_n}\chi_{\{\tau_n<\infty\}}=0$，这里 $\tau_n=\inf\{k, f_k>n\}$

证明 先设 $f=(f_n)$ 是鞅，由 L_1 有界，f_n $a.e.$ 收敛. 设其极限函数为 f_∞，$f_\infty\in L_1$. 由一致可积性 f 是正则鞅，$f_n=E(f_\infty|\mathscr{B}_n)$，实际上对于任何停时 τ，$f_\tau=E(f_\infty|\mathscr{B}_\tau)$，$\{f_\tau\}$ 一致可积. 又

$$P(\tau_n<\infty)=P(f^*>n)\leqslant n^{-1}\sup_{k\geqslant 0} E|f_k| \to 0\ (n\to\infty)$$

故有
$$\lim_{n\to\infty} Ef_{\tau_n}\chi_{\{\tau_n<\infty\}} = \lim_{n\to\infty}\int_{\{f^*>n\}} |f_{\tau_n}|dP = 0.$$

若 f 是非负下鞅，$f=M+A$ 是其 Doob 分解，$M=(M_n)$ 是鞅，$A=(A_n)$ 是非负增加可料过程，此时 $A_\infty\in L_1$. 于是 (M_n) 一致可积. 由上面叙述可知结论对于 f 成立.

反之，设 $f=M+A$ 是下鞅 f 的 Doob 分解，若 $\lim\limits_{n\to\infty} Ef_{\tau_n}\chi_{\{\tau_n<\infty\}}=0$，则

$$\begin{aligned}
\int_{\{f_k>n\}} f_k dP &= \int_{\{\tau_n\leqslant k\}} f_k dP \\
&= \int_{\{\tau_n\leqslant k\}} f_{\tau_n} + \int_{\{\tau_n\leqslant k\}} (f_k - f_{\tau_n}) dP \\
&\leqslant \int_{\{\tau_n\leqslant k\}} f_{\tau_n} dP + \int_{\{\tau_n\leqslant k\}} (M_k - M_{\tau_n}) dP
\end{aligned}$$

$$+\int_{\{\tau_n\leq k\}}(A_k-A_{\tau_n})dP=I_1+I_2+I_3.$$

最后式子的第一项，由所说条件 $I_1\leqslant\int_{\{\tau_n<\infty\}}f_{\tau_n}dP\to 0\ (n\to\infty)$，第二项 $I_2=\int_{\{\tau_n<k\}}E(M_k-M_{\tau_n}|\mathscr{B}_{\tau_n})dP=0$，第三项 $I_3\leqslant\int_{\{\tau_n<k\}}A_\infty dP\leqslant\int_{\{\tau_n<\infty\}}A_\infty\ dP\to 0\ (n\to\infty)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq 0}\int_{\{|f_k|>n\}}f_kdP=0.(f_k,k\geqslant 1)$ 一致可积.

定理 4 设 $f=(f_n)$ 是 L_1 有界 X 值正规鞅，则 $(f_n,n\geqslant 1)$ 一致可积当且仅当 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda P(f^*>\lambda)=0$.

证明 先设 $(f_n,n\geqslant 1)$ 一致可积，此时 $(\|f_k\|,k\geqslant 1)$ 是一致可积下鞅. 由引理 2 得出

$$nP(f^*>n)=nP(\tau_n<\infty)\leqslant\int_{\{\tau_n<\infty\}}\|f_{\tau_n}\|dP\to 0.$$

反之，若上式成立，取 $\lambda=n$，由正规性，存在停时 σ_n 使得

$$f_{\sigma_n}^*\leqslant n,\ P(\sigma_n<\infty)\leqslant dP(f^*>\lambda),\{f^*>\lambda\}\subset\{\sigma_n<\infty\},$$

于是$\int_{\{\sigma_n<\infty\}}\|f_{\sigma_n}\|dP\leqslant nP(\sigma_n<\infty)\leqslant dnP(f^*>n)\to 0.$

注意这里的 σ_n 与前面定义的 τ_n 不同. 仍应用 $(\|f_n\|,n\geqslant 1)$ 的 Doob 分解，则

$$\int_{\{\|f_k\|>n\}}\|f_k\|dP\leqslant\int_{\{f_k^*>n\}}\|f_k\|dP\leqslant\int_{\{\sigma_n<\infty\}}\|f_k\|dP$$

取 $m\geqslant k$，由于 $(\|f_k\|,k\geqslant 1)$ 是下鞅，故

$$\int_{\{\sigma_n<\infty\}}\|f_k\|dP=\lim_{m\to\infty}\int_{\{\sigma_n\leqslant m\}}\|f_k\|dP\leqslant\lim_{m\to\infty}\int_{\{\sigma_n\leqslant m\}}\|f_m\|dP$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\int_{\{\sigma_n\leqslant m\}}\|f_{\sigma_n}\|dP+\int_{\{\sigma_n\leqslant m\}}(\|f_m\|-\|f_{\sigma_n}\|)dP\right)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\int_{\{\sigma_n\leqslant m\}}\|f_{\sigma_n}\|dP + \int_{\{\sigma_n\leqslant m\}}(M_m - M_{\sigma_n})dP\right.$$

$$\left. + \int_{\{\sigma_n < m\}}(A_m - A_{\sigma_n})dP\right)$$

$$= \int_{\{\sigma_n<\infty\}}\|f_{\sigma_n}\|dP + \int_{\{\sigma_n<\infty\}}A_\infty dP \to 0 \ (n\to\infty)$$

定理得证.

定理 5 设 X 是 Banach 空间,则

(i) 当 X 同构于 q 一致凸空间($2\leqslant q<\infty$)时,每个一致可积 X 值鞅 $f=(f_n)$ 有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(S^{(q)}(f)>\lambda)=0. \tag{7.16}$$

(ii) 当 X 同构于 p 一致光滑空间($1<p\leqslant 2$)时,每个满足

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda P(S^{(p)}(f)>\lambda)=0. \tag{7.17}$$

的 X 值鞅 $f=(f_n)$ 是一致可积的.

证明 若 X 同构于 q 一致凸空间,由定理 4,当 $f=(f_n)$ 一致可积时,$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda P(f^*>\lambda)=0$. 由推论 2 (ii)知道$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda P(S^{(q)}(f)>\lambda)=0$.

若 X 同构于 p 一致光滑空间并且 $f=(f_n)$ 满足$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda P(S^{(p)}(f)>\lambda)=0$,由推论 3(ii)知道 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda P(f^*>\lambda)=0$. 然后由定理 4 得出 $f=(f_n)$一致可积.

推论 4 若 Banach 空间 X 同构于 Hilbert 空间,则对于任意 L_1 有界 X 值鞅 $f=(f_n)$,(f_n)一致可积当且仅当$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda P(S^{(2)}(f)>\lambda)=0$.

§8 加权与内插

本节将讨论 B 值鞅的某些加权不等式,其中所用的加权函数是通常的 $\widetilde{A}_p$ 权函数.之后将叙述 B 值正规鞅的内插空间的性质

并以此给出 q 一致凸或 p 一致光滑空间的内插空间的凸性和光滑性.

设 $z\in L^1(\Omega)$ 是一严格正的随机变量，$EZ=1$ 时称 Z 是测度变换. $\hat{P}=zP$ 是由 z 产生的一个新测度 $\left(\hat{P}(A)=\int_A zdP,\forall A\in\mathscr{F}\right)$. 记 $z_n=E(z|\mathscr{F}_n),n\geqslant 1$. 称 z 满足 S 条件，若存在常数 K 使

$$\frac{1}{K}z_{n-1}\leqslant z_n\leqslant Kz_{n-1},a.e.\ \forall n. \tag{8.1}$$

当 z 满足 S 条件时，记成 $z\in S$. 条件 S^-，S^+ 分别表示 z 只满足上式左边或右边的不等式. 称 $z\in A_p$，$(p\geqslant 1)$：若存在常数 C_p，使

$$z_n E(z^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{F}_n)^{p-1}\leqslant C_p,\ a.e.,\ \forall n.\ (p>1) \tag{8.2}$$

$$z_n\leqslant C_1 z,\ a.e.,\ \forall n.\ (p=1).$$

记 $A_\infty=\bigcup\limits_{p\geqslant 1}A_p$. 称 $z\in\widetilde{A}_p$：若 $\frac{1}{z}\in\widetilde{A}_p$(即关于测度 $\hat{P}$ 的 A_p 条件). 记 $\widetilde{A}_\infty=\bigcup\limits_{p\geqslant 1}\widetilde{A}_p$.

本节关于测度 $\hat{P}$ 的有关记号用关于测度 P 的相应记号加"∧"表示. 例如 $\hat{E}$ 表示关于 $\hat{P}$ 的条件期望. 当谈到 $f=(f_n)$ 是一个 X 值鞅时，若无特别声明均指关于测度 P 的鞅.

关于 $\hat{A}_p$ 权函数，有一些等价的刻划条件，例如 $z\in\hat{A}_p$ 当且仅当对于任何非负可测函数 ξ，

$$E(\xi|\mathscr{B}_\tau)\leqslant c\hat{E}(\xi^p|\mathscr{B}_\tau)^{1/p} \tag{8.3}$$

其中 τ 是任一停时.

定理 1 设 X 是 Banach 空间，$z\in\hat{A}_\infty$. 又设 $f=(f_n)$ 是 X 值鞅，且存在非负增加适应过程 $D=(D_n)$ 满足 $\|\Delta f_n\|\leqslant D_{n-1}$.

(i) 若 X 同构于 q 凸空间($2\leqslant q<\infty$)，则函数对($S^{(q)}(f)$，f^*+D^*)关于测度 $\hat{P}=zP$ 满足好 λ 不等式：

$$\hat{P}(S^{(q)}(f)>\alpha\lambda,f^*+D^*\leqslant\beta\lambda)\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(S^{(q)}(f)>\lambda). \tag{8.4}$$

(ii) 若 X 同构于 p 光滑空间($1<p\leqslant 2$)，则函数对(f^*，$S^{(p)}$

$(f)+D^*$)关于测度 $\hat{P}=zP$ 满足好 λ 不等式：

$$\hat{P}(f^*>\alpha\lambda, S^{(p)}(f)+D^*\leqslant\beta\lambda)\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(f^*>\lambda). \quad (8.5)$$

其中 $\alpha>1,\beta>0$，且对固定 $\alpha>1$，$\lim\limits_{\beta\to 0}\varepsilon_{\alpha,\beta}=0$.

证明 (i). 对任意 $\lambda>0,\beta>0$，定义停时

$$\tau=\inf\{n: f_n^*+D_n>\beta\lambda\},\ (\inf\varnothing=\infty),$$

因为 $\|\Delta f_n\|\leqslant D_{n-1}$，故

$$\|f_n\|\leqslant\|f_{n-1}\|+\|\Delta f_n\|\leqslant f_{n-1}^*+D_{n-1}.$$

因此 $f_\tau^*\leqslant f_{\tau-1}^*+D_{\tau-1}\leqslant\beta\lambda$. 考虑停止鞅 $f^{(\tau)}=(f_{n\wedge\tau})$. 对同一个 λ 定义停时

$$\sigma=\inf\{n: S_n^{(q)}(f^{(\tau)})>\lambda\}.$$

则 $S_{\sigma-1}^{(q)}(f^{(\tau)})\leqslant\lambda$. 注意$\{f^*+D_\infty\leqslant\beta\lambda\}\subset\{\tau=\infty\}$，故当 $\alpha>1$ 时

$$\{S^{(q)}(f)>\alpha\lambda, f^*+D^*\leqslant\beta\lambda\}\subset\{S^{(q)}(f^{(\tau)})\leqslant\alpha\lambda\},$$

$$\begin{aligned}&\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}\\&\subset\{S^{(q)}(f^{(\tau)})^q-S_{\sigma-1}^{(q)}(f^{(\tau)})^q>(\alpha^q-1)\lambda^q\}.\end{aligned}\quad (8.6)$$

因此有

$$\begin{aligned}&E(\chi_{\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}}|\mathscr{B}_\sigma)\\
&\leqslant\frac{1}{(\alpha^q-1)\lambda^q}E(S^{(q)}(f^{(\tau)})^q-S_{\sigma-1}^{(q)}(f^{(\tau)})^q|\mathscr{B}_\sigma)\\
&\leqslant\frac{1}{(\alpha^q-1)\lambda^q}\Big[E\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|f_{\sigma+i}^{(\tau)}-f_{\sigma+i-1}^{(\tau)}\|^q|\mathscr{B}_\sigma\Big)\\
&\quad+E(\|f_\sigma^{(\tau)}-f_{\sigma-1}^{(\tau)}\|^q|\mathscr{B}_\sigma)\Big]\\
&\leqslant\frac{1}{(\alpha^q-1)\lambda^q}\Big[E\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|f_{\sigma+i}^{(\tau)}-f_{\sigma+i-1}^{(\tau)}\|^q|\mathscr{B}_\sigma\Big)+2\beta^q\lambda^q\Big].\end{aligned}$$

(8.7)

因 X 同构于 q 凸空间，我们有

$$\begin{aligned}&E\Big(\sum_{i=1}^{m}\|f_{\sigma+i}^{(\tau)}-f_{\sigma+i-1}^{(\tau)}\|^q|\mathscr{B}_\sigma\Big)\\
&\leqslant KE(\|f_{\sigma+i}^{(\tau)}\|^q-\|f_{\sigma+i-1}^{(\tau)}\|^q|\mathscr{B}_\sigma)\leqslant 2K\beta^q\lambda^q.\end{aligned}$$

由 Fatou 引理得

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|f_{\sigma+i}^{(\tau)}-f_{\sigma+i-1}^{(\tau)}\|^q \mid \mathscr{B}_\sigma\right)\leqslant 2K\beta^q\lambda^q, \qquad (8.8)$$

结合(8.8),(8.7)两式知

$$E(\chi_{\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}}\mid\mathscr{B}_\sigma)\leqslant\frac{2(K+1)\beta^q}{\alpha^q-1}.$$

由 $z\in\widetilde{A}_\infty$,根据(8.3),存在 $r\geqslant 1$ 和 $c_r>0$ 使得

$$\begin{aligned}\hat{E}(\chi_{\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}}\mid\mathscr{B}_\sigma)&\leqslant C_rE(\chi_{\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}}\mid\mathscr{B}_\sigma)^{\frac{1}{r}}\\&\leqslant C_r\left(\frac{2(K+1)\beta^q}{\alpha^q-1}\right)^{\frac{1}{r}}\triangleq\varepsilon_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

因 $\{S^{(q)}(f^{(\tau)}>\alpha\lambda\}\subset\{\sigma<\infty\}\in\mathscr{B}_\sigma$,我们有

$$\begin{aligned}\hat{P}(S^{(q)}(f^{(\tau)}>\alpha\lambda)&=\int_{\{\sigma<\infty\}}\hat{E}(\chi_{\{S^{(q)}(f^{(\tau)})>\alpha\lambda\}}\mid\mathscr{B}_\sigma)d\hat{P}\\&\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(\sigma<\infty)\\&=\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(S^{(q)}(f^{(\tau)}>\lambda)\\&\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(S^{(q)}(f)>\lambda).\end{aligned}$$

考虑到(8.7)式即知

$$\hat{P}(S^{(q)}(f^{(\tau)}>\alpha\lambda,f^*+D^*\leqslant\beta\lambda)\leqslant\varepsilon_{\alpha,\beta}\hat{P}(S^{(q)}(f)>\lambda).$$

注意对固定的 $\alpha>1$,有 $\lim\limits_{\beta\to 0}\varepsilon_{\alpha,\beta}=0$. 这就证明了 $(S^{(q)}(f),f^*+D^*)$ 关于测度 $\hat{P}$ 满足好 λ 不等式.

(ii) 类似地,对任意 $\lambda>0,\beta>0$,定义停时

$$\tau=\inf\{n:S_n^{(p)}(f)+D_n>\beta\lambda\},$$

$$\sigma=\inf\{n:\|f_n^{(\tau)}\|>\lambda\}.$$

其中 $f^{(\tau)}=(f_{n\wedge\tau})$ 是停止鞅. 考虑关于 σ 代数族 $(\mathscr{B}_{\sigma+i-1},i\geqslant 1)$ 的鞅 $g=(g_i)_{i\geqslant 1}=(f_{\sigma+i-1}^{(\tau)}-f_{\sigma-1}^{(\tau)})_{i\geqslant 1}$. 注意到

$$\begin{aligned}g^*&=\sup_{i\geqslant 1}\|f_{\sigma+i-1}^{(\tau)}-f_{\sigma-1}^{(\tau)}\|\\&\geqslant(\sup_{i\geqslant 1}\|f_{\sigma+i-1}^{(\tau)}\|-\|f_{\sigma-1}^{(\tau)}\|)\geqslant f^{(\tau)*}-f_{\sigma-1}^{(\tau)*}\end{aligned}$$

$$S^{(p)}(g)=S^{(p)}(f^{(\tau)})=S_{\tau-1}^{(p)}(f)\leqslant\beta\lambda.$$

由于 p 光滑性,对 g 应用 Davis 不等式得到

$$E(\chi_{\{f^{(\tau)*}>\alpha\lambda\}}|\mathscr{B}_\sigma) \leqslant E(\chi_{\{f^{(\tau)*}-f^{(\tau)*}_{\sigma-1}>(\alpha-1)\lambda\}}|\mathscr{B}_\sigma)$$
$$\leqslant E(\chi_{\{g^*>(\alpha-1)\lambda\}}|\mathscr{B}_\sigma)$$
$$\leqslant (\alpha-1)^{-1}\lambda^{-1}E(g^*|\mathscr{B}_\sigma)$$
$$\leqslant (\alpha-1)^{-1}\lambda^{-1}E(S^{(p)}(g)|\mathscr{B}_\sigma) \leqslant C\beta(\alpha-1)^{-1}. \quad (8.9)$$

再利用 $z\in\widetilde{A}_\infty$的条件，与(i)的证明类似可证$(f^*, S^{(p)}(f)+D^*)$关于测度 $\hat{P}$ 满足好 λ 不等式.

定理 2 设 X 是 Banach 空间，$1<p\leqslant 2\leqslant q<\infty$，$\Phi$ 是限制增长的 Young 函数，则

(i) X 同构于 q 凸空间当且仅当对任何 $z\in\widetilde{A}_\infty\cap S^{-}$，存在 $c>0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$\hat{E}\Phi(S^{(q)}(f)) \leqslant c\hat{E}\Phi(f^*) \quad (8.10)$$

并且(或者)

$$\| S^{(q)}(f) \|_{\hat{\Phi}} \leqslant c \| f^* \|_{\hat{\Phi}} \quad (8.11)$$

(ii) X 同构于 p 光滑空间当且仅当对于任何 $z\in\widetilde{A}_\infty\cap S^{-}$，存在 $c>0$ 使得每个 X 值鞅 f 满足

$$\hat{E}\Phi(f^*) \leqslant c\hat{E}\Phi(S^{(p)}(f)) \quad (8.12)$$

并且(或者)

$$\| f^* \|_{\hat{\Phi}} \leqslant c \| S^{(p)}(f) \|_{\hat{\Phi}} \quad (8.13)$$

其中 $\| f^* \|_{\hat{\Phi}} = \sup_{n\geqslant 1} \| f^* \|_{\hat{\Phi}}$.

证明 1° 先假设 X 同构于 q 凸空间，$f=(f_n)$是 X 值鞅. 作 f 的 Davis 分解 $f=g+h$，由于 $z\in S^{-1}$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \Delta h_n \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2(d_n^* - d_{n-1}^*) + \sum_{n=1}^{\infty} 2E(d_n^* - d_{n-1}^* | \mathscr{B}_{n-1})$$
$$= 2d^* + 2\sum_{n=1}^{\infty} z_{n-1}\hat{E}\left((d_n^* - d_{n-1}^*)\frac{1}{z_n} \Big| \mathscr{B}_{n-1}\right)$$
$$= 2d^* + 2K\sum_{n=1}^{\infty} \hat{E}(d_n^* - d_{n-1}^* | \mathscr{B}_{n-1})$$

由 §1 推论 2，我们有

$$\hat{E}\Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\hat{E}(d_n^* - d_{n-1}^* \mid \mathscr{B}_{n-1})\Big) \leqslant C\hat{E}\Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(d_n^* - d_{n-1}^*)\Big)$$

$$\leqslant C\hat{E}\Phi(d^*)$$

注意对于 g，由定理 1 (i)知($S^{(q)}(g)$，$g^* + 4d^*$)满足好 λ 不等式. 由§1引理 4 得到

$$\hat{E}\Phi(S^{(q)}(g)) \leqslant C\hat{E}\Phi(g^* + 4d^*). \qquad (8.14)$$

利用以上诸式得到

$$\hat{E}\Phi(S^{(q)}(f)) \leqslant C\hat{E}\Phi(S^{(q)}(g)) + C\hat{E}\Phi(S^{(q)}(h))$$

$$\leqslant C\hat{E}\Phi(g^* + 4d^*) + C\hat{E}\Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\|\Delta h_n\|\Big)$$

$$\leqslant C\hat{E}\Phi(f^*) + C\hat{E}\Phi(h^*) + C\hat{E}\Phi(4d^*)$$

$$+ C\hat{E}\Phi\Big(2K\sum_{n=1}^{\infty}\hat{E}(d_n^* - d_{n-1}^* \mid \mathscr{B}_{n-1})\Big)$$

$$\leqslant C\hat{E}\Phi(f^*) + C\hat{E}\Phi(d^*) \leqslant C\hat{E}\Phi(f^*)$$

C 仅与 Φ 和 z 有关，于是(8.10)得证. 由(8.10)容易得到(8.11).

反过来，无论(8.10)或者(8.11)成立，若 f 是一致有界 X 值 WP 鞅，则 $S^{(q)}(f) < \infty$ $\hat{P}$-$a.e.$ 但测度 P 和 $\hat{P}$ 是几乎处处一致的，于是由§2定理 1 知道 X 同构于 q 凸空间.

2° (ii)的证明与(i)类似，只须注意将以上不等式中的 $S^{(q)}(f)$ 换为 f^*，将 f^* 换为 $S^{(p)}(f)$. 另外反过来的证明仿照上一节定理 2 (iii)⇒(i)，但需注意是在测度 $\hat{P}$ 之下.

推论 1 设 X 是 Banach 空间，Φ 是限制增长的 Young 函数，则 X 同构于 Hilbert 空间当且仅当对于任何 $z \in \tilde{A}_\infty \cap S^{-1}$ 存在常数 $C = C_\Phi > 0$ 使得每个 X 值鞅满足

$$C^{-1}\|f^*\|_{\hat{\Phi}} \leqslant \|S^{(2)}(f)\|_{\hat{\Phi}} \leqslant C\|f^*\|_{\hat{\Phi}} \qquad (8.15)$$

让我们转到 B 值正规鞅的内插空间. 这里采用实方法. 以下记鞅 f 的极大函数为 Mf，即 $Mf = \sup_{n\geqslant 1}\|f_n\|$. p 均方函数不变. 实值可测函数 $\varphi(\omega)$ 的非增重排记为 $\varphi^*(t)$：

$$\varphi^*(t)=\inf\{\sigma,(m(\sigma,f)\leqslant t\},m(\sigma,f)=\mu\{\omega,f(\omega)>\sigma\}.$$

实值可测函数的 Lorentz 空间记为 $L_{ra}(0<r,a\leqslant\infty,r\neq\infty)$，它们是满足下面条件的 φ 的全体：

$$\|\varphi\|_{L_{ra}}=\left(\frac{a}{r}\int_0^\infty(t^{\frac{1}{r}}\varphi^*(t))^a\frac{dt}{t}\right)^{1/a}<\infty\quad(0<a<\infty)$$

$$\|\varphi\|_{L_{ra}}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{r}}\varphi^*(t)<\infty\qquad(a=\infty)$$

对于取值于 Banach 空间 X 的鞅，定义两类空间：

$${}_p\widetilde{H}_{ra}(X)=\{f=(f_n),\|f\|_{{}_p\widetilde{H}_{ra}(X)}=\|S^{(p)}(f)\|_{Lra}<\infty\},$$

$$H_{ra}(X)=\{f=(f_n),\|f\|_{H_{ra}(X)}=\|Mf\|_{Lra}<\infty\}.$$

特别地，${}_p\widetilde{H}_{aa}(X)$ 即 ${}_p\widetilde{H}_a(X)$，$H_{aa}(X)$ 即 $H_a(X)$.

对于相容的 Banach 空间对 X_0,X_1，象通常一样，记 $x\in X_0+X_1$的 K 泛函为

$$K(t,x)=K(t,x,X_0,X_1)=\inf_{x=x_0+x_1}\{\|x_0\|_{X_0}+t\|x_1\|_{X_1}\},$$

其中 $x_0\in X_0,x_1\in X_1,X_0,X_1$ 的内插空间记为 $(X_0,X_1)_{\theta a}$，它是由满足下述条件的如上元素 x 构成的：

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta a}}=\left(\int_0^\infty(t^{-\theta}K(t,x))^a\frac{dt}{t}\right)^{1/a}<\infty,$$

$$(0<\theta<1\leqslant a<\infty)$$

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta a}}=\sup_{t>0}t^{-\theta}K(t,x)<\infty,\ (0<\theta<1,a=\infty).$$

我们来讨论上述两类鞅空间的内插，首先需要对 K 泛函作出估计.

引理 设 $0<a<\infty,1<p<\infty$，则存在 $c_a>0$ 使得对于任何正规鞅 f，

(i) 若 $K(t,f)=\inf_{f=f_0+f_1}\{\|f_0\|_{{}_p\widetilde{H}_a(X)}+t\|f_1\|_{{}_p\widetilde{H}_\infty(X)}\}$，则

$$C_a^{-1}\int_0^{t^a}S^{(p)}(f)^{*a}(\tau)d\tau\leqslant K(t,f)^a\leqslant C_a\int_0^{dt^a}S^{(p)}(f)^{*a}(\tau)d\tau.\tag{8.16}$$

(ii) 若 $K(t,f)=\inf_{f=f_0+f_1}\{\|f_0\|_{H_a(X)}+t\|f_1\|_{H_\infty(X)}\}$，则

$$C_a^{-1}\int_0^{t^a}(Mf)^{*a}(\tau)d\tau \leqslant K(t,f)^a \leqslant C_a\int_0^{dt^a}(Mf)^{*a}(\tau)d\tau. \tag{8.17}$$

这里常数 $d\geqslant 1$ 是由鞅的正规性条件确定的，$S^{(p)}(f)^*$ 与 $(Mf)^*$ 分别代表 $S^{(p)}(f)$ 与 Mf 的非增重排函数.

证明 (ii)的证明与(i)类似，这里仅证(i). 对于任何 $f=f_0+f_1\in {}_p\widetilde{H}_a(X)+{}_p\widetilde{H}_\infty(X)$，其中 $f_0=(f_{0n})$，$f_1=(f_{1n})$，由于

$$S^{(p)}(f)\leqslant S^{(p)}(f_0)+S^{(p)}(f_1), \qquad a.e.$$

$$S^{(p)}(f)^*\leqslant S^{(p)}(f_0)^*+\|S^{(p)}(f_1)\|_\infty, \qquad a.e.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^{t^a}S^{(p)}(f)^{*a}(\tau)d\tau &\leqslant \int_0^{t^a}(S^{(p)}(f_0)^*+\|S^{(p)}(f_1)\|_\infty)^a(\tau)d\tau\\ &\leqslant C_a\left(\int_0^{t^a}S^{(p)}(f_0)^{*a}(\tau)d\tau+t^a\|S^{(p)}(f_1)\|_\infty^a\right)\\ &\leqslant C_a(\|f_0\|^a_{{}_p\widetilde{H}_a(X)}+t^a\|S^{(p)}(f_1)\|_\infty^a)\\ &\leqslant C_a(\|f_0\|_{{}_p\widetilde{H}_a(X)}+t\|f_1\|_{{}_p\widetilde{H}_\infty(X)})^a\end{aligned}$$

其中的 $C_a=1$，若 $0<a<1$；$C_a=2^{a-1}$，若 $1\leqslant a<\infty$. 关于 f_0,f_1 取下确界即得到(1)的右端.

反过来，对于 $f\in {}_p\widetilde{H}_a(X)+{}_p\widetilde{H}_\infty(X)$，取停时 τ(由于正规性)使得

$$S_\tau^{(p)}(f)\leqslant\lambda,\ P(\tau<\infty)\leqslant dP(S^{(p)}(f)>\lambda),$$

其中 $\lambda=S^{(p)}(f)^*(t^a)$，考虑 f 的如下分解 f_0+f_1，其中 $f_0=(f_n-f_{\tau\wedge n})$，$f_1=(f_{\tau\wedge n})$，注意

$$S_\tau^{(p)}(f_0)|_{\tau=\infty}=S^{(p)}(f)-S_\tau^{(p)}(f)|_{\tau=\infty}=0,$$

$$P(\tau<\infty)\leqslant dP(S^{(p)}(f)>S^{(p)}(f)^*(t^p))<dt^a.$$

于是

$$\begin{aligned}K(t,f)^a &\leqslant C_a(\|f_0\|^a_{{}_p\widetilde{H}_a(X)}+t^a\|f_1\|^a_{{}_p\widetilde{H}_\infty(X)}\\ &=C_a\left(\int_{\{\tau<\infty\}}S^{(p)}(f_0)^a dP+t^a\lambda^a\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant C_a\left(\int_{\{\tau<\infty\}} S^{(p)}(f)^a dP + \int_{\{\tau<\infty\}} S^{(p)}(f_1)^a dP + t^a\lambda^a\right)$$

$$\leqslant C_a\left(\int_0^{dt^a} S^{(p)}(f)^{*a}(\tau)d\tau + \lambda^a P(\tau<\infty) + t^a\lambda^a\right)$$

$$\leqslant C_a\left(\int_0^{dt^a} S^{(p)}(f)^{*a}(\tau)d\tau + (d+1)t^a S^{(p)}(f)^{*a}(t^a)\right)$$

$$= C_a\int_0^{dt^a} S^{(p)}(f)^{*a}(\tau)d\tau.$$

此即(8.6)的右端.

定理 3 设 $0<a,b\leqslant\infty, a\neq\infty, 0<\theta<1, r=\frac{a}{1-\theta}, 1<p<\infty$,则

$$({}_p\widetilde{H}_a(X), {}_p\widetilde{H}_\infty(X))_{\theta b} = {}_p\widetilde{H}_{rb}(X), \tag{8.18}$$

$$(H_a(X), H_\infty(X))_{\theta b} = H_{rb}(X). \tag{8.19}$$

证明 这里仅证(8.18),类似地可证明(8.19).

对于 $f\in {}_p\widetilde{H}_a(X)+{}_p\widetilde{H}_\infty(X)$和 $b<\infty$,由(8.16)的左端得出

$$S^{(p)}(f)^*(t^a) \leqslant \left(t^{-a}\int_0^{t^a} S^{(p)}(f)^{*a}(\tau)d\tau\right)^{1/a} \leqslant C_a t^{-1}K(t,f). \tag{8.20}$$

从而

$$\| S^{(p)}(f)\|_{L_{rb}}^b = \frac{b}{r}\int_0^\infty (t^{\frac{1}{r}}S^{(p)}(f)^*(t))^b\frac{dt}{t}$$

$$= C_{ra}\int_0^\infty (t^{a/r}S^{(p)}(f)^*(t^a))^b\frac{dt}{t}$$

$$\leqslant C_{ra}\int_0^\infty t^{a/r-1}K(t,f)^b\frac{dt}{t}$$

$$= C_{ra}\| f\|_{({}_p\widetilde{H}_a(X), {}_p\widetilde{H}_\infty(X))_{\theta b}}^b$$

若 $b=\infty$,应用(8.20)

$$\| S^{(p)}(f)\|_{L_{r\infty}} = \sup_{t>0} t^{1/r}S^{(p)}(f)^*(t) = \sup_{t>0} t^{a/r}S^{(p)}(f)^*(t^a)$$

$$\leqslant C_a\sup_{t>0} t^{a/r}K(t,f) = C_a\| f\|_{({}_p\widetilde{H}_a(X), {}_p\widetilde{H}_\infty(X))_{\theta\infty}}.$$

这说明 $(({}_p\widetilde{H}_a(X), {}_p\widetilde{H}_\infty(X))_{\theta b} \subset {}_p\widetilde{H}_{rb}(X)$ 并且嵌入是连续的.

反过来,若 $b<\infty$,应用 (8.16) 右端的不等式

$$\begin{aligned}
\|f\|^b_{({}_p\widetilde{H}_a(X),{}_p\widetilde{H}_\infty(X))_{\theta b}} &= \int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,f))^b \frac{dt}{t} \\
&\leqslant C_a \int_0^\infty (t^{-\theta b}\left(\int_0^{dt^a} S^{(p)}(f)^{*a}(\tau)d\tau\right)^{b/a} \frac{dt}{t} \\
&\leqslant C_{\theta a} \int_0^\infty (t^{(1-\theta)b/a}\left(\frac{1}{t}\int_0^t S^{(p)}(f)^{*a}(\tau)d\tau\right)^{b/a} \frac{dt}{t} \\
&\leqslant C_{\theta a} \int_0^\infty (t^{(1-\theta)b/a} S^{(p)}(f)^{*b}(t) \frac{dt}{t} \\
&= C_{\theta a} \| S^{(p)}(f)\|^b_{L_{rb}},
\end{aligned}$$

其中倒数第二步用到了通常的 Hardy 不等式,对于 $b=\infty$,类似地

$$\begin{aligned}
\|f\|^b_{({}_p\widetilde{H}_a(X),{}_p\widetilde{H}_\infty(X))_{\theta\infty}} &= \sup_{t>0} t^{-\theta}K(t,f) \\
&\leqslant C_a \sup_{t>0} t^{-\theta}\left(\int_0^{dt^a} S^{(p)}(f)^{*a}(\tau)d\tau\right)^{1/a} \\
&\leqslant C_a \sup_{t>0} (t^{(1-\theta)/a} S^{(p)}(f)^*(t) t^{-\theta}\left(\int_0^{dt^a} \tau^{\theta-1}d\tau\right)^{1/a} \\
&= C_{\theta a} \| S^{(p)}(f)\|^b_{L_{r\infty}}.
\end{aligned}$$

总之有 ${}_p\widetilde{H}_{rb}(X) \subset ({}_p\widetilde{H}_a(X), {}_p\widetilde{H}_\infty(X))_{\theta b}$ 并且嵌入是连续的.

推论 2 设 $0<a_i, b_i\leqslant\infty, a_i\neq\infty, i=0,1, 0<\theta<1, 1<p<\infty$, $a_0\neq a_1, \dfrac{1}{a}=\dfrac{1-\theta}{a_0}+\dfrac{\theta}{a_1}, 1\leqslant b\leqslant\infty$,则

$$({}_p\widetilde{H}_{a_0b_0}(X), {}_p\widetilde{H}_{a_1b_1}(X))_{\theta b} = {}_p\widetilde{H}_{ab}(X), \tag{8.21}$$

$$(H_{a_0b_0}(X), H_{a_1b_1}(X))_{\theta b} = H_{ab}(X). \tag{8.22}$$

证明 取 $0<r<\min(a_0,a_1)$,令 $\theta_i=1-\dfrac{r}{a_i}$,则 $0<\theta_i<1, i=0,1$. $\theta_0\neq\theta_1$,由定理 3,

$$({}_p\widetilde{H}_{a_i}(X), {}_p\widetilde{H}_\infty(X))_{\theta_i b} = {}_p\widetilde{H}_{a_ib}(X),$$

$$(H_{a_i}(X), H_\infty(X))_{\theta_i b} = H_{a_ib}(X).$$

由一般内插空间的稳定性定理，取 $\delta=(1-\theta)\theta_0+\theta\theta_1$，则

$$
\begin{aligned}
&({}_p\widetilde{H}_{a_0b_0}(X),{}_p\widetilde{H}_{a_1b_1}(X))_{\theta b}\\
&\quad=(({}_p\widetilde{H}_r(X),{}_p\widetilde{H}_\infty(X)_{\theta_0b_0},({}_p\widetilde{H}_r(X),{}_p\widetilde{H}_\infty(X))_{\theta_1b_1})_{\theta b}\\
&\quad=({}_p\widetilde{H}_r(X),{}_p\widetilde{H}_r(X))_{\delta b}\\
&\quad={}_p\widetilde{H}_{ab}(X),
\end{aligned}
$$

此即(6)，同样地得到(7).

通过令 $a_i=b_i(i=0,1)$ 以及 $a=b$ 得到

推论 3 设 $0<a_i<\infty,i=0,1,0<\theta<1,a_0\neq a_1,\frac{1}{a}=\frac{1-\theta}{a_0}+\frac{\theta}{a_1},1<p<\infty$，则

$$({}_p\widetilde{H}_{a_0}(X),{}_p\widetilde{H}_{a_1}(X))_{\theta b}={}_p\widetilde{H}_{ab}(X), \tag{8.23}$$

$$(H_{a_0}(X),H_{a_1}(X))_{\theta b}=H_{ab}(X). \tag{8.24}$$

特别地

$$({}_p\widetilde{H}_{a_0}(X),{}_p\widetilde{H}_{a_1}(X))_{\theta a}={}_p\widetilde{H}_a(X), \tag{8.25}$$

$$(H_{a_0}(X),H_{a_1}(X))_{\theta a}=H_a(X). \tag{8.26}$$

定理 4 设 X 是 Banach 空间，$0<a,b<\infty$，则

(i) X 同构于 q 一致凸空间($2\leqslant q<\infty$) 当且仅当存在 $c=c_{q,a,b}<\infty$ 使得对于每个 X 值正规鞅 f，

$$\|f\|_{{}_p\widetilde{H}_{ab}(X)}\leqslant c\|f\|_{H_{ab}(X)}. \tag{8.27}$$

(ii) X 同构于 p 一致光滑空间 ($1<p\leqslant 2$) 当且仅当存在 $c=c_{p,a,b}>0$ 使得对于每个 X 值正规鞅 f，

$$\|f\|_{H_{ab}(X)}\leqslant c\|f\|_{{}_p\widetilde{H}_{ab}(X)}. \tag{8.28}$$

(iii) X 同构于 Hilbert 空间当且仅当存在 $c=c_{a,b}>0$ 使得对于任何 X 值正规鞅 f，

$$c^{-1}\|f\|_{H_{ab}(X)}\leqslant\|f\|_{{}_2\widetilde{H}_{ab}(X)}\leqslant c\|f\|_{H_{ab}(X)}. \tag{8.29}$$

证明 当 $a=b$ 时此定理即 § 2 中的定理. 若 $a\neq b$，容易选取 $\theta,a_0,a_1,a_0\neq a_1$ 使得(8.23)，(8.24)成立. 若 X 同构于 q 一致凸空

间，则存在 $C_{a_0}, C_{a_1} > 0$ 使得对于任何 X 值鞅 f，

$$\|f\|_{{}_q\widetilde{H}_{a_0}(X)} \leqslant C_{a_0} \|f\|_{H_{a_0}(X)}, \tag{8.30}$$

$$\|f\|_{{}_q\widetilde{H}_{a_1}(X)} \leqslant C_{a_1} \|f\|_{H_{a_1}(X)}, \tag{8.31}$$

此时

$$\begin{aligned} & K(t, f, {}_q\widetilde{H}_{a_0}(X), {}_q\widetilde{H}_{a_1}(X)) \\ & \quad = \inf_{f = f_0 + f_1} \{ \|f_0\|_{{}_q\widetilde{H}_{a_0}(X)} + t \|f_1\|_{{}_q\widetilde{H}_{a_1}(X)} \} \\ & \quad \leqslant C_{a_0} K(C_{a_1} t / C_{a_0}, f, H_{a_0}, f, H_{a_0}(X), H_{a_1}(X)). \end{aligned}$$

由此应用(8.23)，(8.24)得出

$$\begin{aligned} \|f\|_{{}_q\widetilde{H}_{ab}(X)} & \leqslant c \|f\|_{({}_q\widetilde{H}_{a_0}(X), {}_q\widetilde{H}_{a_1}(X))_{\theta b}} \\ & = c \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, f, {}_q\widetilde{H}_{a_0}(X), {}_q\widetilde{H}_{a_1}(X))^b \frac{dt}{t} \right)^{1/b} \\ & = c \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, f, H_{a_0}(X), H_{a_1}(X))^b \frac{dt}{t} \right)^{1/b} \\ & = c \|f\|_{(H_{a_0}(X), H_{a_1}(X))_{\theta b}} \\ & \leqslant c \|f\|_{H_{ab}(X)}. \end{aligned}$$

此即(8.27).

反过来，若(8.27)对于任何 X 值鞅 f 成立，这说明算子 T: $H_{ab}(X) \to {}_q\widetilde{H}_{ab}(X)$，$Tf = f$ 是有界的. 根据内插性质，特别地，T 在 $H_{a_0}(X)$ 上的限制是有界的. 此时对于任何 WP 鞅 $f = (f_n)$，若 $\|f\|_\infty = \sup\limits_n \|f_n\|_\infty < \infty$，则

$$\|Tf\|_{{}_q\widetilde{H}_{ab}(X)} = \left(\frac{b}{a} \int_0^\infty (t^{\frac{1}{a}} S^{(q)}(f)^*)^b \frac{dt}{t} \right)^{1/b} < \infty,$$

从而 $S^{(q)}(f) < \infty$ $a.e.$，X 同构于 q 一致凸空间. 以上证明了(i).

(ii) 的必要性的证明与(i)类似. 现证明当(8.28)成立时，X 必同构于 p 光滑空间. 设有 WP 鞅 $f = (f_n)$，满足 $\|S^{(p)}(f)\|_\infty < \infty$，考虑鞅 $f^{(n)} = (f_k - f_n)_{n < k < \infty}$，容易知道当 $n \to \infty$ 时 $S^{(p)}(f^{(n)}) = (S^{(p)}(f)^p - S_n^{(p)}(f)^p)^{1/p} \downarrow 0$. 由于当 $r_1 \leqslant r_2$ 时 $L_{pr_1} \subset L_{pr_2}$，故

(8.28)说明

$$\sup_{t>0} t^{1/a}(\sup_{k\geq n}\|f_k-f_n\|)^* = \|(Mf^{(n)})^*\|_{L_{a}}$$
$$\leqslant C_a\|(Mf^{(n)*})^*\|_{L_{ab}} \leqslant c\|S^{(p)}(f^{(n)})^*\|_{L_{ab}}$$
$$\leqslant c\left(\frac{b}{a}\int_0^{2\|S^{(p)}(f)\|_\infty}(t^{\frac{1}{a}}S^{(p)}(f^{(n)})^*)^b\frac{dt}{t}\right)^{1/b}\to 0,$$

这说明当 $n\to\infty$ 时，$\sup\limits_{k\geq n}\|f_k-f_n\|$ 依概率收敛于 0，从而 f_n $a.e.$ 收敛，X 必同构于 p 一致光滑空间.

由(i)和(ii)，应用 Kwapien 定理得到(iii).

现在我们转到内插空间的凸性和光滑性.

定理 5 设 X_0,X_1 是相容的 Banach 空间对，$0<\theta<1$，$1<a_0$，$a_1<\infty$，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1-\theta}{a_0}+\dfrac{\theta}{a_1}$，则

$$\widetilde{H}_a((X_0,X_1)_{\theta a}) = (\widetilde{H}_{a_0}(X_0),\widetilde{H}_{a_1}(X_1))_{\theta a} \tag{8.32}$$

$$H_a((X_0,X_1)_{\theta a}) = (H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1))_{\theta a} \tag{8.33}$$

证明 为了证明(8.32)，首先根据 Lions-Peetre 内插定理，对于相容的 Banach 空间对 X_0,X_1，在等价范数意义下 $(L_{a_0}(X_0),L_{a_1}(X_1))_{\theta a}=L_a((X_0,X_1)_{\theta a})$. 同样地在序列情况 $(l_{a_0}(X_0),l_{a_1}(X_1))_{\theta a}=l_a((X_0,X_1)_{\theta a})$. 从而不难得出对于定理中的 X_0,X_1 和 θ,a,a_0,a_1，在等价范数意义下

$$(L_{a_0}(l_{a_0}(X_0)),L_{a_1}(L_{a_1}(X_1)))_{\theta a}=L_a(l_a((X_0,X_1)_{\theta a})), \tag{8.34}$$

其中 $L_a(l_a(X))$ 中的元素 $\xi=(\xi_0,\xi_1,\cdots\cdots)$ 的范数是

$$\|\xi\|_{L_a(l_a(X))} = \left[E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|\xi_n\|_X^a\right)\right]^{1/a}.$$

其次我们将看到对于每个鞅 $f=(f_n)\in\widetilde{H}_{a_0}(X_0)+\widetilde{H}_{a_1}(X_1)$，若相应的鞅差序列为 $df=(df_n)$，则

$$K(t,df,L_{a_0}(l_{a_0}(X_0)),\ L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)))$$
$$\sim K(t,f,\widetilde{H}_{a_0}(X_0),\ (\widetilde{H}_{a_1}(X_1))). \tag{8.35}$$

实际上其中的一半是明显的，即由于映射 T：$\widetilde{H}_{a_0}(X_0)\to L_{a_0}(l_{a_0}$

$(X_0))$ $(Tf=df)$ 是等距嵌入，$T:\widetilde{H}_{a_1}(X_1)\to L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))$ 也是等距嵌入，此外每个鞅差序列的分解也是一个可测函数序列的分解，故

$$
\begin{aligned}
& K(t,df,L_{a_0}(l_{a_0}(X_0)),L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))) \\
& \quad = \inf_{df=df_1+df_2}\{\|df_0\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}+t\|df_1\|_{L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))}\} \\
& \quad \leqslant \inf_{df=df_1+df_2}\{\|f_0\|_{\widetilde{H}_{a_0}(X_0)}+t\|f_1\|_{\widetilde{H}_{a_1}(X_1)}\} \\
& \quad = K(t,f,\widetilde{H}_{a_0}(X_0),\widetilde{H}_{a_1}(X_1)).
\end{aligned}
$$

为了证明另一方面的不等式，注意对于 df 的任一可测函数序列的分解 $df=d\widetilde{f}_0+d\widetilde{f}_1$，其中 $d\widetilde{f}_0=(d\widetilde{f}_{0n})$，$d\widetilde{f}_1=(d\widetilde{f}_{1n})$，自然地有一个鞅差序列分解

$$
\begin{aligned}
df_n &= d\widetilde{f}_{0n}-E(d\widetilde{f}_{0n}\,|\,\mathscr{B}_{n-1})+d\widetilde{f}_{1n}-E(d\widetilde{f}_{1n}\,|\,\mathscr{B}_{n-1}) \\
&= df_{0n}+df_{1n},
\end{aligned}
$$

这里 $(df_{0n})=df_0$，$(df_{1n})=df_1$ 均为鞅差序列. 此外

$$
\begin{aligned}
& \|d\widetilde{f}_0-df_0\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))} \\
& \quad = \left(E\sum_{n=0}^{\infty}\|E(d\widetilde{f}_{0n}\,|\,\mathscr{B}_{n-1})\|^{a_0}\right)^{1/a_0}\leqslant \|d\widetilde{f}_0\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}
\end{aligned}
$$

从而与 df_0 相应的鞅 f_0 满足

$$
\|f_0\|_{\widetilde{H}_{a_0}(X_0)}=\|df_0\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}\leqslant\|2d\widetilde{f}_0\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}
$$

同样地对于 df_1 以及相应的鞅 f_1，

$$
\|f_1\|_{\widetilde{H}_{a_1}(X_1)}=\|df_1\|_{L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))}\leqslant\|2d\widetilde{f}_1\|_{L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))}
$$

由此得出

$$
\begin{aligned}
& K(t,f,\widetilde{H}_{a_0}(X_0),\widetilde{H}_{a_1}(X_1)) \\
& \quad = \inf_{f=f_0+f_1}\{\|f_0\|_{\widetilde{H}_{a_0}(X_0)}+t\|f_1\|_{\widetilde{H}_{a_1}(X_1)}\} \\
& \quad = \inf_{df=df_0+df_1}\{\|df_0\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}+t\|df_1\|_{L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))}\} \\
& \quad \leqslant 2\inf_{df=d\widetilde{f}_0+d\widetilde{f}_1}\{\|d\widetilde{f}_0\|_{L_{a_0}(l_{a_0}(X_0))}+t\|d\widetilde{f}_1\|_{L_{a_1}(l_{a_1}(X_1))}\}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant 2K(t,df,L_{a_0}(l_{a_0}(X_0)),L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)),$$

所以(8.35)成立.

现在对于 $f\in \widetilde{H}_{a_0}(X_0)+\widetilde{H}_{a_1}(X_1)$,我们有

$$\begin{aligned}
\| f \|_{\widetilde{H}_a((X_0,X_1)_{\theta a})} &= \| df \|_{L_a(l_a(X_0,X_1)_{\theta a})} \\
&\leqslant C_a \| df \|_{(L_a(l_a(X_0)),L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)))_{\theta a}} \\
&= C_a\left(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,df,L_{a_0}(l_{a_0}(X_0)),L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)))^a \frac{dt}{t}\right)^{1/a} \\
&\leqslant C_a\left(\int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,df,\widetilde{H}_{a_0}(X_0)),\widetilde{H}_{a_1}(X_1)))^a \frac{dt}{t}\right)^{1/a} \\
&= C_a \| f \|_{(\widetilde{H}_{a_0}(X_0),\widetilde{H}_{a_1}(X_1))_{\theta a}}.
\end{aligned}$$

反过来对于每个 $f\in \widetilde{H}_a((X_0,X_1)_{\theta a})$,则相应地 $df\in L_a(l_a(X_0,X_1)_{\theta a}))=(L_{a_0}(l_{a_0}(X_0)),L_{a_1}(l_{a_1}(X_1)))_{\theta a}$,由上述方法可得到 f 的分解 $f_0+f_1\in \widetilde{H}_{a_0}(X_0)+\widetilde{H}_{a_1}(X_1)$,在估计 $\| f \|_{(\widetilde{H}_{a_0}(X_0),\widetilde{H}_{a_1}(X_1))_{\theta a}}$ 时上述不等式的每一步都是可逆的,故(8.32)成立.

为证(8.33),设 $f\in (H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1))_{\theta a}$,对于任何 n,若 $f^{(n)}$ 是相应的停止于 n 的鞅,先根据关于鞅的 Doob 不等式,再应用 Lions-Peetre 内插定理得到

$$\begin{aligned}
\| f^{(n)} \|^p_{H_a((X_0,X_1)_{\theta a})} &\leqslant C_a \| f_n \|^p_{L_a((X_0,X_1)_{\theta a})} \\
&\leqslant C_a \| f_n \|^a_{(L_{a_0}(X_0),L_{a_1}(X_1)_{\theta a})} \\
&= C_a \int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,f_n,L_{a_0}(X_0),L_{a_1}(X_1)))^a \frac{dt}{t} \\
&\leqslant C_a \int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,f^{(n)},H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1))^a \frac{dt}{t} \\
&= C_a \| f^{(n)} \|_{(H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1))_{\theta a}}.
\end{aligned}$$

其中用到明显的不等式

$$K(t,f_n,L_{a_0}(X_0),L_{a_1}(X_1)) \leqslant K(t,f^{(n)},H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1)),$$

由于 n 是任意的,从而得到 $(H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1))_{\theta a}\subset H_a((X_0,X_1)_{\theta a})$ 并且嵌入是连续的.

反过来，若 $f=(f_n)\in H_a((X_0,X_1)_{\theta a})$，$f^{(n)}$是相应的停止于 n 的鞅，则当 $f^{(n)}=f_0^{(n)}+f_1^{(n)}$ 时，

$$\| f_0^{(n)} \|_{H_{a_0}(X_0)} \leqslant a'_0 \| f_{0n}^{(n)} \|_{L_{a_0}(X_0)},$$

$$\| f_1^{(n)} \|_{H_{a_1}(X_1)} \leqslant a'_1 \| f_{1n}^{(n)} \|_{L_{a_1}(X_1)},$$

从而

$$\| f_0^{(n)} \|_{H_{a_0}(X_0)} + t \| f_1^{(n)} \|_{H_{a_1}(X_1)}$$
$$\leqslant a'_0 \| f_{0n} \|_{L_{a_0}(X_0)} + ta'_0 \| f_{1n} \|_{L_{a_1}(X_1)}.$$

另一方面，对于每个函数分解 $f_n=\tilde{f}_{0n}+\tilde{f}_{1n}\in L_{a_0}(X_0)+L_{a_1}(X_1)$，考虑鞅分解 $f^{(n)}=f_0^{(n)}+f_1^{(n)}$，其中

$$f_0^{(n)} = (f_{0i})_{0\leqslant i\leqslant n} = (E(\tilde{f}_{0n}|\mathscr{F}_i))_{0\leqslant i\leqslant n},$$

$$f_1^{(n)} = (f_{1i})_{0\leqslant i\leqslant n} = (E(\tilde{f}_{1n}|\mathscr{F}_i))_{0\leqslant i\leqslant n},$$

显然，$f_0^{(n)}+f_1^{(n)}\in H_{a_0}(X_0)+H_{a_1}(X_1)$ 并且由前面得出的不等式

$$\begin{aligned}
&K(t,f^{(n)},H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1))\\
&= \inf_{f^{(n)}=f_0^{(n)}+f_1^{(n)}} \{ \| f_0^{(n)} \|_{H_{a_0}(X_0)} + t \| f_1^{(n)} \|_{H_{a_1}(X_1)} \}\\
&\leqslant \inf_{f^{(n)}=f_0^{(n)}+f_1^{(n)}} \{a'_0 \| f_{0n} \|_{L_{a_0}(X_0)} + ta'_1 \| f_{1n} \|_{L_{a_1}(X_1)} \}\\
&\leqslant \inf_{f^{(n)}=\tilde{f}_0^{(n)}+\tilde{f}_1^{(n)}} \{a'_0 \| \tilde{f}_{0n} \|_{L_{a_0}(X_0)} + ta'_1 \| f_{1n} \|_{L_{a_1}(X_1)} \}\\
&= a'_0 K(a'^{-1}_0 a'_1 t, f_n, L_{a_0}(X_0), L_{a_1}(X_1)).
\end{aligned}$$

应用 Lions-Peetre 内插定理得到

$$\begin{aligned}
&\| f^{(n)} \|^p_{(H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1))_{\theta a}}\\
&= \int_0^\infty (t^{-\theta} K(t,f^{(n)},(H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1))^a \frac{dt}{t}\\
&\leqslant C_a \int_0^\infty (t^{-\theta} K(a'^{-1}_0 a'_1 t, f^{(n)}, L_{a_0}(X_0), L_{a_1}(X_1))^a \frac{dt}{t}\\
&= C_a \| f_n \|_{(L_{a_0}(X_0),L_{a_1}(X_1))_{\theta a}}\\
&\leqslant C_a \| f_n \|_{L_a((X_0,X_1)_{\theta a})}
\end{aligned}$$

$$\leqslant C_a \| f^{(n)} \|_{H_a((X_0,X_1)_{\theta a})}.$$

这说明 $H_a((X_0,X_1)_{\theta a})\subset(H_{a_0}(X_0),H_{a_1}(X_1))_{\theta a}$并且嵌入是连续的,定理得证.

定理 6 设 X_0,X_1 是相容的 Banach 空间对.

(i) 若 X_i 分别同构于 p_i 一致光滑空间,$i=0,1,1<p_0,p_1\leqslant 2,0<\theta<1,\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$,则 $(X_0,X_1)_{\theta p}$同构于 p 一致光滑空间.

(ii) 若 X_i 分别同构于 q_i 一致光滑空间,$i=0,1,2\leqslant q_0,q_1<\infty,0<\theta<1,\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}$,则 $(X_0,X_1)_{\theta q}$同构于 q 一致凸空间.

证明 以明显的方式定义线性算子

$$T:H_{p_i}(X_i)\to\widetilde{H}_{p_i}(X_i),\qquad i=0,1,$$

$$S:\widetilde{H}_{p_i}(X_i)\to H_{p_i}(X_i),\qquad i=0,1,$$

$(Tf=f,Sf=f)$,在§2 中我们已证明:在(i)的情况 T 是有界的,在(ii)的情况 S 是有界的.根据 Marcinkiewicz 定理,在(i)的情况 T 是$(H_{p_0}(X_0),H_{p_1}(X_1))_{\theta p}\to(\widetilde{H}_{p_0}(X_0),\widetilde{H}_{p_1}(X_1))_{\theta p}$有界的,在(ii)的情况 S 是$(\widetilde{H}_{p_0}(X_0),\widetilde{H}_{p_1}(X_1))_{\theta p}\to H_{p_0}(X_0),H_{p_1}(X_1))_{\theta p}$有界的.根据定理 5,前者是 $H_p((X_0,X_1)_{\theta p})\to\widetilde{H}_p(X_0,X_1)_{\theta p})$有界的,后者是 $\widetilde{H}_p(X_0,X_1)_{\theta p})\to H_p(X_0,X_1)_{\theta p})$ 有界的.最后由定理 4 分别得到在(i)的情况$(X_0,X_1)_{\theta p}$同构于 p 一致光滑空间,在(ii)的情况$(X_0,X_1)_{\theta p}$同构于 q 一致凸空间.

Ⅸ. UMD 空间及其应用

有几种不同背景的问题牵动着本世纪早期的数学研究，它们都与本章的内容有关. 例如共轭函数的有界性问题. 设有三角多项式

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

称

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin k\theta - b_k \cos k\theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

是 f 的共轭函数. 考虑 f 与 g 的 L_p 范数，是否存在常数 c，允许 c 与 p 有关而与 f, g, n 无关，使得

$$\| g \|_p \leqslant c_p \| f \|_p \quad (1 \leqslant p < \infty) \tag{0.1}$$

当 $p = 2$ 时容易用三角级数的正交性得到此不等式，而 M. Riesz 证明了 $1 < p < \infty$ 时 c_p 存在(有限).

其次是 L_p 空间上的 Hilbert 交换. 这一问题不仅与 Fourier 分析有关而且联系着微分方程的基本解. 对于 $\varepsilon > 0$，考虑截断函数

$$H_\varepsilon f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{|s| > \varepsilon} \frac{f(t-s)}{s} ds,$$

何时 $\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(t)$ $a.e.$ 存在？记其极限为 $Hf(t)$，何时有 $c_p > 0$ 使得

$$\| Hf \|_p \leqslant c_p \| f \|_p, \forall f \in L_p \tag{0.2}$$

M. Riesz 等证明了前一个问题对于 $1 \leqslant p < \infty$ 有肯定答案，后一问题对于 $1 < p < \infty$ 有肯定答案. 之后 Calderon, Zygmund 将它推广到 n 维空间并且对于十分广泛的带核奇异积分算子给出了类似的解答.

再看较近的关于鞅变换的情况. 对于鞅 $f = \sum_{i=1}^{n} df_i$ 及其变换

$g_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i df_i$(这里 ε_i 是取 +1 或 −1 的常数),是否有与 f, g, n 无关的常数 c_p 使得

$$\| g \|_p \leqslant c_p \| f \|_p \qquad (0.3)$$

Burkholder 首先证明了对于 $1 < p < \infty$,c_p 存在.

以上是实值(或复值)的情况.

向量值情况很早就引起人们的注意,即什么样的 Banach 空间 X 能使在其中取值的三角多项式,或 Hilbert 变换,或鞅变换满足相应的不等式?但首先 Bochner,Taylor 等发现当三角多项式的系数 a_k, b_k 换为 l_1 或 l_∞ 的元素时,(0,1) 不再成立. Maurey 指出要使任何取值于 Banach 空间 X 的鞅满足(0.3),X 必须是超自反空间. 不久 Pisier 又举出例子说明反过来的结论并不成立. 即超自反空间不能保证在其中取值的鞅满足(0.3). Burkholder 系统地研究了 B 值鞅的上述变换,发现了它与乘积空间 $X \times X$ 上定义的某种双凸函数的相互关系,并且与 Bourgain 等证明了(0.1),(0.2),(0.3)确定的是同一类的 Banach 空间,即 UMD 空间.

本章将先从鞅变换谈起,建立好鞅变换性质,UMD 性质与 ξ 凸性的等价关系,研究 UMD 空间的若干特征,在 UMD 空间取值的鞅变换的大数定律,最后转到奇异积分算子以及经典调和分析和经典鞅论中不等式的最优系数.

nach 空间既可以是实的也可以是复的.

§1 好鞅变换性质

对于鞅 $f = (f_n, n \geqslant 0)(f_{-1} = 0, \mathscr{B}_{-1} = \{\varnothing, \Omega\})$ 和实值可料序列 $v = (v_n)$,记 $g = (g_n)$ 是 f 经过 v 的变换,

$$g_n = \sum_{i=0}^{n} v_i df_i \quad (n \geqslant 0, g_{-1} = 0). \qquad (1.1)$$

我们知道 g 未必是一个鞅. g 是一个鞅要求 $E\| g_n \| < \infty$.

先来看一下实值鞅变换的 $a.e.$ 收敛问题.

定理 1(Burkholder)　设 $f=(f_n)$ 是 L_1 有界实值鞅，$v=(v_n)$ 是可料 $R.V.$ 序列，$v^*<\infty\ a.e.$，$g=(g_n)$ 是 f 经过 v 的变换，则 $g_n\ a.e.$ 收敛.

证明　1°　首先考虑 $\|f\|_2<\infty, v^*\leqslant 1\ a.e.$ 的情况. 由鞅差序列的正交性，

$$Eg_n^2=E|\sum_{i=0}^{n}dg_i|^2=\sum_{i=0}^{n}E|v_idf_i|^2\leqslant\sum_{i=0}^{n}E|df_i|^2=Ef_n^2$$

从而 $\|g\|_2\leqslant\|f\|_2<\infty$，$g_n\ a.e.$ 收敛.

2°　对于 $f^*<\infty\ a.e.$，$v^*\leqslant 1\ a.e.$，$Ed^*(f)^2<\infty$ 的情况. 定义停时 $\tau=\inf\{n,|f_n|>\lambda\}$，$\lambda>0$. 此时 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n})$，$g^{(\tau)}=(g_{\tau\wedge n})$，由

$$dg_{\tau\wedge n}=dg_n\chi_{\{\tau\geqslant n\}}=v_ndf_n\chi_{\{\tau\geqslant n\}}=v_ndf_{\tau\wedge n},$$

$g^{(\tau)}$ 仍是 $f^{(\tau)}$ 关于 $v=(v_n)$ 的变换并且

$$\begin{aligned}\|f^{(\tau)}\|_2^2&=\sup_n E|f_{\tau\wedge n}|^2\leqslant E(\lambda+d^*(f))^2\\&\leqslant 2(\lambda^2+Ed^*(f)^2)<\infty,\end{aligned}$$

由 1°，$g_{\tau\wedge n}\ a.e.$ 收敛. 即在 $\{\tau=\infty\}=\{f^*\leqslant\lambda\}$ 上，$g_n\ a.e.$ 收敛. λ 可任意大，$f^*<\infty\ a.e.$，故 $g_n\ a.e.$ 收敛.

3°　现在设 $\|f\|_1<\infty$，$v^*\leqslant 1\ a.e.$，此时 $f_n\ a.e.$ 收敛故 $f^*<\infty\ a.e.$ 并且 $df_n\to 0\ a.e.$ 记 $A_{n_0}=\{\omega,\sup_{n\geqslant n_0}|df_n|<1\}$. 当 n_0 足够大时 $P(A_{n_0})$ 可充分接近 1. 考虑鞅 $\tilde{f}=(\tilde{f}_n)$，$\tilde{f}_n=f_n\chi_{A_{n_0}}(n\geqslant n_0)$. 则 $\tilde{f}$ 是鞅并且 $\tilde{f}<\infty\ a.e.$，$d^*(f)\leqslant 2$，$Ed^*(\tilde{f})^2<\infty$. 若 $\tilde{g}=(\tilde{g}_n)$ 是 $\tilde{f}$ 经过 v 的变换，由 2°，$\tilde{g}_n\ a.e.$ 收敛. 但 $\tilde{g}_n=\sum_{i=n_0}^{n}v_id\tilde{f}_i=\sum_{i=n_0}^{n}v_idf_i\chi_{A_{n_0}}=(g_n-g_{n_0-1})\chi_{A_{n_0}}$，所以在 A_{n_0} 上，$g_n\ a.e.$ 收敛. 最终有 $g_n\ a.e.$ 收敛.

4°　最后考虑 $\|f\|_1<\infty$，$v^*<\infty\ a.e.$ 的情况. 注意以上结

论对于 $v^* \leqslant k$ $a.e.$ 的情况仍成立，这里 k 是任一正数. 现在令 $v_n^{(k)} = v_n \wedge k$，若 $g^{(k)}$ 是 f 经过 $(v_n^{(k)})$ 的变换，则 $g_n^{(k)}$ $a.e.$ 收敛，即 g_n 在 $\{v^* \leqslant k\}$ 上 $a.e.$ 收敛. k 可任意大，得出 g_n 在 $\{v^* < \infty\}$ 上 $a.e.$ 收敛.

下面例子表明 L_1 有界鞅的变换可以不是 L_1 有界的.

例 1 $\Omega = N$ 是全体自然数的集合，Σ 是 Ω 的全体子集构成的 σ 代数，$P(\{k\}) = \dfrac{1}{k(k+1)}$. (Ω, Σ, P) 是概率空间. 定义

$$f_n(k) = \begin{cases} -1, & k \leqslant n, \\ n, & k > n, \end{cases}$$

$(n \geqslant 1)$. 则 $f = (f_n)$ 是关于 $\mathscr{B}_n = \sigma(f_1, \cdots, f_n)$ 的鞅并且

$$\|f_n\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_n(k)| P(\{k\}) = \sum_{k=1}^{n} P(\{k\}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(\{k\})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \leqslant 2.$$

若 $v = (v_n)$，其中 $v_n = (-1)^{n+1}$，$g = (g_n)$ 是 f 经过 v 的变换，则实际计算知道 $\|g_n\|_1 \geqslant \log[\frac{n}{2}] (n \geqslant 2)$，故 $\sup\limits_{n \geqslant 1} \|g_n\|_1 = \infty$.

对于 Banach 空间 X，让我们以 $\mathscr{M}(X)$ 或 $\mathscr{M}$ 记三元素组 (f, v, g) 的全体，其中 f 是 X 值鞅，v 是实可料 $R.V.$ 序列，$v^* \leqslant 1$，g 是 f 经过 v 的变换. 允许基本概率空间和递增子 σ 代数序列不同.

下面定理的任一条成立时，都称 X 具有好鞅变换的性质.

定理 2(Burkholder) 对于任何 Banach 空间 X，以下条件等价：

(i) 每个 $(f, v, g) \in \mathscr{M}$，若 $\|f\|_1 < \infty$ 则 g_n $a.e.$ 收敛.

(ii) 存在 $c > 0$ 使得每个 $(f, v, g) \in \mathscr{M}$，若 $g^* > 1$ $a.e.$，则 $\|f\|_1 \geqslant c$.

(iii) 存在 $c > 0$ 使得每个 $(f, v, g) \in \mathscr{M}$ 满足

$$\lambda P(g^* > \lambda) \leqslant c \|f\|_1, \forall \lambda > 0. \qquad (1.2)$$

(iv) 对于任何(或某个) $1 < p < \infty$，存在 $c_p > 0$ 使得每个 $(f, v, g) \in \mathscr{M}$ 满足

$$\| g \|_p \leqslant c_p \| f \|_p \tag{1.3}$$

证明 (i)⇒(ii) 若(ii)不成立，则对于每个自然数 j，存在 $(f_j, v_j, g_j) \in \mathscr{M}$ 使得 $g_j^* > 1\ a.e.$. 但 $\| f_j \|_1 \leqslant 2^{-j}$. 不妨设基本概率空间是同一个并且与 $f_j = (f_{jn})$ 适应的 σ 代数列 $(\mathscr{B}_{jn}, n \geqslant 0)$ 满足 $\mathscr{B}_{j\infty} = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{B}_{jn}$ 相互独立($j \geqslant 1$). 我们假设 $f_{j0} = 0$.

由 $g_j^* > 1\ a.e.$，存在自然数 n_j 使得 $P(A_j) > \frac{1}{2}$，其中

$$A_j = \{\omega, |g_{jn}| > 1, \exists \text{ 某个 } n \leqslant n_j\}$$

令 $(\mathscr{B}_n, n \geqslant 0)$ 是这样的 σ 代数列：

$$\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}_{10}, \cdots, \mathscr{B}_{n_1-1} = \mathscr{B}_{1,n_1-1},$$

$$\mathscr{B}_{n_1} = \mathscr{B}_{1n_1} \vee \mathscr{B}_{20}, \cdots, \mathscr{B}_{n_1+n_2-1} = \mathscr{B}_{1n_1} \vee \mathscr{B}_{2n_2-1},$$

$$\mathscr{B}_{n_1+n_2} = \mathscr{B}_{1n_1} \vee \mathscr{B}_{2n_2} \vee \mathscr{B}_{30}, \cdots$$

考虑序列

$$D = (df_{11}, \cdots, df_{1n_1}, df_{21}, \cdots, df_{2n_2}, df_{31}, \cdots),$$

$$V = (v_{11}, \cdots, v_{1n_1}, v_{21}, \cdots, v_{2n_2}, v_{31}, \cdots),$$

由 $\mathscr{B}_{j\infty}$ 的独立性，D 是与 $(\mathscr{B}_n, n \geqslant 0)$ 适应的鞅差序列，记相应的鞅为 F. V 是可料 $R.V.$ 序列，$V^* \leqslant 1$. 若 $G = (G_n)$ 是 F 经过 V 的变换. 则

$$F_{n_1} + \cdots + F_{n_k} = \sum_{j=1}^{k} f_{jn_j},$$

$$\| F \|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \| f_{jn_j} \|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \leqslant 1,$$

但由于 A_j 相互独立并且 $\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \infty$，根据 Borel-Cantelli 引理，

$$\begin{aligned} P(G_n \text{ 发散}) &\geqslant P(\limsup_{m,n\to\infty} \| G_m - G_n \| > 1) \\ &\geqslant P(\limsup_{j\to\infty} A_j) = 1, \end{aligned}$$

与(i)矛盾.

(ii)⇒(iii) 我们将证明，对于每个固定的 n，就(ii)中的 c 有

$$cP(g_n^* > 2) \leqslant \|f\|_1 \tag{1.4}$$

倘如此，令 $n \to \infty$ 得出 $cP(g^* > 2) \leqslant \|f\|_1$. 对任何 $\lambda > 0$ 以 $(\frac{2f}{\lambda}, v, \frac{2g}{\lambda})$ 代替 (f, v, g) 便得出 $\lambda P(g^* > \lambda) \leqslant \frac{2}{c}\|f\|$，这就是 (1.2).（以 $\frac{2}{c}$ 为常系数.）

若(1.4)左端不为0，作 (f, v, g) 的独立 copy 序列 (f_j, v_j, g_j). 令

$$D = (df_{11}, \cdots, df_{1n}, u_1 df_{21}, \cdots, u_1 df_{2n}, u_1 u_2 df_{31}, \cdots),$$

$$V = (v_{11}, \cdots, v_{1n}, v_{21}, \cdots, v_{2n}, v_{31}, \cdots).$$

这里 $u_j = \chi_{(g_{jn}^* \leqslant 2)}$，记与 D 相应的鞅是 F，则

$$F_{kn} = f_{1n} + u_1 f_{2n} + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_{k-1} f_{kn}$$

并且由独立性

$$\|F\|_1 \leqslant \|f\|_1 E(1 + u_1 + \cdots + u_1 \cdots u_{k-1} + \cdots)$$

$$= \|f\|_1 (1 - Eu_1)^{-1} = \|f\|_1 / P(g_n^* > 2).$$

由于 $G^* > 1$ $a.e.$，由(ii)知 $\|F\|_1 \geqslant c$，从而得到(1.4).

(iii)⇒(iv)　设(1.2)对于每个 $(f, v, g) \in \mathscr{M}$ 成立. 若 $W = (W_n)$ 是 $(\|df_n\|, n \geqslant 1)$ 的递增可料强函数序列. 对于 $\delta > 0, \beta > \delta + 1, \lambda > 0$ 定义

$$\mu = \inf\{n, \|g_n(\omega)\| > \lambda\}$$

$$\nu = \inf\{n, \|g_n(\omega)\| > \beta\lambda\}$$

$$\sigma = \inf\{n, \|f_n(\omega)\| \vee W_{n+1}(\omega) > \delta\lambda\}$$

设 $A_k = \{\mu < k \leqslant \nu \wedge \sigma\}$，$u_k = \chi_{A_k}$，则 $u = (u_n)$ 是可料序列. 我们已经不止一次用过这种方法证明好 λ 不等式. 总之现在可得出

$$P(g^* > \beta\lambda, f^* \vee W^* \leqslant 3\delta c(\beta - \delta - 1)^{-1} P(g^* > \lambda).$$

由 Ⅷ. §1 引理 4，对于 $\Phi(t) = t^p (1 \leqslant p < \infty)$ 得出

$$\|g^*\|_p \leqslant c_p \|f^*\|_p, \tag{1.5}$$

若 $p > 1$，由 Doob 不等式得出

$$\|g\|_p \leqslant c_p \|f\|_p. \tag{1.6}$$

(iv)⇒(i)　在后面 § 4 中我们将证明满足这一条件的空间必是超自反空间，从而具有 RN 性质. 现在设 $\| f \|_1 < \infty$，则 $(\| f_n \|, n \geqslant 1)$ 是非负下鞅，以 h_n 记 $\| f_n \|$. 对于 $\lambda > 0$ 定义 $\tau = \inf\{n, h_n > \lambda\}$. $f^{(\tau)} = (f_{\tau \wedge n})$ 是鞅并且

$$\| f_{\tau \wedge n} \| = \| f_n \| \chi_{\{\tau > n\}} + \| f_\tau \| \chi_{\{\tau \leqslant n\}} \leqslant \lambda + h_{\tau \wedge n},$$

$$E f^{(\tau)*} \leqslant \lambda + \sup_n E h_{\tau \wedge n} \leqslant \lambda + \| h \|_1 \leqslant \lambda + \| f \|_1 < \infty$$

$g^{(\tau)}$ 是 $f^{(\tau)}$ 经过 v 的变换，取 $p = 1$，(iv) 保证了

$$\| g^{(\tau)*} \|_1 \leqslant c \| f^{(\tau)*} \|_1 \leqslant c(\lambda + \| f \|_1) < \infty,$$

于是 $g_n^{(\tau)} = g_{\tau \wedge n}$ $a.e.$ 收敛. 即在 $\{\tau = \infty\} = \{f^* \leqslant \lambda\}$ 上 g_n $a.e.$ 收敛. 由于 $f^* < \infty$ $a.e.$ 最终得到 g_n $a.e.$ 收敛.

由证明过程得到的好 λ 不等式和 Ⅶ. § 1 引理 4 可知下面推论成立.

推论 1　定理 2 中的各条还等价于下面每一条：

(v)　对于每个限制增长的一般 Φ 函数，存在 $c_\Phi > 0$ 使得每个 $(f, v, g) \in \mathscr{M}$ 满足

$$E\Phi(g^*) \leqslant c_\Phi E\Phi(f^*) \tag{1.7}$$

(vi)　对于每个限制增长的 Young 函数 Φ，存在 $c_\Phi > 0$ 使得每个 $(f, v, g) \in \mathscr{M}$ 满足

$$\| g^* \|_\Phi \leqslant c_\Phi \| f^* \|_\Phi \tag{1.8}$$

当 $q_\Phi > 1$ 时，代替(1.8)有

$$\| g \|_\Phi \leqslant c_\Phi \| f \|_\Phi. \tag{1.9}$$

注意由定理 2 的证明过程已顺便得出，条件(iv) 中的任何 p 和某个 p 的说法并不影响结论成立.

定义　称 Banach 空间 X 是具有无条件鞅差序列性质的空间 (Space in which martingale difference sequences are unconditional)：若对于任何 X 值鞅差序列$(df_n, n \geqslant 1)$

$$\| df_1 \pm df_2 \pm \cdots \pm df_n \|_p \leqslant c_p \| df_1 + \cdots + df_n \|_p \tag{1.10}$$

其中 $p \in (1, \infty)$. 此时记 $X \in$ UMD.

注意(1.10)左端的鞅是右端的变换，其中v_n是取$+1$或-1的常数.这和定理2中的条件有所不同.定理2中允许v_n是可料R.V.，只要$v^* \leqslant 1$.不过要注意，若将定理2中涉及到的$v=(v_n)$一律换为$v_n=\pm 1$，则相应的条件(i)—(vi)仍是等价的，而且原来的证明仍适用.此种情况下(1.3)就是(1.10).现在我们要证明的是以上两种情况实际上是等价的.

定理 3 $X \in \mathrm{UMD}$当且仅当X具有好鞅变换性质.

证明 实际上只须证明(1.10)蕴含(1.3).我们将证明更强的结论，即$c_p(1.10)=c_p(1.3)$，这里连同括号的数字代表相应的不等式中允许的最小常数.容易知道$c_p(1.10) \geqslant c_p(1.3)$.

现在设$(f,v,g) \in \mathscr{M}$，往证

$$\| g_n \|_p \leqslant c_p(1.10) \| f_n \|_p,\ \forall\, n \geqslant 1 \tag{1.11}$$

为此作几种简化：

1° 可以假定$v_k = H_k(f_0,\cdots,f_{k-1})$，$1 \leqslant k \leqslant n$，这里$f_0=0$，$H_k: X^k \to [-1,1]$是连续函数.因为可以构造$(F,V,G) \in \mathscr{M}$使之与$(f,v,g)$相差很小.例如取Bernoulli序列$(r_n, n \geqslant 0)$，相互独立并且与$\mathscr{B}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{B}_n$独立.令

$$D_{3k-2} = \varepsilon r_{3k-2} v_k^+ z,\ D_{3k-1} = \varepsilon r_{3k-1} v_k^- z,\ D_{3k} = r_0 df_k.$$

这里v_k^+，v_k^-分别表示v_k的正部和负部，$z \in X$，$\|z\|=1$，$\varepsilon > 0$.记以$(D_k, k \geqslant 0)$为差序列的鞅是$F=(F_n)$，则

$$F_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} D_k = r_0 f_n + R_n z,\ |R_n| \leqslant n\varepsilon.$$

令$V_{3k-2}=V_{3k-1}=0$，$V_{3k}=v_k$，则$G_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} v_k dF_k = r_0 g_n$.由于

$$V_{3k} = H(\| \varepsilon^{-1} D_{3k-2} \| - \| \varepsilon^{-1} D_{3k-1} \|),$$

这里$H(t) = -1 \vee t \wedge 1$，$H(t)$是$F_0,\cdots,F_{3k-1}$的连续函数，取值于$[-1,1]$.若(1.11)对于任何$(F,V,G)$成立，

$$\| G_n \|_p \leqslant c_p(1.10) \| F_n \|_p,$$

则

$$\| g_n \|_p \leqslant \| r_0 g_n \|_p = \| G_{3n} \|_p \leqslant c_p(1.10) \| F_{3n} \|_p$$
$$\leqslant c_p(1.10) \| f_n \|_p + c_p(1.10) n\varepsilon,$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得出所要的结论.

2° 可以假定 f 是简单鞅,即 $f_1, \cdots, f_n$ 是简单函数,并且存在 n,当 $m \geqslant n$ 时,$f_m = f_n$. 例如对于任何自然数 j,取 $\mathscr{B}_n$ 可测函数 d_{jk} 使得

$$\| d_{jk} - df_k \|_p \leqslant 2^{-j-1}$$

再令 $D_{j1} = d_{j1}, D_{jk} = d_{jk} - E(d_{jk} | \mathscr{B}_{j,k-1}), k > 1$. 这里 $\mathscr{B}_{jk-1}$ 是由 $d_{j1}, \cdots, d_{jk-1}$ 生成的 σ 代数. $(D_{jk}, \mathscr{B}_{jk}, k \geqslant 1)$ 是鞅差并且

$$\| D_{jk} - df_k \|_p = \| d_{jk} - df_k - E(d_{jk} - df_k | \mathscr{B}_{j,k-1}) \|_p \leqslant 2^{-j},$$

设由上述差序列构成的鞅是 F_j,则

$$\| F_{jk} - f_k \|_p \leqslant k2^{-j}.$$

当 $j \to \infty$ 时 $F_{jk} \to f_k$. 由 1° 中 H_k 的连续性

$$V_{jk} = H_k(F_{j0}, \cdots, F_{jk-1}) \to H_k(f_0, \cdots, f_{k-1}) = v_k \quad a.e.$$

由控制收敛定理

$$\| v_k df_k - V_{jk} D_{jk} \|_p \leqslant \| (v_k - V_{jk}) df_k \|_p$$
$$+ \| df_k - D_{jk} \|_p \to 0,$$

从而 $\| G_{jn} - g_n \|_p \to 0 (j \to \infty)$. 于是若(1.11)对 f_k 为简单函数的情况成立,一般情况也成立.

3° 可以假定 v_k 是简单函数,甚至 $v_k = a_k, k \geqslant 1$ 是一列满足 $|a_k| \leqslant 1$ 的实数. 实际上取简单函数 v_{jk} 使得 $\| v_{jk} - v_k \|_\infty \leqslant 2^{-j}$,类似于 2° 的证明可以成立. 然后对于 v_k 为常数的情况归纳地定义

$$D_1 = df_1, a_1 = v_1 = H_1(f_0) = H_1(0).$$

若 $f_1 = \sum_{i=1}^{m_1} x_i \chi_{A_i}$ 为简单函数,令 $D_k = \chi_{(f_1 = x_k)} df_2, a_k = H_2(0, x_k)$, $1 \leqslant k \leqslant m_1, \cdots$ 如此可改写

$$f_n = \sum_{k=1}^{m} D_k, g_n = \sum_{k=1}^{m} a_k D_k \tag{1.12}$$

(D_k) 是鞅差，这就是所要的情况.

4° 既然如此，只需证明对于(1.12)的情况，(1.11)成立. 现在记 $a_k = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{jk} 2^{-j}$，$\varepsilon_{jk} = +1$ 或 -1. 由于(1.10)对于$(\varepsilon_{jk}, k \geqslant 1)$都成立，故

$$\begin{aligned}
\| \sum_{k=1}^{m} a_k D_k \|_p &= \| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{jk} 2^{-j} D_k \|_p = \| \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{jk} D_k \|_p \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \| \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{jk} D_k \|_p \\
&\leqslant c_p(1.10) \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \| \sum_{k=1}^{m} D_k \|_p \\
&= c_p(1.10) \| \sum_{k=1}^{m} D_k \|_p .
\end{aligned}$$

定理证毕.

推论 2 (i) UMD 性质是同构不变的.

(ii) UMD 性质被子空间，商空间所继承，并且 $X \in$ UMD 当且仅当 $X^* \in$ UMD.

(iii) 任意有限多个 UMD 空间的直积是 UMD 空间.

(iv) 既是 UMD 又是 p 型的空间一定同构于 p 一致光滑空间，既是 UMD 又是 q 余型的空间一定同构于 q 一致凸空间.

证明 1° 利用定理 2(i)，因为 g_n 的 $a.e.$ 收敛性是同构不变的.

2° 对于子空间，仍由定理 2(i) 得出. 关于 $X \in$ UMD 当且仅当 $X^* \in$ UMD：上面已提到过，$X \in$ UMD，则 X 超自反. 于是当 $p > 1$ 时，$L_p(\mu, X)^* = L_q(\mu, X^*)$，其中 $p^{-1} + q^{-1} = 1$. 现在若 $\varphi = (\varphi_n)$ 是 $L_q(\mu, X^*)$ 中任一鞅，$\psi = (\psi_n)$ 是 φ 经过某个可料序列 $v = (v_n)$ 的变换(不妨设 $v_n = \pm 1$)，则 $d\psi_n = v_n df_n$，对于任何 $\xi \in L_p(\mu, X)$，

$$E\psi_n \xi = E(\sum_{i=1}^{n} v_i d\varphi_i)\xi$$

$$= E(v_1\varphi_1 E(\xi|\mathscr{B}_1) + \cdots + v_n df_n E(\xi|\mathscr{B}_n))$$
$$= E[v_1 d\varphi_1 E(\xi|\mathscr{B}_1) + v_2 d\varphi_2(E(\xi|\mathscr{B}_2) - E(\xi|\mathscr{B}_1)) + \cdots$$
$$v_n d\varphi_n(E(\xi|\mathscr{B}_n) - E(\xi|\mathscr{B}_{n-1}))],$$

这里用到了等式

$$Ev_i d\varphi_i E(\xi|\mathscr{B}_{i-1}) = E(E(\xi|\mathscr{B}_{i-1})v_i E(d\varphi_i|\mathscr{B}_{i-1})) = 0 \quad (i \geqslant 2).$$

记 $d\xi_1 = E(\xi|\mathscr{B}_1), d\xi_i = E(\xi|\mathscr{B}_i) - E(\xi|\mathscr{B}_{i-1})(i \geqslant 2)$. 若 $i < k$,则

$$Ev_i d\varphi_i d\xi_i = E[E(v_i d\varphi_i d\xi_k|\mathscr{B}_{k-1})]$$
$$= E[v_i d\varphi_i E(d\xi_k|\mathscr{B}_{k-1})] = 0.$$

若 $i > k$,则

$$Ev_i d\varphi_i d\xi_k = E[E(v_i d\varphi_i d\xi_k|\mathscr{B}_{i-1})]$$
$$= E[v_i E(d\varphi_i|\mathscr{B}_{i-1})d\xi_k] = 0.$$

从而(1.13) 变为

$$E\psi_n\xi = E\sum_{i=1}^n v_i d\varphi_i d\xi_i = E\sum_{i,k=1}^n v_i d\varphi_i d\xi_k$$
$$= E(d\varphi_1 + \cdots + d\varphi_n)(v_1 d\xi_1 + \cdots + v_n d\xi_n)$$
$$= E\varphi_n(\sum_{i=1}^n v_i d\xi_i).$$

注意到$(d\xi_n)$实际上是$L_p(\mu,X)$中的鞅差序列,记相应的鞅为$\xi = (\xi_n)$,$g_n = \sum_{i=1}^n v_i d\xi_i$,则 g 是 f 的变换,由定理 2

$$\| g_n \|_p \leqslant c_p \| \xi_n \|_p \quad (n \geqslant 1).$$

应用 Hölder 不等式有

$$|E\psi_n\xi| = |E\varphi_n(\sum_{i=1}^n v_i d\xi_i)| \leqslant \|\varphi_n\|_q \| g_n \|_p$$
$$\leqslant c_p \|\varphi_n\|_q \|\xi_n\|_p,$$

由此得出

$$\|\psi_n\|_q = \sup_{\|\xi\|_p \leqslant 1} |E\psi_n\xi| \leqslant c_p \|\varphi_n\|_q \quad (n \geqslant 1).$$

这说明 $X^* \in$ UMD.

反之，若 $X^* \in$ UMD，由上述推理知道 $X^{**} \in$ UMD，但 X 是自反的，所以 $X \in$ UMD.

对于商空间，若 $X \in$ UMD，M 是 X 的闭子空间，由上面所证，此时 M, X^* 都是 UMD 空间. 由于 $(X/M)^* = M^{\perp} \triangleq \{x^* \in X^*, x^*(x) = 0, \forall x \in M\}$. $M^{\perp}$ 是 X^* 的闭子空间从而 $M^{\perp} \in$ UMD. 所以 $X/M \in$ UMD.

3° (iii) 容易从定理 2(i) 得到.

4° 设 $X \in$ UMD 并且是 p 型的. $(df_n, n \geqslant 1)$ 是任一鞅差，$(r_n, n \geqslant 1)$ 是 Rademacher 函数列，与 $(df_n, n \geqslant 1)$ 独立. 注意此时 $(r_n df_n, n \geqslant 1)$ 也是鞅差，将 $(df_n, n \geqslant 1)$ 看成 $(r_n df_n, n \geqslant 1)$ 经过 $(r_n, n \geqslant 1)$ 的变换，类似于(1.3)式有

$$E\|f_n\|^p \leqslant c_p \int_0^1 E\|\sum_{i=1}^n r_i df_i\|^p dt$$

$$= c_p E\int_0^1 \|\sum_{i=1}^n r_i df_i\|^p dt \leqslant c_p c'_p E\sum_{i=1}^n \|df_i\|^p$$

最后的不等式是根据空间的 p 型，这里 c'_p 是 p 型常数. 类似地可证明 q 余型的情况.

例 2 实数域 $R \in$ UMD. 由定理 1 知道.

例 3 $p > 1$ 时，$l^p \in$ UMD. 实际上设 $df = (df_n)$ 是 l^p 值的鞅差，不妨设 $df_n(\omega) = (a_{n1}(\omega), a_{n2}(\omega), \cdots)$，$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}(\omega)|^p < \infty$. 由投影算子 $T_k: l^p \to R, (a_1, a_2, \cdots) \to a_k$ 的连续性知道 $(a_{nk}(\omega), n \geqslant 0)$ 是实值鞅差 $(k \geqslant 1)$. 若 g 是 f 经过 v 的变换，则

$$\|g\|_p^p = E\|\sum_{i=1}^n v_i df_i\|^p = E\sum_{j=1}^{\infty} |\sum_{i=1}^n v_i a_{ij}|^p$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} c_p^p(R) E|\sum_{i=1}^n a_{ij}|^p = c_p^p(R) E\|\sum_{i=1}^n df_i\|^p$$

其中 $c_p(R)$ 是实值鞅满足(1.3)式的常数. 由此还知道 $c_p(l^p) = c_p(R)$.

用稍微复杂的方法也可证明 $L_p[0,1] \in$ UMD.

例 4 若 X 同构于 Hilbert 空间，则 $X \in \mathrm{UMD}$.

在上一章中已证明，此时存在 $c>0$ 使得任何鞅 f 满足

$$c^{-1}\|f_n\|_2 \leqslant \|S_n^{(2)}(f)\|_2 \leqslant c\|f_n\|_2, \forall\, n \geqslant 1.$$

现若 $(f,v,g)\in\mathscr{M}$，则 $\|dg_i\| = \|v_i df_i\| \leqslant \|df_i\|$，故

$$\|g_n\|_2 \leqslant c\|S_n^{(2)}(g)\|_2 \leqslant c\|S_n^{(2)}(f)\|_2 \leqslant c^2\|f_n\|_2.$$

§2 ξ 凸性

定义 函数 $\xi: X\times X\to R$ 称为双凸函数，若对于每个 $x\in X$，$\xi(x,\cdot)$ 是凸函数，对于每个 $y\in X$，$\xi(\cdot,y)$ 是凸函数. 称 ξ 是对称的：若 $\xi(x,y)=\xi(y,x)$.

Banach 空间 X 称为是 ξ 凸的，若存在双凸函数 ξ 使得

$$\xi(x,y)\leqslant\|x+y\|,\ \|x\|=\|y\|=1, \tag{2.1}$$

$$\xi(0,0)>0.$$

先来作几点说明.

1° 若 X 是实或复的 Hilbert 空间. 令

$$\xi(x,y)=1+\mathrm{Re}(x,y), \tag{2.2}$$

ξ 就是一个双凸函数，$\xi(0,0)=1$. 为验证(2.1)，注意 $\|x\|=\|y\|=1$ 时，

$$\xi(x,y)^2\leqslant 1+2Re(x,y)+\|x\|^2\|y\|^2=\|x+y\|^2$$

所以 Hilbert 空间是 ξ 凸的.

2° X 是 ξ 凸的，则 $\xi(0,0)\leqslant 1$. 实际上由双凸性和(2.1)，若 $\|x\|=1$ 则

$$\begin{aligned}\xi(0,0)&\leqslant\frac{1}{2}(\xi,(0,-x)+\xi(0,x))\\&\leqslant\frac{1}{4}(\xi(-x,x)+\xi(x,-x)+\xi(-x,x)+\xi(x,x))\\&\leqslant\frac{1}{4}(\|2x\|+\|2x\|)=\|x\|=1.\end{aligned}$$

3° 有时可要求定义中的 ξ 是对称的. 实际上若 $\xi(x,y)$ 满足

(2.1)，则 $\xi_1(x,y)=\xi(x,y)\vee\xi(y,x)$是对称的，同时满足(2.1).

4° 关于双凸函数 ξ，下面条件都与(2.1)等价：

(2.1)′：$\xi(x,y)\leqslant\|x+y\|,\ \|x\|\leqslant 1\leqslant\|y\|$

(2.1)″：$\xi(x,y)\leqslant\|x+y\|,\ \|x\|\vee\|y\|\geqslant 1$.

容易知道(2.1)″⇒(2.1)′⇒(2.1). 往证(2.1)⇒(2.1)″. 首先由(2.1)可推出 $\|x\|\vee\|y\|=1$ 时 $\xi(x,y)\leqslant\|x+y\|$. 因为若设 $\|x\|<\|y\|=1$，$z=\alpha^{-1}(x+y)-y$；α 接近于 0 时，$\|z\|$ 可大于 1，因此存在 α 使得 $\|z\|=1$. 由于 $x=\alpha z+(1-\alpha)(-y)$，由双凸性和(2.1)，

$$\begin{aligned}\xi(x,y)&\leqslant\alpha\xi(z,y)+(1-\alpha)\xi(-y,y)\\&\leqslant\alpha\|z+y\|=\|x+y\|.\end{aligned}$$

为得到(2.1)″. 定义

$$\xi_1(x,y)=\begin{cases}\xi(x,y)\vee\|x+y\|, & \|x\|\vee\|y\|<1\\ \|x+y\|, & \|x\|\vee\|y\|\geqslant 1\end{cases}\tag{2.3}$$

则 $\xi_1(0,0)\geqslant\xi(0,0)>0$. $\|x\|=\|y\|=1$ 时，$\xi_1(x,y)=\|x+y\|$. 剩下只需验证 ξ_1 是双凸的. 现在只验证 $\xi(\cdot,y)$是凸的，关于另一变元的可类似验证. 若 $\|y\|\geqslant 1$，则 $\xi_1(x,y)=\|x+y\|$ 是凸的. 若 $\|y\|<1$，则在 $\|x\|\neq 1$ 的地方，容易看出 $\xi_1(\cdot,y)$是局部凸的. 剩下证明在 $\|y\|<1=\|x\|$ 的情况. 此时若 $x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$，$\alpha_1,\alpha_2>0$，$\alpha_1+\alpha_2=1$ 则

$$\begin{aligned}\xi_1(x,y)=\|x+y\|&\leqslant\alpha_1\|x_1+y\|+\alpha_2\|x_2+y\|\\&\leqslant\alpha_1\xi_1(x_1,y)+\alpha_2\xi_2(x_2,y)\end{aligned}$$

即得出结论.

引理 1 对于任何 Banach 空间 X，设 $M(x,y)$是 X 值鞅 f 的集合，使得$(f,v,g)\in\mathscr{M}$，$f_0=x$，$v=(1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots)$其中 $\varepsilon_n=\pm 1$，$n>1$ 并且

$$P(\omega,\exists\ n\geqslant 1,\ \|g_n(\omega)-y\|\geqslant 1)=1.$$

令 $\psi(x,y)=\inf\{\|f\|_1,f\in M(x,y)\}$. 则 $\psi:X\times X\to R$ 满足

(1) $\psi(x,y)=\psi(x,2x-y)$.

(2) $\psi(\cdot, y)$是凸函数.

(3) 若 $\|y\| \geqslant 1$,则 $\psi(x,y) \leqslant \|x\|$.

证明 在$M(x,y)$中考虑f经过$(1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots)$和$(1,-\varepsilon_2,-\varepsilon_3,\cdots)$的变换,记为$g_n = x + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i df_i$和$g'_n = x - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i df_i$. 由于$\|g'_n - (2x - y)\| = \|g_n - y\|$,所以(1)成立.

设$x_1,x_2,x \in X$,$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$是$x_1,x_2$的凸组合. 对于$\delta > 0$,若$f_1,f_2 \in M(x,y)$并且$\|f_j\|_1 \leqslant \psi(x_j,y) + \delta$,$j = 1,2$,$v_j = (1,\varepsilon_{j1},\varepsilon_{j2}\cdots)$是相应的取$\pm 1$值的$M(x,y)$定义中的序列. 不妨设基本概率空间是同一个,并且$f_1,f_2$适应的$\sigma$代数序列$\mathscr{B}_{j\infty} = \bigvee_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_{jn}(j = 1,2)$相互独立. 另取与$\mathscr{B}_{j\infty}(j = 1,2)$独立的$\sigma$代数$\mathscr{B}$,使$P$在$\mathscr{B}$上无原子. 设$u_1,u_2$是$\mathscr{B}$可测$R.V.$,$u_1 + u_2 = 1$,$P(u_1 = 1) = \alpha_1$,$P(u_2 = 1) = \alpha_2$. 记$s_j = x_j - x$,则

$$D = (x, u_1 s_1 + u_2 s_2, u_1 d_{12}, u_2 d_{22}, u_1 d_{13}, u_2 d_{23}, \cdots)$$

是与σ代数列

$$(\{\phi,\Omega\}, \mathscr{B}, \mathscr{B} \vee \mathscr{B}_{12}, \mathscr{B} \vee \mathscr{B}_{12} \vee \mathscr{B}_{22}, \cdots)$$

适应的鞅差序列. 记D对应的鞅是F,F经过序列$v = (1,1,\varepsilon_{12},\varepsilon_{22},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23},\cdots)$的变换是$G$. 则

$$F_1 = x, F_{2n} = u_1 f_{1n} + u_2 f_{2n}, G_{2n} = u_1 g_{1n} + u_2 g_{2n},$$

于是$F \in M(x,y)$,

$$\begin{aligned}\|F_{2n}\| &\leqslant \alpha_1\|f_{1n}\|_1 + \alpha_2\|f_{2n}\|_1 \\ &\leqslant \alpha_1\psi(x_1,y) + \alpha_2\psi(x_2,y) + \delta.\end{aligned}$$

故有$\psi(x,y) \leqslant \alpha_1\psi(x_1,y) + \alpha_2\psi(x_2,y)$,得出(2).

为证(3),设$\|y\| > 1$,若$\|x - y\| \geqslant 1$,取$f_n = g_n = x$,则$f \in M(x,y)$,$\|f\|_1 = \|x\|$,3°成立并且$\psi(0,y) = 0$. 现在设$x \neq 0$,若λ足够大,则$\|\lambda x - y\| \geqslant 1$从而由凸性得出

$$\begin{aligned}\psi(x,y) &\leqslant (1 - \lambda^{-1})\psi(0,y) + \lambda^{-1}\psi(\lambda x,y) \\ &= \lambda^{-1}\psi(\lambda x,y) \leqslant \lambda^{-1}\|\lambda x\| = \|x\|.\end{aligned}$$

定理 1(Burkholder) $X \in$ UMD 当且仅当 X 是 ξ 凸的.

证明 先设 $X \in$ UMD. 考虑上面引理中确定的函数 ψ,令 $\xi(x,y) = 2\psi(\frac{x+y}{2},y)$. 由(1),$\xi(x,y) = \xi(y,x)$;由(2),$\xi$ 是双凸的;由(3),当 $\|x\| \vee \|y\| \geqslant 1$ 时 $\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|$. 为证 X 是 ξ 凸的只须证明 $\psi(0,0) > 0$. 若 $f \in M(0,0)$,由定义存在 $v = (1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots)$ 使得 f 经过 v 的变换 g 满足 $g^* \geqslant 1$ $a.e.$,若 $\lambda > 1$,则 $(\lambda g)^* > 1$ $a.e.$ 根据 §1 定理 2(ii) 和 UMD 定义后面的说明,存在 $c > 0$ 使得 $\|f\|_1 \geqslant \frac{c}{\lambda}$. 所以

$$\psi(0,0) = \inf\{\|f\|_1, f \in M(0,0)\} \geqslant c > 0.$$

反过来设 X 是 ξ 凸的. $\xi: X \times X \to R$ 是相应的双凸函数. 令 $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\xi(2x-y,y)$,我们证明 $\psi(x,y) \geqslant \varphi(x,y)$,$\psi$ 即是引理 1 中定义的函数. 倘如此,则 $\psi(0,0) \geqslant \frac{1}{2}\xi(0,0) > 0$,然后由 $M(0,0)$ 的定义,当 $g^* > 1$ $a.e.$ 时 $\|f\|_1 \geqslant \psi(0,0) > 0$,由 §1 定理 2(ii) 知道 $X \in$ UMD.

为证明所说的不等式,设

$$M_n(x,y) = \{f \in M(x,y), P(\omega, \exists\ 1 \leqslant k \leqslant n, \|g_k(\omega) - y\| \geqslant 1) = 1\}.$$

$$\psi_n(x,y) = \inf\{\|f\|_1, f \in M_n(x,y)\}.$$

类似地若 g 是由 $M_n(x,y)$ 中的 f 经过 $v = (1,1,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\cdots)$,$\varepsilon_n = \pm 1 (n > 2)$ 变换得来的,记其全体为 $M_n^+(x,y)$;若 g 是由 $M_n(x,y)$ 中的 f 经过 $v = (1,-1,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\cdots)$,$\varepsilon_n = \pm 1 (n > 2)$ 变换得来的,记其全体为 $M_n^-(x,y)$. 相应地定义 $\psi_n^+(x,y)$ 和 $\psi_n^-(x,y)$. 注意 $\psi_n(x,y) = \psi_n^+(x,y) \wedge \psi_n^-(x,y)$. 在上面引理 1(1) 的证明中已得到 $\psi(x,y) = \psi(x,2x-y)$,所以这里有 $\psi_n^-(x,y) = \psi_n^+(x,2x-y)$. 我们只须证明对于 $\forall\, n \geqslant 2$,$\psi_n(x,y) \geqslant \psi(x,y)$.

不妨设 ξ 是对称的. 此时 φ 也有三条性质:(1)$\varphi(x,y) = \varphi(x,2x-y)$,(2) $\varphi(\cdot,y)$ 是凸函数,(3) $\varphi(x,y) \leqslant \|x\|$,若 $\|y\| \geqslant$

1. 这些都可以直接验证.

现在用归纳法. 若 $n=2, f\in M_2^+(x,y)$, 此时 $g_2=f_2$, 于是或者 $\|x-y\|\geqslant 1$ 或者 $\|f_2-y\|\geqslant 1$. 由 φ 满足的(1), (3) 两条性质知道此时 $\varphi(x,y)\leqslant\|x\|$ 或者 $\varphi(f_2,y)\leqslant\|f_2\|$, 由 φ 的凸性和 Jensen 不等式

$$\varphi(x,y)=\varphi(Ef_2,y)\leqslant E\varphi(f_2,y)\leqslant\|f_2\|_1.$$

$f\in M_2^+(x,y)$ 是任意的, 故 $\psi_2^+(x,y)=\inf\{\|f_2\|_1, f\in M_2^+(x,y)\}\geqslant\varphi(x,y)$.

假设对于 $n\geqslant 2, \psi_n^+(x,y)\geqslant\varphi(x,y), f\in M_{n+1}^+(x,y)$. 假定 g 与 f 对应, f_2 有有限值域 $\{x_1,\cdots,x_m\}$, $\alpha_j=P(f_2=x_j)>0, 1\leqslant j\leqslant m$. 此时

$$P(\omega,\exists\ 2\leqslant k\leqslant n+1, \|g_k(\omega)-y\|\geqslant 1)=1, \quad (2.4)$$

$$\|f_{n+1}\|_1=\sum_{j=1}^m\int_{\{f_2=x_j\}}\|x_j+df_3+\cdots+df_{n+1}\|dP \quad (2.5)$$

若 $P_j=P(\cdot\,|_{f_2=x_j})$ 为条件概率. (2.4) 说明由差序列 $D_j=(x_j, df_3, df_4,\cdots)$ 确定的鞅 $F_j\in M_n(x_j,y)$, 于是由归纳假设和 $x=Ef_2=\sum_{j=1}^m\alpha_jx_j$ 以及(2.5)

$$\|f_{n+1}\|_1=\sum_{j=1}^m\alpha_j\int_\Omega\|F_{jn}\|dP_j\geqslant\sum_{j=1}^m\alpha_j\psi_n(x_j,y)$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^m\alpha_j\varphi(x_j,y)=\varphi(x,y),$$

从而 $\psi_{n+1}^+(x,y)=\inf\{\|f_{n+1}\|_1, f\in M_{n+1}^+(x,y)\}\geqslant\varphi(x,y)$.

最后来证明 $\psi(x,y)\geqslant\varphi(x,y)$. 设 $f\in M(x,y), \delta>0$. 于是存在 n, 使得 $P(A)>1-\delta$, 其中

$$A=\{\omega,\exists\ 1\leqslant k\leqslant n, \|g_k(\omega)-y\|\geqslant 1\}.$$

这里 $(f,v,g)\in\mathscr{M}$. 设 $u=\chi_{\bar{A}}, \bar{A}=\Omega\backslash A$. 取 σ 代数 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{B}_n$ 独立, P 在 $\mathscr{B}$ 上无原子, r 关于 $\mathscr{B}$ 可测, $P(r=\pm1)=\frac{1}{2}$. 又取 $z\in X$, $\|z\|=2$, 则

$$D=(df_1,\cdots,df_n,urz,0\cdots)$$

是关于$(\mathscr{B}_1,\cdots,\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_n\vee\mathscr{B},\cdots)$的鞅差序列，其对应的鞅是 F. 若在 $\Omega\backslash A$ 上，$\|g_n-y\|<1$，则

$$\|g_n+rzu-y\|\geqslant\|rzu\|-\|g_n-y\|\geqslant 1,$$

从而 $F\in M_{n+1}(x,y)$. 由此

$$\varphi(x,y)\leqslant\psi_{n+1}(x,y)\leqslant\|F_{n+1}\|_1$$
$$\leqslant\|f_n\|_1+\|z\|Eu\leqslant\|f\|_1+2\delta.$$

δ 是任意的. 定理得证.

让我们继续讨论双凸函数.

引理 2 设 $u:X\times X\to R$ 是双凸函数，u 满足(2.1)″，则对于 $\forall\ x,y,x',y'\in X$

$$|u(x,y)-u(x',y')|\leqslant\|x-x'\|+\|y-y'\|. \tag{2.6}$$

证明 若 $x\neq x'$，则当 λ 充分大时，$\|x+\lambda(x'-x)\|>1$，于是由(2.1)″和 $u(\cdot,y)$的凸性，

$$u(x',y)-u(x,y)\leqslant\lambda^{-1}[u(x+\lambda(x'-x),y)-u(x,y)]\cdot$$
$$\leqslant\lambda^{-1}[\|x\|+\|y\|+\lambda\|x'-x\|-u(x,y)]$$

令 $\lambda\to\infty$，则后者成为 $\|x'-x\|$. (2.6)由此得出.

定理 2 设 X 是 ξ 凸的，则 X 上可以定义范数 $|\cdot|$ 使之在新范数下 X 仍是 ξ 凸的并且

$$\xi(0,0)|x|\leqslant\|x\|\leqslant|x|. \tag{2.7}$$

证明 不妨设 $\xi(x,y)=\xi(-x,-y)$，否则 $\xi(x,y)\vee\xi(-x,-y)$是 $X\times X$ 上的满足此条件的双凸函数，且都使(2.1)成立. 令

$$V_0=\{x\in X,\xi(\alpha x,-\alpha x)>0,\forall\ \alpha,|\alpha|\leqslant 1\},V=coV_0.$$

我们将证明当 $|\alpha|=1$ 时，$\alpha V=V$ 并且

$$\xi(0,0)U\subset V\subset U,\text{其中}\ U=\{x\in X,\|x\|<1\}. \tag{2.8}$$

然后令 $|x|=\inf\{\lambda,x\in\lambda V\}$，则 $|x|$ 是 X 上的范数并且由(2.8)知道(2.7)成立.

为证(2.8)，定义 u 如(2.3)中 ξ_1，记 V_0'' 如上面 V_0，不过将 ξ 换为 u. 若 $x\in V_0$，则$\forall\ \alpha$，$|\alpha|\leqslant 1$，$\|\alpha x\|\neq 1$，否则 $\xi(\alpha x,-\alpha x)\leqslant$

$\| \alpha x - \alpha x \| = 0$. 于是 $x \in U, V_0 \subset U$. 类似地 $V_0'' \subset U$. 但若 $x \in U$, $|\alpha| \leqslant 1$, 则 $\| \alpha x \| < 1$, 由 u 的定义, $u(\alpha x, -\alpha x) = \xi(\alpha x, -\alpha x) \vee 0$, 所以实际上 $V_0 = V_0''$. 于是 $V = coV_0 \subset U$.

现证 $\xi(0,0)U \subset V_0$. 注意 u 也满足 $u(x,y) = u(-x,-y)$ 于是

$$u(0,0) \leqslant \frac{1}{2}[u(x,0) + u(-x,0)] = u(x,0).$$

若 $x \in \xi(0,0)U$, 则 $\| x \| < \xi(0,0)$, 当 $|\alpha| \leqslant 1$ 时, 由前面 4°的说明和引理 2

$$\xi(0,0) = u(0,0) \leqslant u(\alpha x, 0) \leqslant u(\alpha x, -\alpha x) + \| \alpha x \|$$
$$< u(\alpha x, -\alpha x) + \xi(0,0),$$

$u(\alpha x, -\alpha x) > 0$, $x \in V_0'' = V_0$. 总之, (2.7)得证.

定理 3 Banach 空间 X 是 Hilbert 空间当且仅当 $X \times X$ 上存在对称双凸函数 ξ 使得(2.1)成立并且 $\xi(0,0) = 1$.

证明 必要性已由 1°中给出的例子得到, 现证充分性.

不妨设 $\xi(x,y) = \xi(-x,-y)$. 首先证明 $\alpha, \beta \in R$, $x \in X$, $\| \alpha x \| \vee \| \beta x \| \leqslant 1$ 时,

$$\xi(\alpha x, \beta x) = 1 + \alpha\beta \| x \|^2 \tag{2.9}$$

若 $x = 0$, 由 $\xi(0,0) = 1$ 知此式成立. 若 $x \neq 0$. 不妨设 $\| x \| = 1$. 则 $\xi(\pm x, 0) = \xi(0, \pm x) \leqslant \| x \| = 1$. 由于 $\xi(\cdot, 0)$ 是凸的, 所以 $\xi(\alpha x, 0) = 1$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. 固定 α, 则

$$\xi(\alpha x, \pm x) \leqslant \| \alpha x \pm x \| \leqslant 1 \pm \alpha \tag{2.10}$$

(参见 4°). 由 $\xi(\alpha x, \cdot)$ 的凸性, $\xi(\alpha x, 0) = 1$ 和(2.10)可知

$$\xi(\alpha x, \beta x) = \frac{1}{2}[(1-\beta)(1-\alpha) + (1+\beta)(1+\alpha)] = 1 + \alpha\beta.$$

实际上此式对于任何 $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ 成立.

现在定义

$$F(x,y) = \| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 - 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$$
$$G(x,y) = 2\xi(x,y) + 2\xi(x,-y) - 4$$

当 $\| x \| \vee \| y \| \leqslant 1$ 时, 令 $u = \frac{1}{2}(x+y)$, $v = \frac{1}{2}(x-y)$, 则 $\| u \|$

$\vee \|v\| \leqslant 1$，利用对称性和双凸性

$$4\xi(u,u)\leqslant 2(\xi(x,u)+\xi(y,u))$$
$$\leqslant \xi(x,x)+\xi(y,y)+2\xi(x,y),$$

将(2.9)代入可得

$$4\|u\|^2\leqslant \|x\|^2+\|y\|^2+2\xi(x,y)-2.$$

同样的式子对于 v 也成立，于是得到

$$F(x,y)\leqslant G(x,y),\quad \|x\|\vee\|y\|\leqslant 1 \qquad (2.11)$$

由我们对于 ξ 的假设可知 $G(\pm x,\pm y)=G(x,y)$. 同时 G 是非负的，对称双凸的. 例如关于非负性有

$$2\xi(x,y)+2\xi(x,-y)\geqslant 4\xi(x,0)=2(\xi(x,0)+\xi(-x,0))$$
$$\geqslant 4\xi(0,0)=4.$$

(2.9)说明

$$G(x,0)=G(x,x)=0,\ \|x\|\leqslant 1$$

若 $\alpha,\beta\in[0,1]$, $\|x\|\vee\|y\|\leqslant 1$，则

$$G(\alpha x,\beta y)\leqslant (1-\alpha)G(0,\beta y)+\alpha G(x,\beta y)$$
$$=\alpha G(x,\beta y)\leqslant \alpha\beta G(x,y).$$

若 $0<\alpha<\beta$ 并且 β 足够小使得 $\|\beta x\|\vee\|\beta y\|\leqslant 1$，则

$$G(\alpha x,\alpha y)=G(\beta x\cdot\frac{\alpha}{\beta},\beta y\cdot\frac{\alpha}{\beta})\leqslant\frac{\alpha^2}{\beta^2}G(\beta y,\beta y)$$

或者 $G(\alpha x,\alpha y)/\alpha^2\leqslant G(\beta x,\beta y)/\beta^2$. 令 $H(x,y)=\lim\limits_{\alpha\to 0}G(\alpha x,\alpha y)/\alpha^2$，此极限存在. 若 $0<\alpha<1$，由 F,G 的定义知道

$$F(x,y)=F(\alpha x,\alpha y)/\alpha^2\leqslant G(\alpha x,\alpha y)/\alpha^2\leqslant G(x,y)$$

于是

$$F(x,y)\leqslant H(x,y)\leqslant G(x,y),\ \|x\|\vee\|y\|\leqslant 1. \quad (2.12)$$

只要证明了 $H(x,y)=0,\forall\ x,y\in X$, $\|x\|\vee\|y\|\leqslant 1$ 就有

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\leqslant 2\|x\|^2+2\|y\|^2,$$

从而不难得出 X 是 Hilbert 空间.

为证 $H(x,y)=0$, $\|x\|\vee\|y\|\leqslant 1$，注意 $\alpha>0$ 时

$$H(\alpha x,\alpha y)=\lim_{\beta\to 0}G(\alpha\beta x,\alpha\beta y)/\beta^2=\alpha^2 H(x,y).$$

若 $0<\alpha\leqslant 1$, $\|x\|\vee\|y\|\leqslant 1$. 则由 G 的性质得出

$$H(\pm x,\pm y)=H(x,y),H(x,x)=0,$$

$$H(\alpha x,y)\leqslant \alpha H(x,y)=\alpha H(x,\alpha\alpha^{-1}y)\leqslant \alpha^2 H(x,\alpha^{-1}y)=H(\alpha x,y).$$

同时 H 也是对称双凸,非负的.

由 $H(x,x)=0$ 和 $H(\alpha x,\beta y)=\alpha\beta H(x,y)$ 不难知道,若 x 与 y 是线性相关的,则 $H(x,y)=0$. 若 x,y 不是相关的,设 S 是 x,y 张成的二维子空间,记

$$\gamma^2+\delta^2=\inf\{\alpha^2+\beta^2, \|\alpha x+\beta y\|=1\}$$

则 $r^2+\delta^2>0$,定义新范数

$$|\alpha x+\beta y|^2=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)^{-1}, \tag{2.13}$$

在 $\|\alpha x+\beta y\|=1$ 上, $|\alpha x+\beta y|\geqslant\|\alpha x+\beta y\|$, 由齐性,在整个 S 上此不等式成立. 作变换

$$\begin{cases} u=\delta x-\gamma y \\ v=\gamma x+\delta y \end{cases}$$

由 $\|u\|\leqslant|u|=1$, $\|v\|=|v|=1$ 并且 $|\alpha u+\beta v|^2=\alpha^2+\beta^2$, 从而 $0<\alpha\leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}\alpha H(x,y)&\leqslant H(\alpha x,y)\leqslant G(\alpha x,y)\\ &=2\xi(\alpha x,y)+2\xi(\alpha x,-y)-4\\ &\leqslant 2\|\alpha x+y\|+2\|\alpha x-y\|-4\\ &\leqslant 2|\alpha x+y|+2|\alpha x-y|-4\\ &=4(1+\alpha^2)^{1/2}-4\leqslant 2\alpha^2\\ \alpha H(u,v)&\leqslant H(\alpha u,v)\leqslant G(\alpha u,v)\\ &=2\xi(\alpha u,v)+2\xi(\alpha u,-v)-4\\ &\leqslant 2\|\alpha u+v\|+2\|\alpha u-v\|-4\\ &\leqslant 2|\alpha u+v|+2|\alpha u-v|-4\\ &=4(1+\alpha^2)^{1/2}-4\leqslant 2\alpha^2\end{aligned}$$

于是必有 $H(u,v)=0$, 由 u,v 与 x,y 的关系以及 H 的对称性和双凸性容易反过来得出 $H(x,y)=0$.

注意关于 WP 鞅,与 §1 定理 2,3 类似的结果仍成立. 我们以

$\mathscr{M}_0$ 记(f,v,g)的全体，这里 f 是 WP 鞅，$v=(v_n)$，其中 $v_n=\pm 1$. 则把§1 定理 2 中属于 $\mathscr{M}$ 的鞅换为属于 $\mathscr{M}_0$ 的鞅，条件(ii)－(v)仍相互等价. 其证明也如同§1 定理 2 一样. 需要补充的只需验证当(ii)－(v)成立时 X 是 ξ 凸的.

为此定义 $M(x,y)$是起点在 x 的 WP 鞅 f 的全体，f 经过序列$(1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots)(\varepsilon_n=\pm 1)$的变换 g 满足

$$P(\omega,\exists\ n\geqslant 1,\|g_n(\omega)-y\|\geqslant 1)=1.$$

令 $\psi(x,y)=\inf\{\|f\|_1,f\in M(x,y)\}$. §1 定理 3 中所证明的 ψ 的性质这里的 ψ 也有. 不过应注意的一点是为验证 $\psi(\cdot,y)$的凸性，这里只能是中点凸，即 $\psi(\frac{x_1+x_2}{2},y)\leqslant\frac{1}{2}(\psi(x_1,y)+\psi(x_2,y))$. 但由于 $\psi(\cdot,y)$是局部有界的，所以是凸的. 然后令 $\xi(x,y)=2\psi(\frac{x+y}{2},y)$，则 ξ 是对称，双凸，满足(2.1)的函数. 要得出 X 的 ξ 凸性，唯一要做的是证明 $\psi(0,0)>0$. 这一结论可从下面定理的(ii)得到.

定理 4 设 X 是 Banach 空间，则以下条件等价：

(i) $X\in$ UMD.

(ii) 每个$(f,v,g)\in\mathscr{M}_0$，$\|f\|_1<\infty$时 $g^*<\infty$ $a.e.$.

(iii) 每个$(f,v,g)\in\mathscr{M}_0$，$\|f\|_\infty<\infty$时 $P(g^*<\infty)>0$.

(iv) 每个$(f,v,g)\in\mathscr{M}_0$，$\|f\|_\infty<\infty$时 g_n 依概率收敛.

证明 (i)⇒(ii)⇒(iii)和(i)⇒(iv)是显然的.

(iii)⇒(i)首先可以证明，若$(f,v,g)\in\mathscr{M}_0$，$\|f\|_1<\infty$但 $g^*>1$ $a.e.$，则可找到$(F,v,G)\in\mathscr{M}_0$，$\|F\|_\infty\leqslant 6\|f\|_1$，$P(G^*>1)>\frac{1}{2}$. 其证明方法如同Ⅷ. §2 引理 1，这里不再叙述. 现在我们证明(iii)使得$\forall\ (f,v,g)\in\mathscr{M}_0$，$g^*>1$ $a.e.$时，$\|f_1\|\geqslant c>0$. 否则对于每个自然数 j，存在$(f_j,v_j,g_j)\in\mathscr{M}_0$ 使得 $g_j^*>1$ $a.e.$ 但 $\|f_j\|_1<2^{-j}$. 由上面所说，此时存在$(F_j,v_j,G_j)\in\mathscr{M}_0$ 使得 $\|F_j\|_\infty\leqslant 6\cdot 2^{-j}$，$P(G_j^*>1)>\frac{1}{2}$. 令 $\widetilde{F}_j=jF_j$，$\widetilde{G}_j=jG_j$，则$(\widetilde{F}_j,v_j,\widetilde{G}_j)\in\mathscr{M}_0$，

$\|\widetilde{F}_j\|\leqslant 6j2^{-j}, P(\widetilde{G}_j>j)>\frac{1}{2}$. 不妨设 $dF_{j1}=0$,基本概率空间是同一个并且 $\mathscr{B}_{j\infty}$ 相互独立. 此时存在 n_j,

$$A_j=\{|G_{jn}|>j,\exists\ n\leqslant n_j\}$$

时 $P(A_j)>\frac{1}{2}$. 考虑差序列

$$(D_{11},\cdots,D_{1n_1},D_{21},\cdots,D_{2n_2},D_{31},\cdots)$$

其对应的 WP 鞅记为 $\widetilde{F}$,则

$$\|\widetilde{F}\|_\infty\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\|\widetilde{F}_{jnj}\|\leqslant 6\sum_{j=1}^{\infty}j2^{-j}<\infty.$$

F 经过序列

$$(\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2n_2},\cdots)$$

的变换记为 $\widetilde{G}$,由于 $\sum_{j=1}^{\infty}P(A_j)=\infty$,根据 Borel-Cantelli 引理,

$$P(\widetilde{G}^*=\infty)\geqslant P(\lim_{j\to\infty}\sup A_j)=1.$$

矛盾. 故(iii)⇒(i)成立.

(iv)⇒(i)　由(iii)⇒(i)所说的事实. 将(iv)中的 $\|f\|_\infty<\infty$ 换为 $\|f\|_1<\infty$ 是可行的,即我们假定每个 $(f,v,g)\in\mathscr{M}_0$, $\|f\|_1<\infty$ 时 g_n 依概率收敛. 我们证明 $X\in$ UMD.

此时由定理条件,对于 $\forall\ \varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,当 $\|f\|_1<\delta$ 时, $\sup_n P(\|g_n\|>\varepsilon)<\varepsilon$. 定义停时

$$\tau=\inf\{n,\ \|g_n\|>\varepsilon\}$$

则 $f^{(\tau)}=(f_{\tau\wedge n}), g^{(\tau)}=(g_{\tau\wedge n})$ 是鞅并且 $g^{(\tau)}$ 是 $f^{(\tau)}$ 经过 v 的变换,也是 f 经过 $\bar{v}=(v_n\chi_{\{\tau\geqslant n\}})$ 的变换. 于是由所说条件也应有 $\sup_n P(\|g_{\tau\wedge n}\|>\varepsilon)>\varepsilon$. 但

$$P(\|g_{\tau\wedge n}\|>\varepsilon)=P(\tau\leqslant n),$$

所以

$$P(\sup_n\|g_n\|>\varepsilon)=P(\tau<\infty)=\lim_{n\to\infty}P(\tau\leqslant n)\leqslant\varepsilon.$$

换言之,只要 $\|f\|_1<\delta$ 则 $P(g^*>\varepsilon)\leqslant\varepsilon$. 由此知道存在常数 $c>$

0，使得当$(f,v,g)\in\mathscr{M}_0$并且$g^*>1\ a.e.$时，$\|f\|_1\geq c$. 由定理前面的"注意"必有$X\in$UMD.

§3　UMD空间的若干性质

前面在§1中已叙述过UMD空间的某些简单性质. 本节我们将讨论UMD空间的超自反性，X与$L_\Phi(\mu,X)$的UMD性质的关系，内插性质，鞅变换的加权不等式，大数定律等.

定理1（Aldous）　UMD空间具有超自反性.

证明　这里先有一个例子：$L_p(\mu,c_0)$中具有不是无条件的鞅差序列，设$\{e_i,i\geq 1\}$是c_0的单位向量基，$\{\beta_i,i\geq 1\}$是独立$R.V.$序列，

$$P(\beta_i=-1)=\frac{9}{10},P(\beta_i=9)=\frac{1}{10}. \tag{3.1}$$

$\tau_j(\omega)$是第j个整数i，使得$\beta_i(\omega)=9$. 定义

$$Y_n(\omega)=(-1)^n\beta_n(\omega)e_j,\text{若 }\tau_{j-1}(\omega)<n\leqslant\tau_j(\omega)$$

注意$E\beta_n=0$并且彼此独立，所以Y_n是鞅差序列. 此外

$$\|\sum_{i=1}^n Y_i(\omega)\|_{c_0}\leqslant 10,\ \|\sum_{i=1}^n Y_i\|_{L_p(c_0)}\leqslant 10,\forall\ n\geqslant 1. \tag{3.2}$$

我们将证明$\|\sum_{i=1}^n(-1)^iY_i\|_{c_0}=b_n\to\infty\ a.e.$

实际上，固定m，设$A_j=\{\omega,\tau_j>\tau_{j+1}+m+10\}$，$A_j$相互独立并且具有相等的非0概率，于是$P(\bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j)=1$. 但对于$\omega\in A_j$，由$\tau_j$的定义和$e_j$的系数得到，当$n$充分大时

$$\|\sum_{i=1}^n(-1)^iY_i(\omega)\|_{c_0}\geqslant m$$

从而

$$P(\limsup_{n\to\infty}\|\sum_{i=1}^n(-1)^iY_i(\omega)\|_{c_0}\geqslant m)=1. \tag{3.3}$$

m 是任意的，故得出所要的结论.

但对于每个固定的 n，$(Y_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ 只涉及到 c_0 的有限维子空间，如果 X 是 UMD，c_0 必不会在 X 中有限可表现，否则就不会出现上面所说的情况. 根据 Ⅶ，§2 定理 4，存在 $q < \infty$，X 是 q 余型的.

设 $(D_1, \cdots, D_n)$ 是 $L_p(\mu, X)$ 中的鞅差，$(\varepsilon_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ 是与之独立的 Bernoulli $R.V.$，由 q 余型得出

$$\| (\sum_{i=1}^{n} \| D_i(\omega) \|_X^q)^{1/q} \|_p \leqslant c_{pq} \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i D_i \|_p \tag{3.4}$$

但由 UMD 性质

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i D_i \|_p \leqslant c_p \| \sum_{i=1}^{n} D_i \|_p. \tag{3.5}$$

现在若 X 中含有 (δ, n) 树，则它对应于一个鞅差满足 $\| D_i(\omega) \| \geqslant \delta$，但 $\| \sum_{i=1}^{n} D_i(\omega) \| \leqslant 1, \forall\ \omega \in \Omega$. 代入(3.4)，(3.5)得到 $\delta n^{1/q} \leqslant c_p c_{pq}$，这是不可能的. 即 X 中不含 (δ, n) 树，由 Ⅶ. §4 的定理知道 X 是超自反空间.

实际上当我们得出 X 是余型时，我们知道 X 必同构于 q 一致凸空间，因此是超自反的.

Aldous 还证明了如果 $L_p(\mu, X)$ 具有无条件基，则其中的鞅差一定是无条件的，从而 $X \in$ UMD. 若 $L_p(\mu, X)$ 以一个鞅差作为基底(不止是基序列)，则 $\dim X = 1$. 这里将不去叙述其证明了. Pisier 和 Baurgain 都分别给出反例，一个 Banach 空间或 Banach 格可以是超自反的，但它们并不是 UMD 空间. 在 §4 中我们将给出 Pisier 的反例的另一种验证方法.

引理 设 X 是具有 RN 性质的 Banach 空间，Φ 是 Young 函数. 若对于任何一致有界 WP 鞅 f，$(f, v, g) \in \mathscr{M}_0$ 时，$\sup_n E\Phi(\| g_n \|) < \infty$，则 $X \in$ UMD.

实际上，X 是具有 RN 性质，故当 $\sup_n E\Phi(\| g_n \|) < \infty$ 时，g_n

是 $a.e.$ 收敛的. 即 $\|f\|_\infty<\infty$, 则 g_n $a.e.$ 收敛. 我们在上节末尾已经知道 $X\in \text{UMD}$.

定理 2 设 X 是 Banach 空间, Φ 是限制增长的严格凸函数, $1<q_\Phi\leqslant p_\Phi<\infty$, 则 $X\in \text{UMD}$ 当且仅当 $L_\Phi(\mu,X)\in \text{UMD}$.

证明 若 $L_\Phi(\mu,X)\in \text{UMD}$, 由于 $L_\Phi(\mu,X)$ 中含有与 X 同构的子空间, 则有 $X\in \text{UMD}$.

反之, 若 $X\in \text{UMD}$, 则 X 具有 RN 性质. $L_\Phi(\mu,X)$ 同样具有 RN 性质. 由引理 1 我们往证存在 Φ 函数使得其中的条件成立.

这里用到一个关于 Orlicz 空间自反性的条件, 见 Ren[1]: 实函数空间 L_Φ 是自反的当且仅当存在互补的 Young 函数 M,N 使得对于足够大的 $\|u\|_\Phi$,

$$CN^{-1}\left(\int_\Omega \Phi(u(\omega))d\mu\right)\leqslant \|u\|_\Phi\leqslant KM^{-1}\left(\int_\Omega \Phi(u(\omega)d\mu\right) \tag{3.6}$$

其中 $0<C\leqslant K$.

现在假定 M,N 就是其中确定的函数. 令 $M'(t)=M(K^{-1}t)$, $N'(t)=N(c^{-1}t)$, K,C 都是该结论中的常数, 则 M',N' 与 M,N 分别等价.

为了明确, 设 $L_\Phi(\mu,X)$ 定义在概率空间 (Ω',Σ',P') 上, $f=(f_n)$ 是取值于 $L_\Phi(\mu,X)$ 的鞅, $g=(g_n)$ 是 f 经过 v 的变换. 注意 $f_n(\omega),g_n(\omega)\in L_\Phi(\mu,X)$, 对于几乎所有 $t\in\Omega'$, $g_n(\omega)(t)\in X$. 如果 $L>0$ 使得当 $\|u\|_\Phi\geqslant L$ 时

$$M'(\|u\|_\Phi)=M(K^{-1}\|u\|_\Phi)\leqslant\int_{\Omega'}\Phi(u)dP'.$$

取 $u=\|g_n(\omega)(t)\|_X$ 并且记 $A=\{t,\|g_n(\omega)\|_\Phi>L\}$, 则

$$\begin{aligned}EM'(\|g_n\|)&=\int_\Omega M'(\|g_n(\omega)\|_\Phi)dp\\&=\int_\Omega M'(\|g_n(\omega)\|_\Phi\chi_A+\|g_n(\omega)\|_\Phi\chi_{A^c})dP\\&\leqslant M'(L)+\int_\Omega M'(\|g_n(\omega)\|_\Phi\chi_A)dP\end{aligned}$$

$$\leqslant M'(L) + \int_{\Omega}\int_{\Omega'} \Phi(\| g_n(\omega)(t) \|_X)\chi_A dP' dP$$

$$\leqslant M'(L) + \int_{\Omega'}\int_{\Omega} \Phi(\| g_n(\omega)(t) \|_X) dP dP'.$$

(f_n) 是鞅. $E(df_n|B_{n-1}) = 0$ 意味着对几乎所有 $t \in \Omega'$, $(f_n(\omega)(t))$ 是 X 值鞅. 固定如此的 t, 由 X 的 UMD 性质, 应用 §1 推论 1 得到

$$\int_{\Omega} \Phi(\| g_n(\omega)(t) \|_X) dP \leqslant \int_{\Omega} \Phi(g^*(\omega)(t)) dP$$

$$\leqslant C_\Phi \int_{\Omega} \Phi(f^*(\omega)(t)) dP. \qquad (3.7)$$

现在若取 $u = f^*(\omega)(t)$, 令 $B = \{t, \| f^*(\omega) \|_\Phi > L\}$, 则由所说的结论

$$\int_{\Omega'}\int_{\Omega} \Phi(f^*(\omega)(t)) dP dP'$$

$$= \int_{\Omega}\int_{\Omega'} \Phi(f^*(\omega)(t)\chi_B + f^*(\omega)(t)\chi_{B^c}) dP' dP$$

$$\leqslant \Phi(L) + \int_{\Omega}\int_{\Omega'} \Phi(f^*(\omega)(t)\chi_B) dP' dP$$

$$\leqslant \Phi(L) + \int_{\Omega} N'(\| f^*(\omega) \|_\Phi) dP. \qquad (3.8)$$

特别地, 若 f 是一致有界 Walsh-Paley 鞅, 例如 $f^*(\omega) \leqslant L' < \infty$, 则以上各式给出

$$EM'(\| g_n \|) \leqslant M'(L) + C'_\Phi \Phi(L) + \int_{\Omega} N'(\Phi(L')) dP < \infty,$$

于是由引理 1, $L_\Phi(\mu, X) \in$ UMD.

推论 实值 Orlicz 空间 $L_\Phi(\mu) \in$ UMD 当且仅当 Φ 是限制增长的严格凸 Φ 函数, 即 $1 < q_\Phi \leqslant p_\Phi < \infty$.

证明 由于 $R \in$ UMD. 由定理 2, $L_\Phi(\mu) \in$ UMD. 反之, 若 $L_\Phi(\mu) \in$ UMD, 则 $L_\Phi(\mu)$ 是自反空间. 于是我们已经知道 Φ 满足 $1 < q_\Phi \leqslant p_\Phi < \infty$.

由定理 2 知道, 若 $X \in$ UMD, 则当 $1 < p < \infty$ 时, $L_p(\mu, X)$ 是 UMD 空间. 容易直接证明, 此时 $l_p(X)$ 也是 UMD 空间. 甚至关于

序列 Orlicz 空间 $l_\Phi(X)$ 也有类似的结果，即若 Φ 在 0 点满足限制增长和严格凸条件，则 $X\in\mathrm{UMD}$ 当且仅当 $l_\Phi(X)\in\mathrm{UMD}$.

让我们转到内插空间，这里实和复内插方法都是有效的. 但对于指标要求 $0<\theta<1, 1<p<\infty$. 这里仅证明实方法的结论.

定理 3 设 X_0, X_1 是可比较的内插空间对，二者都是 UMD 空间，$0<\theta<1, 1<p<\infty$，则内插空间 $(X_0,X_1)_{\theta p}$ 是 UMD 空间.

证明 需要证明存在 $c_p>0$ 使得每个取值于 $(X_0,X_1)_{\theta p}$ 的 $(f, v, g)\in\mathscr{M}_0$ 满足

$$\| g_n \|_{L_p((X_0,X_1)_{\theta p})} \leqslant c_p \| f_n \|_{L_p((X_0,X_1)_{\theta p})} \quad \forall\, n\geqslant 1. \tag{3.9}$$

我们应用 Lions-Peetre 内插定理于正规鞅或 WP 鞅. 对于鞅 f 的每个分解 $f=f_0+f_1=(f_{0n})+(f_{1n})$，经过变换 v，对应着 g 的分解 $g=g_0+g_1=(g_{0n})+(g_{1n})$，于是泛函

$$\begin{aligned} K(t,g_n) &= \inf_{g=g_0+g_1}\{\| g_{0n} \|_{L_p(X_0)} + t\| g_{1n} \|_{L_p(X_1)}\} \\ &\leqslant \inf_{f=f_0+f_1}\{c_p\| f_{0n} \|_{L_p(X_0)} + tc_p'\| f_{1n} \|_{L_p(X_1)}\} \\ &= c_p K(c_p' c_p^{-1} t, f_n). \end{aligned}$$

这是由于 $X_0, X_1\in\mathrm{UMD}$，c_p, c_p' 即是定义中出现的常数. 于是

$$\begin{aligned} \| g_n \|^p_{L_p((X_0,X_1)_{\theta p})} &\leqslant c^p \| g_n \|^p_{(L_p(X_0),L_p(X_1))_{\theta p}} \\ &= c^p \int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,g_n))^p \frac{dt}{t} \\ &\leqslant c^p c_p^p \int_0^\infty (t^{-\theta}K(c_p' c_p^{-1} t, f_n))^p \frac{dt}{t} \\ &\leqslant c_{\theta,p} \| f_n \|^p_{(L_p(X_0),L_p(X_1))_{\theta p}} \\ &\leqslant c_{\theta,p} \| f_n \|^p_{L_p((X_0,X_1)_{\theta p})}. \end{aligned}$$

此即(3.9).

下面讨论正规鞅的加权不等式.

定理 4 设 X 是 Banach 空间，W 是测度变换，$1<p<\infty$，则 (i)+(ii)$\Rightarrow$(iii)，(i)+(iii)$\Rightarrow$(iii). 若允许 $(\mathscr{B}_n)$ 变动，则 (ii)+(iii) $\Rightarrow$(i).

(i) $X\in\mathrm{UMD}$.

(ii) $W\in(A_p,\mathscr{B}_n)$.

(iii) 存在 $c=c_p>0$ 使得每个取值于 X 的 $(f,v,g)\in\mathscr{M}(\mathscr{B}_n)$ 满足

(a) $\|g^*\|_p^\wedge\leqslant c\|f\|_p^\wedge$ 或者 (3.10)

(b) $\lambda^p\hat{P}(g^*>\lambda)\leqslant c\|f\|_p^\wedge, \forall\ \lambda>0$. (3.11)

其中的 $(A_p,\mathscr{B}_n)$ 和 $\mathscr{M}(\mathscr{B}_n)$ 是相对于 $(\mathscr{B}_n)$ 的权函数和鞅变换族.

证明 (i)+(ii)⇒(iii). 由于 $(\mathscr{B}_n)$ 是正则的, $W\in(A_p,\mathscr{B}_n)$ 故存在 $1<r<p$ 使得 $W\in(A_r,\mathscr{B}_n)$. 于是有 $K>0$ 对于任何非负可测函数 Y,

$$E(Y|\mathscr{B}_n)^r\leqslant K\hat{E}(Y^r|\mathscr{B}_n), \forall\ n\geqslant 1 \tag{3.12}$$

由 UMD 性质, 对 $\forall\ 1<q<\infty$, $\exists\ c_q>0$ 使得

$$\|g_n\|_q\leqslant c_q\|f_n\|_q, \forall\ n\geqslant 1, (f,v,g)\in\mathscr{M}(\mathscr{B}_n).$$

由此不难得到对于 $\forall\ n$, 当 $k\leqslant n$ 时

$$E(\|g_n\|^q|\mathscr{B}_k)\leqslant c_q^q E(\|f_n\|^q|\mathscr{B}_k) \tag{3.13}$$

取 s, $r<s<p$, 由(3.12), (3.13)和 Jensen 不等式,

$$\|g_k\|^s=\|E(g_n|\mathscr{B}_k)\|^s\leqslant E(\|g_n\|^{\frac{s}{r}}|\mathscr{B}_k)^r$$

$$\leqslant C_{s/r}E(\|f_n\|^{\frac{s}{r}}|\mathscr{B}_k)^r\leqslant KC_{s/r}\hat{E}(\|f_n\|^s|\mathscr{B}_k).$$

记 $h_k=\hat{E}(\|f_n\|^s|\mathscr{B}_k)$, $h=(h_k)$, 则有

$$g_n^{*s}\leqslant KC_{s/r}h_n^*\leqslant KC_{s/r}h^* \tag{3.14}$$

应用 Doob 不等式于 h 得到

$$\|g_n^{*s}\|_{p/s}^\wedge\leqslant c\|h^*\|_{p/s}^\wedge\leqslant c\|h\|_{p/s}^\wedge\leqslant c\|\,\|f_n\|^s\|_{p/s}^\wedge$$

于是

$$\|g_n^*\|_p^\wedge\leqslant c\|f_n\|_p^\wedge. \quad \forall\ n\geqslant 1.$$

由此得到(3.10), 再由 Chebyshev 不等式得到(3.11).

(i)+(iii)⇒(ii). 只须证明(i)+(iii)(b)⇒(ii). 首先注意(iii)(b)意味着对任何正则鞅 $h=(h_n)$.

$$\lambda^p\hat{P}(h^*>\lambda)\leqslant c\|h\|_p^{\wedge p} \tag{3.15}$$

现在取 $f\in L_p^\wedge$ 为标量函数, $x\in X$, $\|x\|=1$, $B\in\mathscr{B}_n$, 令 $h=$

$f\chi_B x, f_n = E(f|\mathscr{B}_n), h_n = E(h|\mathscr{B}_n)$则 $h_n = f_n\chi_B x$，由(3.15)

$$\lambda^p \int_{\{|f_n|>\lambda\}\cap B} d\hat{P} \leqslant c\hat{E}\|h\|^p = c\int_B |f|^p d\hat{P}. \qquad (3.16)$$

对每个自然数 k，记

$$A_k = \{2^k < |f_n| \leqslant 2^{k+1}\} \subset \{2^k < |f_n|\},$$

$A_k \in \mathscr{B}_n$，由(3.16)

$$\int_\Omega |f_n|^p d\hat{P} \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{A_k} 2^{(k+1)p} d\hat{P} = 2^p \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{A_k} |f|^p d\hat{P}$$
$$= 2^p \int_\Omega |f|^p d\hat{P}. \qquad (3.17)$$

将(3.17)应用于函数 $f = W^{-\frac{1}{p-1}}\chi_B$，则

$$\int_B E(W^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{B}_n)^p E(W|\mathscr{B}_n)dP = \int_B E(W^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{B}_n)^p W dP$$
$$= \int_B E(W^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{B}_n)^p d\hat{P} \leqslant c\int_B W^{-\frac{p}{p-1}} d\hat{P}$$
$$= c\int_B W^{-\frac{1}{p-1}} dP = c\int_B E(W^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{B}_n) dP,$$

$B \in \mathscr{B}_n$ 是任意的，由此得出

$$E(W|\mathscr{B}_n)E(W^{-\frac{1}{p-1}}|\mathscr{B}_n)^{p-1} \leqslant c \quad a.e. \quad \forall\, n \geqslant 1$$

即 $W \in (A_p, \mathscr{B}_n)$.

(ii) + (iii)⇒(i). 同样地，我们证明(ii) + (iii)(b)⇒(i). 设 $(f,v,g) \in \mathscr{M}(\mathscr{B}_n)$，$\|f\|_\infty < \infty$. 由 $W \in A_p$，

$$\|f\|_p^{\wedge p} = \int_\Omega \|f\|^p W dP \leqslant \|f\|_\infty^p EW < \infty,$$

由(iii)(b)，

$$\lambda^p \hat{P}(g^* > \lambda) \leqslant c\|f\|_p^{\wedge p} \leqslant c\|f\|_\infty^p, \forall\, \lambda > 0.$$

于是 $\hat{P}(g^* < \infty) = 1$，但 $\hat{P}$ 与 P 有相同 0 测集，故 $P(g^* < \infty) = 1$，$X \in$ UMD.

当 $p = 1$ 时，上面定理中的弱型不等式仍是成立的. 这就是

定理 5 设 X 是 Banach 空间，W 是测度变换，则下面条件 (i) + (ii)⇒(iii). (i) + (iii)⇒(ii). 若允许($\mathscr{B}_n$)变动则(ii) +

(iii)⇒(i).

(i) $X \in$ UMD.

(ii) $W \in (A_1, \mathscr{B}_n)$

(iii) 存在 $c > 0$ 使得每个 X 值 $(f, v, g) \in \mathscr{M}(\mathscr{B}_n)$ 满足

$$\lambda \hat{P}(g^* > \lambda) \leqslant c \| f \|_1^\wedge, \forall \lambda > 0. \tag{3.18}$$

证明 (i) + (ii)⇒(iii). 先设 $\mathcal{J} \in L_1(P, X)$, $f_n = E(\mathcal{J} | \mathscr{B}_n)$, $|\mathcal{J}|_n = E(\|\mathcal{J}\| \,|\mathscr{B}_n)$, $n \geqslant 1$. $(|\mathcal{J}|_n, n \geqslant 1)$ 是实鞅, 类似于(3.12)我们有

$$|\mathcal{J}|_n = E(\|\mathcal{J}\| \,|\mathscr{B}_n) \leqslant K\hat{E}(\|\mathcal{J}\| \,|\mathscr{B}_n), n \geqslant 1. \tag{3.19}$$

于是

$$|\mathcal{J}|^* = \sup_n |\mathcal{J}|_n \leqslant K \sup_n \hat{E}(\|\mathcal{J}\| \,|\mathscr{B}_n) \triangleq K|\mathcal{J}|^{**},$$

由极大不等式

$$\hat{P}(|\mathcal{J}|^* > \lambda) \leqslant \hat{P}(|\mathcal{J}|^{**} > \frac{\lambda}{K}) \leqslant \frac{K}{\lambda}\hat{E}\|\mathcal{J}\|. \forall \lambda > 0. \tag{3.20}$$

定义 $\tau = \inf\{n, |\mathcal{J}|_n > \lambda\}$, 则

$$\lambda \hat{P}(|\mathcal{J}|^* \leqslant \lambda, g^* > \lambda) = \lambda \hat{P}(\tau = \infty, g^* > \lambda)$$

$$\leqslant \lambda \hat{P}(g_\tau^* > \lambda). \tag{3.21}$$

由 Chebyshev 不等式

$$\lambda^2 \hat{P}(g_\tau^* > \lambda) \leqslant c\hat{E}(g_\tau^*)^2$$

由于 $W \in (A_1, \mathscr{B}_n)$ 则 $W \in (A_2, \mathscr{B}_n)$, 由定理 4 的结果知

$$\hat{E}g_\tau^{*2} \leqslant c\hat{E}\|f_\tau\|^2 \leqslant c\hat{E}|\mathcal{J}|_\tau^2.$$

根据$(\mathscr{B}_n)$的正规性

$$|\mathcal{J}|_n = E(\|\mathcal{J}\| \,|\mathscr{B}_n) \leqslant dE(\|\mathcal{J}\| \,|\mathscr{B}_{n-1}) = d|\mathcal{J}|_{n-1}, \forall n \geqslant 1$$

故 $|\mathcal{J}|_\tau \leqslant d|\mathcal{J}|_{\tau-1}$, 于是由(3.19)得出

$$\hat{E}|\mathcal{J}|_\tau^2 \leqslant d^2\hat{E}|\mathcal{J}|_{\tau-1}^2 \leqslant \lambda d^2 \hat{E}|\mathcal{J}|_{\tau-1} \leqslant \lambda K d^2 \hat{E}\|\mathcal{J}\|,$$

(3.21) 变为

$$\lambda \hat{P}(|\mathcal{J}|^* \leqslant \lambda, g^* > \lambda) \leqslant Kd^2\hat{E}\|\mathcal{J}\|$$

从而(3.20) 变为

$$\begin{aligned}\lambda\hat{P}(g^* > \lambda) &\leqslant \lambda\hat{P}(|\mathcal{J}|^* \leqslant \lambda, g^* > \lambda) + \lambda\hat{P}(|\mathcal{J}|^* > \lambda) \\ &\leqslant Kd^2\hat{E}\,\|\mathcal{J}\| + \lambda\hat{E}|\mathcal{J}|^* \\ &\leqslant Kd^2\hat{E}\,\|\mathcal{J}\| + \hat{E}\,\|\mathcal{J}\| = C\hat{E}\,\|\mathcal{J}\|.\end{aligned}$$

对于一般情况($f=(f_n)$ 不必正则),先考虑停止于 n 的鞅得到

$$\lambda\hat{P}(g_n^* > \lambda) \leqslant c\hat{E}\,\|f_n\| \quad \forall\, n \geqslant 1$$

然后得到相应的不等式.

(i) + (iii)⇒(ii). 这里可仿照定理 4 相应部分的证明. 实际上由(iii),对任何实函数 $\mathcal{J} \in L_1^{\wedge}$, $f_n = E(\mathcal{J}|\mathscr{B}_n)$

$$\int_\Omega \|f_n\|\, d\hat{P} \leqslant c\int_\Omega \|\mathcal{J}\|\, d\hat{P},\ n \geqslant 1$$

若 $\mathcal{J}$ 非负,则

$$\int_\Omega \mathcal{J}E(W|\mathscr{B}_n)dP = \int_\Omega \mathcal{J}WdP \leqslant c\int_\Omega \mathcal{J}WdP.$$

$\mathcal{J}$ 是任意的,故 $E(W|\mathscr{B}_n) \leqslant CW\ a.e.$, $\forall\, n \geqslant 1$. 所以 $W \in (A_1, \mathscr{B}_n)$.

(ii) + (iii)⇒(i) 的证明与定理 4 相应部分的证明完全类似.

定理 6 设 X 是 Banach 空间,以下条件等价:

(i) $X \in$ UMD.

(ii) 对于任何 $(f, v, g) \in \mathscr{M}$,若 $\sup\limits_n \|\sum\limits_{i=1}^n i^{-1}df_i\|_1 < \infty$,

则 g_n 满足强大数定律,$\frac{g_n}{n} \to 0\ a.e.$

(iii) 上面(ii)换为弱大数定律成立.

证明 (i)⇒(ii) 设 $d\mathcal{J}_i = i^{-1}df_i (i \geqslant 1)$,则 $\sup\limits_n \|\mathcal{J}_n\|_1 = \sup\limits_n \|\sum\limits_{i=1}^n i^{-1}df_i\|_1 < \infty$. 若 $\tilde{g}$ 是 $\mathcal{J}=(\mathcal{J}_n)$ 经过 v 的变换,由于 $X \in$ UMD, $\tilde{g}_n\ a.e.$ 收敛,由 Kronecher 引理,$\frac{g_n}{n} \to 0\ a.e.$

(ii)⇒(iii) 显然,现证(iii)⇒(i).

由 (iii) 中条件，对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $\sup\limits_n \| \sum\limits_{i=1}^{n} i^{-1} df_i \|_1 < \delta$ 时，$\sup\limits_n P(\frac{\| g_n \|}{n} > \varepsilon) < \varepsilon$. 现在设 $(f, v, g) \in \mathscr{M}$ 并且 $\sup\limits_n \| f_n \|_1 < \delta$，对于任何固定的 $j, k > 0$，考虑由鞅差序列

$$(0, \cdots, 0, (j+1)df_1, \cdots, (j+k)df_k, 0, \cdots)$$

确定的鞅 $\mathscr{F}$，$\mathscr{F}$ 满足

$$\sup_n \| \sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathscr{F}_i}{i} \|_1 = \sup_n \| f_n \|_1 < \delta$$

若 $\tilde{g}$ 是 $\mathscr{F}$ 经过 v 的变换，依定理条件

$$P(\frac{\| \tilde{g}_{j+k} \|}{j+k} > \varepsilon) = P(\frac{1}{j+k} \| \sum_{i=1}^{k} v_i (j+i) df_i \| > \varepsilon) < \varepsilon$$

令 $j \to \infty$ 得到

$$P(\| g_k \| > \varepsilon) = \lim_{j \to \infty} P(\frac{1}{j+k} \| \sum_{i=1}^{k} v_i (j+i) df_i \| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

适当定义停时还可得到 $P(g^* > \varepsilon) \leqslant \varepsilon$. 这说明 $g^* < \infty$ $a.e.$，于是 $X \in$ UMD.

Neveu-Woyczynski 型收敛定理.

对于 X 值鞅 $f = (f_n)$ 和 $r \geqslant 1$，设下鞅 $(\| f_n \|^r, n \geqslant 1)$ 的 Doob 分解是 $\| f_n \|^r = M_n^{(r)} + A_n^{(r)} (n \geqslant 1)$，这里前者是鞅 $(M_0^{(r)} = 0)$，后者是单调增加可料序列. 记 $A_\infty^{(r)} = \lim\limits_{n \to \infty} A_n^{(r)}$ $a.e.$，容易知道

$$E \| f_n \|^r = EM_n^{(r)} + EA_n^{(r)} = EA_n^{(r)},$$
$$\sup_n E \| f_n \|^r = \lim_{n \to \infty} EA_n^{(r)} = EA_\infty^{(r)}. \tag{3.22}$$

定理 7 设 $X \in$ UMD，则

(i) 对于任何 $(f, v, g) \in \mathscr{M}$，$EA_\infty^{(1)} < \infty$ 时 g_n $a.e.$ 收敛.

(ii) 若存在 $r > 1, 0 < p \leqslant r$ 使得 $EA_\infty^{(r)p/r} < \infty$，则存在 $c = c_{rp} > 0$ 使得任何 $(f, v, g) \in \mathscr{M}$

$$Eg^{*p} \leqslant cEA_\infty^{(r)p/r} \tag{3.23}$$

此时 g_n $a.e.$ 收敛.

以上每一条对于 $X\in$ UMD 还是充分的.

证明 1° (i) 是由于 $\|f\|_1=EA_\infty^{(1)}<\infty$，由 Burkholder 定理即得出.

2° 若 $p=r>1$，则 $(f,v,g)\in\mathscr{M}$ 时

$$\|g^*\|_p\leqslant c_p\|f^*\|_p,$$

利用 Doob 不等式即得出(3.23)：

$$Eg^{*p}\leqslant c_p^pEf^{*p}\leqslant c_p^p\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sup_n E\|f_n\|^p$$

$$=c_p^p\left(\frac{p}{p-1}\right)^pEA_\infty^{(p)}<\infty.$$

若 $p<r$，定义 $\tau=\inf\{n,A_{n+1}^{(r)}>\lambda^r\}$，$(\lambda>0)$，则

$$P(f^*>\lambda)\leqslant P(\tau<\infty)+P(f^*>\lambda,\tau=\infty)$$

$$\leqslant P(A_\infty^{(r)}>\lambda^r)+P(f_\tau^*>\lambda).$$

由于

$$Ef^{*p}\leqslant\int_0^\infty P(A_\infty^{(r)}>\lambda^r)d\lambda^p+\int_0^\infty P(f_\tau^*>\lambda)d\lambda^p$$

$$=EA_\infty^{(r)p/r}+\int_0^\infty\lambda^{-r}E\|f_\tau\|^rd\lambda^p$$

$$=EA_\infty^{(r)p/r}+\int_0^\infty\lambda^{-r}EA_\tau^{(r)}d\lambda^p$$

$$=EA_\infty^{(r)p/r}+\int_0^\infty\lambda^{-r}\int_{\{A_\infty^{(r)}>\lambda^r\}}A_\tau^{(r)}dPd\lambda^p$$

$$\leqslant 2EA_\infty^{(r)p/r}+p\int_\Omega A_\infty^{(r)}dP\int_0^{A_\infty^{(r)}}\lambda^{p-r-1}d\lambda$$

$$\leqslant\left(2+\frac{p}{p-r}\right)EA_\infty^{(r)p/r}.$$

由鞅变换不等式

$$Eg^{*p}\leqslant c_p^pEf^{*p}\leqslant c_p^p\left(2+\frac{p}{p-r}\right)EA_\infty^{(r)p/r}.$$

至于定理最后的断言可利用一致有界 WP 鞅满足 $g^*<\infty$ $a.e.$ 得到.

Marcinkiewicz-Zygmund 型大数定律.

定理 8 设 $X\in$ UMD，$(f,v,g)\in\mathscr{M}$，$(df_n)\succ Y_0$，则

(i) $Y_0 \in L\log^+ L$ 时，$\frac{g_n}{n} \to 0\ a.e.$

(ii) $Y_0 \in L_p(p>1)$ 时，$\frac{g_n}{n^{1-\varepsilon}} \to 0\ a.e.$，其中 $0<\varepsilon<1$ 是某个正数.

这一定理的证明与 Ⅷ. §3 定理 5 的证明类似，这里略去.

§4 奇异积分算子的有界性

本章开头已经定义了 H，象实值情况一样，直接的积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t-s)}{s}ds$$

一般来说只有在主值意义下才有意义. 所以用截断 Hilbert 变换 $H_\varepsilon f(t)$，而后令

$$Hf(t)=\lim_{\varepsilon\to 0+}H_\varepsilon f(t),f\in L_p(R,X). \tag{4.1}$$

只要此极限 $a.e.$ 存在. 另一方面，Hilbert 变换的周期形式，即共轭函数是指

$$\widetilde{H}f(t)=\lim_{\delta\to 0+}\widetilde{H}_\delta f(t), \tag{4.2}$$

假若此极限 $a.e.$ 存在，其中

$$\widetilde{H}_\delta f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|s|\leq\pi}f(t-s)\cot\frac{s}{2}ds,f\in L_p(T,X).$$

称(0.2)为 Riesz 不等式：若空间 X 能保证 Riesz 不等式成立($1<p<\infty$)，即 H 在 $L_p(R,X)$ 上有界，则记为 $X\in HT$.

首先我们给出一些基本的结论，其证明与实值情况类似.

引理 1 设 $1<p,q<\infty$，$R=(-\infty,\infty)$，$T=(-\pi,\pi]$，则

(i) H 在 $L_p(R,X)$ 上有界当且仅当 $\widetilde{H}$ 在 $L_p(T,X)$ 上有界.

(ii) $Hf(t)$ 对于每个 $f\in L_p(R,X)$ $a.e.$ 存在当且仅当 $\widetilde{H}f(t)$ 对于每个 $f\in L_p(T,X)$ $a.e.$ 存在.

(iii) $\widetilde{H}f(t)$ 对于每个 $f\in L_p(T,X)$ $a.e.$ 存在当且仅当它对于每个 $f\in L_q(T,X)$ $a.e.$ 存在.

(iv) 对于每个 $\delta > 0$，$\widetilde{H}_\delta$ 在 $L_2(T,X)$ 上有界.

(v) H 在 $L_p(R,X)$ 上有界当且仅当它在 $L_q(R,X^*)$ 有界.

这里$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$X^*$ 是 X 的共轭.

证明 (i)，(ii)，(iv) 可以象实值情况一样通过计算来证明. (iii) 可以通过Calderon-Zygmund 分解而得到. 至于(v)，是由于对于每个 $f \in L_p(R,X)$，

$$\| f \|_p = \sup_{\| g \| \leqslant 1} \left| \int < g(\omega), f(\omega) > d\mu \right|,$$

其中 $g \in L_q(R,X^*)$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

应用上面结论还可证明：

引理 2 设 X,Y,Z 是 Banach 空间，则下面每一条都能保证从 $X \in HT$ 推出 $Y \in HT$：(i) Y 与 X 同构，(ii)$Y \subset X$，(iii)$Z \subset X$，$Y = X/Z$，(iv)$Y = Z \oplus Z$，其中 $Z \in HT$. (v) $Y = X^*$，实际上有 $X \in HT$ 当且仅当 $X^* \in HT$.

本节主要结论是

定理 1 $X \in HT$ 当且仅当 $X \in$ UMD.

关于这一定理，从 UMD 到 HT 的证明是由 Burkholder 和 McConnell 给出的. 反过来的证明是由 Bourgain 给出的. 让我们通过一些引理和定理来阐述.

引理 3 设 $X \in$ UMD. $1 < p < \infty$，则存在 $c_p > 0$ 使得若 $d_k = \psi_k(v_0,\cdots,v_{k-1})$，$\psi_k: R^k \to X$ 是一列函数，$r_0,\cdots,r_k$ 是 Rademacher 函数序列($r_0 = 1$)，$f_n = \sum_{k=1}^{n} d_k r_k$，则

$$c_p^{-1} \| f_n \|_p^p \leqslant \int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} d_k(t) r_k(s) \right\|^p dt ds \leqslant c_p \| f_n \|_p^p. \quad (4.3)$$

证明 考虑乘积空间$[0,1] \times [0,1]$，不妨视$(d_1,d_2,\cdots)$对应的 σ 代数与$(r_0,r_1,\cdots)$ 对应的 σ 代数独立. 此时$(d_1 r_1, d_2 r_2,\cdots)$ 是鞅差. 令 $\varepsilon = (r_1(t)r_1(s), r_2(t)r_2(s),\cdots)$ 则 ε 是取 ± 1 值的 $R.V.$

序列. 此时若 $g_n = \sum_{k=1}^{n} d_k(t) r_k(s)$, 则 $f_n = \sum_{k=1}^{n} d_k(t) r_k(t) = \sum_{k=1}^{n} d_k(t) r_k(s) \cdot r_k(t) r_k(s)$, $g = (g_n)$ 是 $f = (f_n)$ 经过 ϵ 的变换, 反过来 f 也是 g 经过 ϵ 的变换. 由 Burkholder 不等式得到(4.3).

定理 2 设 $X \in \mathrm{UMD}$, $1 < p < \infty$, 则存在 $c_p > 0$, 使得对于任何自然数 n 和 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in X$, 若

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^k, \tag{4.4}$$

$$v(re^{i\theta} = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin k\theta) - b_k \cos k\theta) r^k, \tag{4.5}$$

则

$$\int_0^{2\pi} \| v(re^{i\theta}) \|^p d\theta \leqslant c_p \int_0^{2\pi} \| u(re^{i\theta}) \|^p d\theta, \forall\ r \geqslant 0. \tag{4.6}$$

证明 仍考虑 Rademacher 函数列 $\{r_k\}$, 令 $0 < \delta < \frac{1}{2}$,

$$d_k = \delta r_{2k-1}, \quad e_k = \delta r_{2k},$$

$X_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$, $Y_n = \sum_{k=1}^{n} e_k$, $Z_n = X_n + Y_n i \quad (i^2 = -1)$. 不妨设 $Z_0 = 0$. 记

$$W_k = \prod_{j=0}^{k-1} \chi_{(|Z_j| < 1)},$$

定义 $\tau(t) = \inf\{n, |z_n(t)| \geqslant 1\}$, 实际上 W_k 即是 $\{t, \tau(t) \geqslant k\}$ 的特征函数. 特别地, $W_1 = 1$, 若 $k \geqslant 2$, W_k 是 $r_1, \cdots, r_{2k-2}$ 的可测函数, 于是 $(W_1 d_1, W_2 d_2, \cdots)$ 是鞅差. 记对应的鞅为 f, 其均方函数

$$S^{(2)}(f) = (\sum_{k=1}^{\infty} |W_k d_k|^2)^{1/2} = \delta(\sum_{k=1}^{\infty} W_k)^{1/2} = \delta \tau^{1/2}.$$

(因为 $W_k^2 = W_k$, $|d_k| = \delta$). 由于

$$|f_n(t)| = \begin{cases} |X_n(t)| \leqslant |Z_n(t)| < 1, & n < \tau(t), \\ |X_\tau(t)| \leqslant 1 + \delta < 2, & n \geqslant \tau(t). \end{cases}$$

总之 $\| f \|_p \leqslant \| f \|_\infty \leqslant 2$. 根据实值鞅的 Burkholder-Gundy 不

等式

$$\delta \| \tau^{1/2} \|_p = \| S^{(2)}(f) \|_p \leqslant c_p \| f \|_p \leqslant 2c_p \tag{4.7}$$

所以 $\tau = \sum_{k=1}^{\infty} W_k < \infty$ $a.e.$ 由此得出

$$\lim_{n\to\infty} Z_{\tau\wedge n} = Z_\tau \quad a.e.$$

$$|Z_{\tau\wedge n}| \leqslant 1 + 2\delta < 2, \tag{4.8}$$

$$1 \leqslant |Z_\tau| \leqslant 1 + 2\delta \quad a.e.$$

另一方面，作为 $(x+iy)^k$ 的实部和虚部，$r^k\cos k\theta$ 和 $r^k\sin k\theta$ 关于 x,y 的三阶导数的绝对值 $\leqslant k^3 2^{k-3}$，$(|z| < 2)$. 记

$$\gamma = n^3 2^n \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|).$$

由 Taylor 定理和 Laplace 方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$，函数 u 必满足

$$\| u(x+h, y+k) - u(x,y) - u_x(x,y)h - u_y(x,y)k - u_{xy}(x,y)hk \| \leqslant \gamma\delta^3,$$

此处 $|x+iy| < 1$，$|h| = |k| = \delta$. 若 $W_k(t) = 1$，则 $|Z_{k-1}(t)| < 1$，$|Z_k(t)| < 2$，从而

$$W_k \| u(Z_k) - u(Z_{k-1}) - u_x(Z_{k-1})d_k - u_y(Z_{k-1})e_k - u_{xy}(Z_{k-1})d_k e_k \| \leqslant \gamma\delta^3 W_k. \tag{4.9}$$

固定 n，令

$$U = \sum_{k=1}^{n} W_k [u_x(Z_{k-1})d_k + u_y(Z_{k-1})e_k] \tag{4.10}$$

$$W = \sum_{k=1}^{n} W_k u_{xy}(Z_{k-1}) d_k e_k \tag{4.11}$$

注意 $\tau \wedge n = \sum_{k=1}^{n} W_k$，所以(4.9)，(4.10)，(4.11) 意味着

$$u(Z_{\tau\wedge n}) - U - W| \leqslant \gamma\delta^3 (\tau \wedge n).$$

或者

$$\| u(Z_{\tau\wedge n}) - U \|_p \leqslant \| W \|_p + \gamma\delta^3 \| \tau \wedge n \|_p \tag{4.12}$$

由(4.7) 知道

$$\| \tau \wedge n \|_p \leqslant \| \tau \|_{2p} \leqslant c_p \delta^{-2}. \tag{4.13}$$

为了估计 W，记

$$W = \sum_{j=1}^{n} (a_j W^{2j-1} + b_j W^{2j}) \tag{4.14}$$

这里 W^j 关于 W 象 u^j 关于 u 一样，特别地 $u^{2j-1}(re^{i\theta}) = r^j \cos j\theta$，$u^{2j}(re^{i\theta}) = r^j \sin j\theta$. 注意

$$(W_1 u^j_{xj}(Z_0) d_1 e_1, \cdots, W_n u^j_{xj}(Z_{n-1}) d_n e_n, 0, \cdots)$$

是鞅差序列，第 k 项以 $k^2\delta^2$ 为界. 由实值鞅的 Burkholder-Gundy 不等式

$$\| W^j \|_p \leqslant c_p n^2 \delta^2 \| (\sum_{k=1}^{n} W_k^2)^{1/2} \|_p = c_p n^2 \delta^2 \| (\tau \wedge n)^{1/2} \|_p.$$

由(4.7)和(4.14)得到 $\| W \|_p \leqslant c_p \gamma \delta$，由(4.12)和(4.13)得出

$$\| u(Z_{\tau \wedge n}) - U \|_p \leqslant c_p \gamma \delta \tag{4.15}$$

同理

$$\| v(Z_{\tau \wedge n}) - V \|_p \leqslant c_p \gamma \delta, \tag{4.16}$$

其中

$$V = \sum_{k=1}^{n} W_k [v_x(Z_{k-1}) d_k + v_y(Z_{k-1}) e_k].$$

下面证明

$$\| V \|_p = c_p \| U \|_p. \tag{4.17}$$

显然 V 可表示为 $\sum_{k=1}^{2n} D_k r_k$ 的形式，其结构如同引理 3. 于是由该引理结论

$$\| V \|_p \sim \int_0^1 \int_0^1 \| \sum_{k=1}^{n} \delta W_k(t) [v_x(Z_{k-1}(t)) r_{2k-1}(s) + v_y(Z_{k-1}(t)) r_{2k}(s)] \|^p ds dt$$

类似地，

$$\| U \|_p \sim \int_0^1 \int_0^1 \| \sum_{k=1}^{n} \delta W_k(t) [u_x(Z_{k-1}(t)) r_{2k-1}(s) + u_y(Z_{k-1}(t)) r_{2k}(s)] \|^p ds dt$$

注意两个二重积分中关于 s 的积分是相等的，

$$u_x = v_y, \quad u_y = - v_r$$

并且映射 $s \to (-r_1(s), r_2(s), -r_3(s), r_4(s), \cdots)$ 与 $s \to (r_2(s), r_1(s), r_4(s), r_3(s), \cdots)$ 是同分布的. 于是两个二重积分相等. 所以 (4.17) 成立.

由(4.15),(4.16),(4.17),我们有

$$\| v(Z_{\tau \wedge n}) \|_p \leqslant c_p \| u(Z_{\tau \wedge n}) \|_p + c_p \gamma \delta.$$

由(4.8) 和 u, v 在 $|z| < 2$ 中的有界性和连续性

$$\| v(Z_\tau) \|_p \leqslant c_p \| u(Z_\tau) \|_p + c_p \gamma \delta.$$

若 $u^\alpha(re^{i\theta}) = u(re^{i(\theta+\alpha)}), v^\alpha(re^{i\theta}) = u(re^{i(\theta+\alpha)})$,则同样的不等式对于 u^α, v^α 成立. 于是关于 α 积分

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \| v(|Z_\tau| e^{i\alpha}) \|^p d\alpha dt \leqslant c_p \int_0^1 \int_0^{2\pi} \| u(|Z_\tau| e^{i\theta}) \|^p d\alpha dt + c_p \gamma^p \delta^p.$$

令 $\delta \to 0$,由(4.8)最后一式和控制收敛定理得出 $r = 1$ 时的(4.6),并从而得出 $r \geqslant 0$ 的一般情况. 定理得证.

定理 3 设 $X \in \text{UMD}, 1 < p < \infty$. 若 $f \in L_p(T, X)$,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} f(t) dt \quad (4.18)$$

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2r\sin(\theta - t)}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2} f(t) dt \quad (4.19)$$

则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \| v(re^{i\theta}) \|^p d\theta \leqslant c_p \int_{-\pi}^{\pi} \| u(re^{i\theta}) \|^p d\theta, 0 \leqslant r < 1. \quad (4.20)$$

证明 象实值情况一样, $u - u(0)$ 和 v 分别是(4.4) 和(4.5) 在园 $|z| = r$ 上的一致极限. 其中 a_k, b_k 是 f 的 Fourier 系数. 于是定理 2 保证了(4.20) 对于 $u - u(0)$ 和 v 成立,从而对于 u, v 成立.

定理 1 充分性的证明.

对于

$$\widetilde{H}_\epsilon f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{0<\epsilon<|s|\leqslant\pi} f(t - s) \cot \frac{s}{2} ds,$$

其中 $f \in L_p(T,X)$，$T=(-\pi,\pi]$. 不妨设 f 是周期延拓到 R 上的. 设 $v(re^{i\theta})$ 如同(4.19)，其中 $r=1-\varepsilon$. 将 $\cot\frac{s}{2}$ 展开，则有

$$\|\widetilde{H}_\varepsilon f(t)-v(re^{it})\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f(t-s)\|K_r(s)ds. \tag{4.21}$$

这里 K_r 是非负函数并且 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_r(s)ds<1$. (4.21) 右端是一个卷积，故有不等式

$$\|f(t-s)K_r(s)\|_p\leqslant\|f\|_p\|K_r\|_1.$$

另一方面由(4.20)，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\|v(re^{it})\|^p dt\leqslant c_p\|f\|_p^p$$

于是

$$\|\widetilde{H}_\varepsilon f\|_p\leqslant c_p\|f\|_p. \tag{4.22}$$

由此即得出所要的结论.

推论 1 设 $X\in$ UMD，$1<p<\infty$，则存在 $c_p>0$ 使得

$$\|Hf\|_p\leqslant c_p\|f\|_p,\quad \forall f\in L_p(R,X). \tag{4.23}$$

此推论可由引理 1 的结论得出.

为了证明定理 1 的必要性. 我们记

$$L^2(T)\otimes X=\{\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(t)x_j\,|\,\varphi_j\in L^2(T),x_j\in X,n\geqslant 1\}.$$

引理 4 设 $g(\theta)=\sum\limits_{|k|\leqslant\frac{n}{2}}b_ke^{ik\theta}$ 是任一 X 值三角多项式，$\varphi\in L^2(T)$ 是任一标量函数，Fourier 系数 $\hat{\varphi}(0)=0$，H 是 $L^2(T)\otimes X$ 上的 Hilbert 变换，则

$$H(\varphi(n\theta)g(\theta))=H\varphi(n\theta)\cdot g(\theta). \tag{4.24}$$

证明 注意 $\varphi(n\theta)g(\theta)$ 的 Fouricr 级数是

$$\varphi(n\theta)g(\theta)\sim\sum_{|k|<[\frac{n}{2}]}\sum_{0\neq l\in Z}\hat{\varphi}(ln)b_ke^{i(k+ln)\theta}$$

注意当 $(k,l)\neq(k',l')$ 时 $k+ln\neq k'+l'n$. 又 $\mathrm{sign}(k+ln)=\mathrm{sign}l$，由此即得到(4.24)..

引理 5 设 $X \in HT, c = c_2$ 是对应于 $p = 2$ 的常系数. 则对于任意 $\varphi_k \in L^2(T), \hat{\varphi}(0) = 0$ 和 $g_k = g_k(\theta_1, \cdots, \theta_k) \in L^2(T^k, X)$

$$\int_{T^{n+1}} \| \sum_{k=1}^{n} g_k H\varphi_k(\theta_{k+1}) \|_X^2 d\theta \leqslant c_2^2 \int_{T^{n+1}} \| \sum_{k=1}^{n} g_k \varphi_k(\theta_{k+1}) \|_X^2 d\theta \tag{4.25}$$

证明 不失一般性可设 g_k 是三角多项式. 于是可取 $n_k > 2 - m_k, m_k$ 是 g_k 的阶. 由引理 4 和 HT 的条件

$$\int_T \| \sum_{k=1}^{n} g_k(\theta_1 + \alpha, \cdots, \theta_k + \alpha) H\varphi_k(\theta_{k+1} + n_k\alpha) \|_X^2 d\alpha$$

$$\leqslant c_2^2 \int_T \| \sum_{k=1}^{n} g_k(\theta_1 + \alpha, \cdots, \theta_k + \alpha) \varphi_k(\theta_{k+1} + n_k\alpha) \|_X^2 d\alpha$$

这里 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_{n+1}) \in T^{n+1}$. 现在若关于 $d\theta$ 在 T^{n+1} 积分并应用 Fubini 定理, 则变量 α 不再出现并且与 $d\alpha$ 无关. 由此引理得证.

定理 1 必要性的证明.

由 $\hat{\varphi}(0) = 0$, 故 $H(H\varphi_k) = -\varphi_k$. 实际上在引理 5 中相反的不等号也是成立的. 为证明必要性, 只须就 WP 鞅予以证明即可. 此时我们有

$$d_k = D_k(r_1(t), \cdots, r_k(t)) r_{k+1}(t).$$

这里 (r_k) 是 Rademacher 函数序列, D_k 是 X 值函数. 我们要证明对于任何 $n \geqslant 1$ 和 $\varepsilon_k = \pm 1$,

$$\int_0^1 \| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k d_k(t) \|_X^2 dt \leqslant c \int_0^1 \| \sum_{k=1}^{n} d_k(t) \|_X^2 dt. \tag{4.26}$$

为此, 令 $s(\theta) = \operatorname{sign} \cos\theta$, 于是由引理 5,

$$\int_{T^{n+1}} \| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k D_k(s(\theta_1), \cdots, s(\theta_k)) s(\theta_{k+1}) \|^2 d\theta$$

$$\leqslant c_2^2 \int_{T^{n+1}} \| \sum_{k=1}^{n} D_k(s(\theta_1), \cdots, s(\theta_k)) \varepsilon_k H s(\theta_{k+1}) \|_X^2 d\theta$$

$$= c_2^2 \int_{T^{n+1}} \| \sum_{k=1}^{n} D_k(s(\theta_1), \cdots, s(\theta_k)) H(s(\theta_{k+1})) \|_X^2 d\theta$$

$$\leqslant c_2^4\int_{T^{n+1}} \| \sum_{k=1}^n D_k(s(\theta_1),\cdots,s(\theta_k))s(\theta_{k+1}) \|_X^2 d\theta$$

中间等号成立是因为 $\varepsilon_k Hs(\theta_{k+1}) = H(\varepsilon_k\theta_{k+1})$,($s$ 是偶函数,Hs 是奇函数),然后在 T^{n+1} 上作代换

$$(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n+1}) \to (\theta_1,\varepsilon_1\theta_1,\cdots,\varepsilon_n\theta_{n+1})$$

得到. 注意$(r_k,k \geqslant 1)$ 和$(s(\theta_k),k \geqslant 1)$ 是同分布的,第一式即(2.26) 左端,最后的式子即(2.26) 的右端. 证毕.

称函数

$$H^*f(t) = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\pi} \| \int_{|s|>\varepsilon} \frac{f(t-s)}{s} ds \|$$

为 f 的极大 Hilbert 变换,应用和实值情况一样的方法可以证明

推论 2　$X \in$ UMD当且仅当对于任何(某个)$1 < p < \infty$,存在 $c_p > 0$ 使得

$$\| H^* f \|_p \leqslant c_p \| f \|_p, f \in L^p(R,X) \tag{4.27}$$

关于其它类型的奇异积分算子,例如带有满足一定条件的奇核的卷积算子,Bourgain 证明了在值空间为 UMD 空间时相应的算子的有界性. Bourgain 还证明了 Littlewood-Paley 型不等式. 在 Hardy 空间理论中 Burkholder 还证明了共轭函数的非切向极大函数的凸 Φ 不等式,Blassco 讨论了 Hardy 空间若干范数的等价性,Rubio de Francia 研究了向量值 Fourier 级数的 $a.e.$ 收敛性以及更为一般的卷积算子的有界性. Garling 建立了由 Brown 运动作成的向量值随机积分的不等式. 另一方面,McConnel 证明了经 Hörmander 修正的 Mikhlin 乘子理论的向量值类比并用于 Littlewood-Paley 不等式. Zimmermann 将 Littlewood-Paley, Marcinkiewicz, Mikhlin 乘子定理推广到多维空间和向量值的情况. 事实证明所有这些都和空间的 UMD 性质密切相关. 关于这些,我们不准备在这里一一介绍了.

例 1　设 $1 < p < \infty$,称 Hilbert 空间 H 上的紧算子 A 属于 Schatten 类 $C_p(H)$. 若

$$\|A\| = [tr(A^*A)^{p/2}]^{1/p} < \infty.$$

其中"tr"表示后面算子的迹.

为此只须证明当 $p = 2^k$(k 是自然数)时结论成立. 对于 $p > 2$ 的其它情况,采用内插方法证明之. 对于 $1 < p \leqslant 2$,应用 $C_p(H)$ 与 $C_q(H)$ 的共轭性得到($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

对于 Hilbert 变换,当 f,g 是 $T = (-\pi,\pi]$ 上的实函数并且 $\hat{f}(0)\hat{g}(0) = 0$ 时,

$$Hf \cdot Hg - fg = H(fHg + Hf \cdot g) \tag{4.28}$$

此式两端都是双线性的,所以对于复函数的情况仍然成立. 实际上对于 f 和 g 取值于一个代数的情况仍然成立. Hilbert 空间上的算子可充当此种代数. 现在定义

$$f = \sum_{k\in z} A_k e^{ik\theta}, f^* = \sum_{k\in z} A_k^* e^{-ik\theta}, A_k \in l^2 \otimes l^2$$

注意点态地有 $f^*(\theta) = f(\theta)^*$,所以(4.40)给出

$$Hf \cdot (Hf)^* = f \cdot f^* + H[f(Hf)^* + Hf \cdot f^*],$$

由此得到

$$\begin{aligned}\|Hf\|_{C_4}^2 &= \|Hf \cdot (Hf)^*\|_{C_2} \\ &\leqslant \|f\|_{C_4}^2 + \|H[f(Hf)^* + Hf \cdot f^*]\|_{C_2}.\end{aligned}$$

$C_2(H)$ 是Hilbert空间,所以它是UMD空间,对上式两端取 $L^2(T)$ 范数得到

$$\|Hf\|_{L^4(T,C_4)}^2 \leqslant \|f\|_{L^4(T,C_4)}^2 + 2\|f\|_{L^4(T,C_4)}\|Hf\|_{L^4(T,C_4)},$$

这表明 $H \otimes Id_{C_4}$ 在 $L^4(T) \otimes C_4$ 上的有界性. 所以 $C_4(H) \in$ UMD. 依照上面所说的办法得到 $C_p(H) \in$ UMD$(1 < p < \infty)$.

我们在前面 §3 已知道,$X \in$ UMD,则 X 必是超自反空间. 下面例子(属于 Pisier,其证明方法属于 Gutierrez 和 Lacey)说明对于一个超自反空间 X,H 在 $L_2(R,X)$ 上是无界的,从而 X 不是 UMD 空间.

例 2 对于实数组 $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,我们记

$$\| \alpha \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|, \; \| \alpha \|_s = \max_{1\leqslant m\leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \right| \tag{4.29}$$

首先我们证明，存在 $c > 0$，使得对于每个 n，若 $H: L^2(R, l^1(n)) \to L^2(R, l^s(n))$，这里 $l^1(n)$，$l^s(n)$ 即是分别以上述范数作成的 n 维空间，则 $\| H \| > c\log n$.

实际上，设 $A_j = (\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})$，$f_j = \chi_{A_j}$，$j = 1, \cdots, n$. 则对于 $f = (f_1, \cdots, f_n)$，$\| f \|_{L^2(R, l^1(n))} = 1$. 此外

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{k} Hf_j(t) \right| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left| \log \left| \frac{t}{t - \frac{k}{n}} \right| \right|.$$

若 $t \in (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$，则 $0 < t - \frac{k-1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$，所以 $n \leqslant \frac{1}{t - \frac{k-1}{n}}$，

$$\log(k+1) \leqslant \log \left| 1 + \frac{\frac{k}{n}}{1 - \frac{k}{n}} \right| \leqslant \max_{1\leqslant m\leqslant n} \left| \log \left| 1 + \frac{\frac{m}{n}}{t - \frac{m}{n}} \right| \right|.$$

于是

$$\int_R [\max_{1\leqslant m\leqslant n} | \sum_{j=1}^{m} Hf_j(t) |]^2 dt \geqslant \int_0^1 [\max_{1\leqslant m\leqslant n} | \sum_{j=1}^{m} Hf_j(t) |]^2 dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} [\max_{1\leqslant m\leqslant n} | \sum_{j=1}^{m} Hf_j(t) |]^2 dt \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{(\log k)^2}{n}.$$

但

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{n\log^2 n} \sum_{k=1}^{n} \log^2 k = c > 0,$$

故 $\| H \| \geqslant c\log n$.

现在设 $0 < \theta < 1$ 固定，用内插方法容易得出在 R^n 的 $l^1(n)$ 范数和 $l^2(n)$ 范数之间可定义新范数 $\| \cdot \|_{\theta,n}$，记新范数之下的空间为 $E_{\theta,n}$，使得

$$\| \alpha \|_s \leqslant \| \alpha \|_{\theta,n} \leqslant (b\log n)^\theta \| \alpha \|_1, \forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

这里 $n \geqslant 1$ 是任意的，b 为固定常数. 对于固定的 m，取 n 使得

$\log^{1-\theta} n \geqslant \frac{b}{c}\log m$，这里 c 即上面讨论中的常数. 再取 $f \in L^2(R, l^1(n))$ 使得 $\| f \|_2 = 1$ 并且 $\| Hf \|_2 > c\log n$，令 $F = f/b^\theta \log^\theta n$，则

$$\| F \|_2 = \| f \|_{2(\theta,n)}/b^\theta \log^\theta n \leqslant \frac{b^\theta \log^\theta n}{b^\theta \log^\theta n} = 1.$$

但

$$\begin{aligned} \| Hf \|_2 &\geqslant \| Hf \|_{2(\theta,n)} \geqslant \| Hf \|_{2(s)} \\ &= \| Hf \|_{2(s)}/b^\theta \log^\theta n \\ &> c\log n/b^\theta \log^\theta n = \frac{c}{b^\theta}\log^{1-\theta} n, \end{aligned} \tag{4.30}$$

所以 H 在 $X = (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_{\theta,n})_2$ 上不是有界的.

§5 经典分析与鞅论中不等式的最优系数

在此之前我们建立的鞅论或分析中的不等式都是确定有某个常数 C 存在，使之对于一类鞅或函数都能成立. 至于 C 的大小并不关心. 事实上 C 的最优值在理论上和应用上都是有意义的. 自 80 年代末以来，Burkholder 发展了一套技巧用以确定这些数值，其中包括鞅变换不等式，微分从属不等式，均方函数不等式（即 Burkholder-Gundy 不等式），随机积分不等式中的常数，以及 Haar 系在 $L_p[0,1](p > 1)$ 中的无条件常数，收缩投影不等式，指数不等式中常数的最优值. 这里将分别加以介绍.

假定 $(d_k, k \geqslant 0)$ 是 X 值鞅差，$v = (\varepsilon_n)$，$\varepsilon_n = \pm 1$，若 $X \in$ UMD，则有不等式

$$\| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i d_i \|_p \leqslant \beta_p(X) \| \sum_{i=0}^{n} d_i \|_p, n \geqslant 1 \tag{5.1}$$

称(5.1)是精确的，若对于任何 $\beta < \beta_p(X)$，存在概率空间和鞅 f，g，其中 g 是 f 经过某个 v 的变换使得 $\| g \|_p > \beta \| f \|_p$. 同样地，

若 $L^p[0,1]$ 中的序列 $e=(e_n,n\geqslant 0)$ 是无条件基，即对任何实数序列 $(\alpha_n,n\geqslant 0)$ 和 $\varepsilon_n=\pm 1$，当 $\|\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e_k\|_p=1$ 时

$$\|\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\alpha_k e_k\|_p\leqslant\beta<\infty. \tag{5.2}$$

称 $\beta_p(e)=\beta$ 是最优的，若它是满足此不等式的最小的 β 值. 特别地对于 Haar 函数系 $h=(h_n,n\geqslant 0)$，其中

$$h_0=\chi_{[0,1)},h_1=\chi_{[0,\frac{1}{2})}-\chi_{[\frac{1}{2},1)},$$

$$h_2=\chi_{[0,\frac{1}{4})}-\chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})},h_3=\chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}-\chi_{[\frac{3}{4},1)},$$

$$h_4=\chi_{[0,\frac{1}{8})}-\chi_{[\frac{1}{8},\frac{1}{4})},h_5=\chi_{[\frac{1}{4},\frac{3}{8})}-\chi_{[\frac{3}{8},\frac{1}{2})},$$

……

早在 1937 年 Marcinkiewicz 就证明了 $(h_n,n\geqslant 0)$ 是 $L^p[0,1]$ 的无条件基，但最优系数 $\beta_p(h)=?$

让我们先来考察鞅变换不等式.

定理 1 设 $\beta\in[1,\infty)$，则不等式(5.1)中的

$$\beta_p(X)\leqslant\beta \tag{5.3}$$

当且仅当存在双凹函数 $u:X\times X\to R$ 使得任何 $(x,y)\in X\times X$，

$$\|\frac{x+y}{2}\|^p-\beta^p\|\frac{x-y}{2}\|^p\leqslant u(x,y) \tag{5.4}$$

证明 充分性 假定(5.4)成立，记左端的函数为 $F(x,y)$. 即

$$F(x,y)=\|\frac{x+y}{2}\|^p-\beta^p\|\frac{x-y}{2}\|^p, \tag{5.5}$$

我们证明对于任何 $(f,v,g)\in\mathscr{M}_0(X)$

$$\|g\|_p\leqslant\beta\|f\|_p. \tag{5.6}$$

正象 §1 定理 3 证明的 2° 所作的那样，可以假定 f 是简单鞅，从而 g 也是简单鞅. 现在考虑 $X\times X$ 值鞅 $Z=(Z_n,n\geqslant 0)$，其中 $Z_n=(X_n,Y_n)$，

$$X_n = g_n + f_n = \sum_{k=0}^{n} (\varepsilon_k + 1) df_k$$
$$Y_n = g_n - f_n = \sum_{k=0}^{n} (\varepsilon_k - 1) df_k \tag{5.7}$$

由定义可知，对于 $n \geqslant 1$，不是 $X_n - X_{n-1} \equiv 0$ 就是 $Y_n - Y_{n-1} \equiv 0$. 所以称 Z 是"之字"鞅.

若 u 是 $X \times X$ 上的双凹函数，即 $\forall\, x,y \in X, u(\cdot,y), u(x,\cdot)$ 是凹函数，注意对于凹函数，通常的 Jensen 不等式中相反的不等号成立. 由于 $Z_n = (X_n, Y_{n-1})$ 或者 $Z_n = (X_{n-1}, Y_n)$，所以

$$\begin{aligned} E(u(X_n, Y_{n-1}) \mid \mathscr{B}_{n-1}) &\leqslant u(E(X_n \mid \mathscr{B}_{n-1}), Y_{n-1}) \\ &= u(X_{n-1}, Y_{n-1}), \\ E(u(X_{n-1}, Y_n) \mid \mathscr{B}_{n-1}) &\leqslant u(X_{n-1}, E(Y_n \mid \mathscr{B}_{n-1})) \\ &= u(X_{n-1}, Y_{n-1}). \end{aligned}$$

总之有

$$Eu(Z_n) \leqslant Eu(Z_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant Eu(Z_0) \tag{5.8}$$

假若如(5.4)所设，u 是 F 的强函数，则两边积分，由(5.7)

$$\| g_n \|_p^p - \beta^p \| f_n \|_p^p = Ef(Z_n) \leqslant Eu(Z_n) \leqslant Eu(Z_0). \tag{5.9}$$

此外设 u 满足齐性条件

$$u(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|^p u(x,y). \forall\ \alpha \in R \tag{5.10}$$

否则以 $\inf\limits_{\lambda \neq 0} u(\lambda x, \lambda y)/|\lambda|^p$ 代替 u，既具有所说的齐性又满足(5.4). 若 $Z_0 = (X_0, 0)$ 则

$$u(Z_0) = \frac{1}{2}[u(X_0,0) + u(-X_0,0)] \leqslant u(0,0) = 0,$$

对于 $Z_0 = (0, Y_0)$ 情况也一样. 总之此时有 $u(Z_0) \leqslant 0$，由此得到 $\| g_n \|_p^p - \beta^p \| f_n \|_p^p \leqslant 0$，即(5.3)成立.

必要性　设(5.3)成立. 定义集合 $\widetilde{Z}(x,y) = \{Z = (Z_n), Z$ 是 $[0,1)$ 上定义的简单"之字"鞅. $Z_0 = (x,y)\}$ 并且令

$$U(x,y) = \sup\{EF(Z_\infty), Z \in \widetilde{Z}(x,y)\}$$

这里 F 仍如开头所定义并且由于是简单鞅，$Z_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} Z_n\ a.e.$ 存在.

取 $Z_n \equiv (x,y)$ 知道 $F(x,y) \leqslant U(x,y)$.

为证明 U 是双凹的. 由对称性只须证明 $U(\cdot,y)$ 是凹函数. 假定 $x_1,x_2 \in X, m_1,m_2 \in R, U(x_i,y) > m_i, i=1,2, x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, 0 < r < 1$. 取 $Z^i \in \widetilde{Z}(x_i,y)$ 使得 $EF(Z^i_\infty) > m_i$. 不妨设 $Y^i_{2n+1} - Y^i_{2n} \equiv 0$ 并且 $X^i_{2n+2} - X^i_{2n+1} \equiv 0$ 定义 Z 如下:

$$Z_0 = (x,y),$$

$$Z_{n+1}(\omega) = Z^1_n(\omega/\alpha)\chi_{[0,\alpha)} + Z^2_n((\omega-\alpha)/(1-\alpha))\chi_{[\alpha,1)}.$$

则 $Z \in \widetilde{Z}(x,y)$ 并且

$$\begin{aligned} U(x,y) \geqslant EF(Z_\infty) &= \alpha EF(Z^1_\infty) + (1-\alpha)EF(Z^2_\infty) \\ &\geqslant \alpha m_1 + (1-\alpha)m_2, \end{aligned}$$

于是由 m_1,m_2 的任意性得到

$$U(x,y) \geqslant \alpha U(x_1,y) + (1-\alpha)U(x_2,y).$$

最后验证 $U(x,y)$ 有有限值. 由于 $U(x,y) \geqslant F(x,y)$, 于是 U 是下方局部有界的. 又(5.3)说明 $U(0,0) \leqslant 0$, 即任何 $Z \in \widetilde{Z}(0,0)$ 对应有一对 f,g 满足(5.3)(以 β 为系数), 由(5.9)式知道 $EF(Z_\infty) \leqslant 0$. 这说明 $U(x,0)$ 有限. 从而

$$U(x,0) + U(-x,0) \leqslant 2U(0,0) \leqslant 0.$$

类似地, $U(x,y)$ 也有限. U 即是所要的函数 u.

下面引理是定理 1 在 $X = R$ 时的特殊形式.

引理 1 设 $1 \leqslant \beta < \infty$, 则 $\beta_p(R) \leqslant \beta$ 当且仅当存在凹函数 $W: R \to R$,

$$W(t) = |t|^p W(t^{-1}), t \neq 0 \tag{5.11}$$

是 $F(\cdot,1)$ 的强函数.

证明 若 $\beta_p(R) \leqslant \beta$, 由定理 1, 存在 $u(x,y) \geqslant F(x,y)$, u 双凹, 具有齐性(5.10). 令 $W(t) = u(t,1)$, 则 $W(t)$ 满足(5.11)并且是 $F(t,1)$ 的强函数.

反过来, 若 W 存在, 定义 $u: R \times R \to R$,

$$\begin{aligned} u(t,s) &= |s|^p W(ts^{-1}) \qquad s \neq 0 \\ &= |t|^p W(0) \qquad s = 0 \end{aligned} \tag{5.12}$$

则 u 满足定理 1 的条件,由此得出 $\beta_p(R)\leqslant\beta$. 为验证 u 的性质,首先由 W 的凹性知道 W 连续. 又必有 $W(0)\leqslant 0$,否则 $t\to\pm\infty$, $W(t)\to+\infty$,W 不可能是凹的. u 对称并且是 $F(t,s)$ 的强函数. 由 $W(0)\leqslant 0$ 和 W 的凹性知道 u 双凹. 引理得证.

引理 2 设 $1\leqslant\beta<\infty$,存在 $F(\cdot,1)$ 的强函数 W,W 是凹函数并且满足(5.11)的必充条件是 $p^*-1\leqslant\beta$,这里 $p^*=p\vee q$, $p^{-1}+q^{-1}=1$.

证明 先设 W 存在. 令 $t_0=\dfrac{\beta-1}{\beta+1}$,则 $0\leqslant t_0<1$. $W(t_0)\geqslant F(t_0,1)=\left|\dfrac{t_0+1}{2}\right|^p-\beta^p\left|\dfrac{t_0-1}{2}\right|^p=0$, $W(1)\geqslant F(1,1)=1$. 由于 W 是凹的,极限

$$\lim_{t\to 1\pm 0}\frac{W(t)-W(1)}{t-1}\tag{5.13}$$

存在,记为 R 和 L. 同时若 $0<t<1$,

$$\begin{aligned}\frac{W(1)-W(t)}{1-t}&=\frac{W(1)-t^pW(t^{-1})}{1-t}\\&=\frac{1-t^p}{1-t}W(1)-t^{p-1}\cdot\frac{W(t^{-1})-W(1)}{t^{-1}-1}\end{aligned}$$

令 $t\to 1-0$ 则知 $L=pW(1)-R$. 利用 $W(t_0)$ 的非负性和 W 的凹性得到

$$pW(1)=L+R\leqslant 2L\leqslant\frac{2(W(1)-W(t_0))}{1-t_0}\leqslant(\beta+1)W(1).\tag{5.14}$$

于是 $\beta\geqslant p-1$. 若 $-1<t<0$,记

$$\begin{aligned}\frac{W(t)-W(-1)}{t-(-1)}=&-W(-1)\frac{1-|t|^p}{1-|t|}\\&-|t|^{p-1}\frac{W(t^{-1})-W(-1)}{t^{-1}-1}\end{aligned}$$

则有

$$-pW(-1)\geqslant\frac{2(W(t_0)-W(-1))}{t_0-(-1)}\geqslant-W(-1)\frac{\beta+1}{\beta}.$$

由 $W(-1)+W(1)\leqslant 2W(0)$，$W(-1)$ 是负的，由此得出 $\beta\geqslant \frac{1}{p-1}=q-1$，总之 $p^*-1=p\vee q-1\leqslant\beta$.

反之，不妨设 $\beta=p^*-1$. 若 $p=2$，取 $W(t)=t$，容易验证 $W(t)=F(t,1)$ 并且满足(5.11). 若 $2<p<\infty$，则 $F(t,1)$ 在 $(-\infty,t_0)$ 和 (t_0^{-1},∞) 上都是凹的. 此时 $\beta=p-1$，所以对于 W，(5.14) 中全部为等号，$L=R=W(1)(1-t_0)^{-1}$，$W(t_0)=0$. 故在 $[t_0,1]$ 上 $W(t)=at-b$. 又在 $[1,t_0^{-1}]$ 上 $W(t)=at^{p-1}-bt^p$ 并且由 $L=R$ 知道 $b=a(1-2p^{-1})$. 因为 $W(t_0)=F(t_0,1)$，为使 W 是凹的并且强于 $F(\cdot,1)$ 必有 $W'(x_0+0)W'(t_0+)=F_t(t_0,1)$，此式给出 $a=\frac{1}{2}p^2(1-p^{-1})^{p-1}$. 和上面关于 a,b 的方程一起，这在 $[t_0,t_0^{-1}]$ 上唯一确定了 $W(t)$. 在此区间之外，$W(t)=F(t,1)$，但不具有唯一性. 事实上可令

$$W(t)=\alpha_p\left(\left|\frac{t+1}{2}\right|-(p^*-1)\left|\frac{t-1}{2}\right|\right)\left(\left|\frac{t+1}{2}\right|+\left|\frac{t-1}{2}\right|\right)^{p-1},t\in R \tag{5.15}$$

其中 $\alpha_p=p(1-1/p^*)^{p-1}$，此函数是凹的，在 R 上强于 $F(t,1)$，满足(5.11) 并且在 $[t_0,t_0^{-1}]$ 上与上面所说函数一致. W 即所求.

对于 $1<p<2$，类似的论证也得出如同(5.15) 的 W.

推论 1 设 $1<p<\infty$，$p^*=p\vee q$，$q=\frac{p}{p-1}$，若 $(f,v,g)\in\mathscr{M}(R)$ 其中 $v^*\leqslant 1$，则

$$\|g\|_p\leqslant(p^*-1)\|f\|_p \tag{5.16}$$

常数 p^*-1 是最优的. 若 $0<\|f\|_p<\infty$，则等号成立当且仅当 $p=2$ 并且 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k^2(df_k)^2=\sum_{k=1}^{\infty}(df_k)^2 a.e.$ 成立.

证明 第一个结论由引理 1,2 直接得出. 第二个结论的充分性是由于 $\|f_n\|_2^2=E\sum_{k=1}^{n}(df_k)^2$. 剩下要证明必要性，为此只须说

明 $p \neq 2$ 时严格不等式成立. 不妨设 n 是第一个使 $\| f_n \|_p > 0$ 的指标,即 $f_n = df_n$,同时 $g_n = dg_n = \varepsilon_n df_n = \varepsilon_n f_n$,考虑通过(5.15)以及(5.12) 定义的函数 $u(x,y)$. 则

$$u(Z_n) = u(X_n, Y_n) = \alpha_p(|g_n| - (p^* - 1)|f_n|)(|f_n| + |g_n|)^p < 0,$$

从 $F(x,y) \leqslant u(x,y)$ 得出

$$\| g_n \|_p^p - (p^* - 1)^p \| f_n \|_p^p \leqslant u(X_n, Y_n) = \alpha_p E(|g_n| - (p^* - 1)|f_n|)(|f_n| + |g_n|)^p < 0,$$

故严格不等式成立.

推论 2 $\beta_p(l_p) = p^* - 1$,若 $1 < p < \infty$.

这是由于在 §1 中我们已得到过 $c_p(R) = c_p(l^p)$.

推论 3 (Maurey) $\beta_p^0(X) = \beta_p(X)$,其中 $\beta_p^0(X)$ 是当(5.1)中的鞅是二进制鞅时的最优系数.

证明 用证明定理 1 的方法可以证明 $\beta_p^0(X) \leqslant \beta(1 \leqslant \beta < \infty)$ 的必充条件是存在中点双凹函数 u 满足(5.4),只须注意在证明 U 的双凹性时,$\alpha = \frac{1}{2}$,$\tilde{Z}(x,y)$ 中的元素全是二进鞅. 但是一个中点凹函数当下方有界时也是凹函数. 所以当 $\beta_p^0(X) \leqslant \beta$ 时必有 $\beta_p(X) \leqslant \beta$. 这说明 $\beta_p(X) \leqslant \beta_p^0(X)$. 反过来的不等式是显然的,故等号成立.

定理 2 设 $1 < p < \infty$,H 是 Hilbert 空间,f,g 是 H 值鞅并且 g 是 f 的微分从属,则

$$\| g \|_p \leqslant (p^* - 1) \| f \|_p \tag{5.17}$$

常数 $p^* - 1$ 是最优的. 若 $0 < \| f \|_p < \infty$,则等号成立当且仅当 $p = 2$ 并且 $\| dg_n \| = \| df_n \|$ a.e.,$\forall n \geqslant 1$.

证明 在 $H \times H$ 上定义

$$U(x,y) = \alpha_p(\| y \| - (p^* - 1)\| x \|)(\| x \| + \| y \|)^{p-1} \tag{5.18}$$

$$V(x,y) = \| y \|^p - (p^* - 1)^p \| x \|^p \tag{5.19}$$

其中$\alpha_p = p(1-1/p^*)^{p-1}$. 注意若采用(5.15)定义的$W$,再由(5.12)定义$u$,则

$$U(x,y) = u(\|y\| + \|x\|, \|y\| - \|x\|).$$

另一方面若采用(5.15)定义的$F(x,y)$,并且令$\beta = p^* - 1$,则

$$V(x,y) = F(\|y\| + \|x\|, \|y\| - \|x\|).$$

由前面已有的结论知道$V(x,y) \leqslant U(x,y)$. 若$\|f\|_p < \infty$,则对U,V积分得到

$$\|g_n\|_p^p - (p^* - 1)^p \|f_n\|_p^p = EV(f_n, g_n) \leqslant EU(f_n, g_n).$$

现在证明

$$EU(f_n, g_n) \leqslant \cdots \leqslant EU(f_0, g_0) \leqslant 0, \tag{5.20}$$

若如此,则定理的第一个结论得证.

对于$x, y, h, k \in H$, $\|k\| \leqslant \|h\|$,考察函数$G: R \to R$,

$$G(t) = U(x + th, y + tk).$$

令$M(t) = \|x + th\|$, $N(t) = \|y + tk\|$. 首先可以假定$M(t)$, $N(t)$恒不为0. 否则考虑乘积空间$H \times R = ((x,\alpha), \forall x \in H, \alpha \in R)$并且以$((x_1,\alpha_1),(x_2,\alpha_2)) = x_1\bar{x}_2 + \alpha_1\alpha_2$为内积. 此时$H = R^{\perp}$. 对于任何$\alpha \neq 0$, $\|(x,\alpha)\| \neq 0$,从而相应的$M(t), N(t) \neq 0$. 当相应的结果得出以后再令$\alpha \to 0$即为所求. 其次,由于是内积空间,故

$$2M(t)M'(t) = \frac{d}{dt}\|x + th\|^2 = 2(x + th, h) \tag{5.21}$$

或者$M'(t) = \dfrac{(x + th, h)}{\|x + th\|}$,同样地,$N'(t) = \dfrac{(y + tk, k)}{\|y + tk\|}$. 先设$p \geqslant 2$,则

$$G(t) = \alpha_p[(M + N)^p - pM(M + N)^{p-1}]$$

$$G'(t) = \alpha_p[p(M + N)^{p-1}N' - p(p-1)M(M + N)^{p-2}(M' + N')]$$

$$G''(t) = \alpha_p[p(M + N)^{p-1}N'' + p(p-1)(M + N)^{p-2}(M' + N')N' - p(p-1)M'(M + N)^{p-2}(M' + N') - p(p-1)(p-2)(M + N)^{p-3}(M' + N')^2$$

$$- p(p-1)M(M+N)^{p-2}(M''+N'')]$$

$$= \sum_{i=1}^{5} I_i$$

显然 $I_4 \leqslant 0$,又

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_5 = -\alpha_p p(p-1)(M+N)^{p-2}(M'^2 - N'^2 + MM'' + MN'' - (p-1)^{-1}(M+N)N'')$$
$$\leqslant -\alpha_p p(p-1)(M+N)^{p-2}[(MM''+M'^2) - (NN''+N'^2)]$$

对于(5.21)两端关于 t 求导,则

$$M'^2 + MM'' = \|h\|^2, N'^2 + NN'' = \|k\|^2.$$

由于 $\|k\| \leqslant \|h$,故知上式 $\leqslant 0$. 于是 G 是凹的. 对于 $p \leqslant 2$ 可作类似分析,仍得到 G 是凹的. 于是

$$G(1) \leqslant G(0) + G'(0). \tag{5.22}$$

记 $G'(0) = (\varphi(x,y),h) + (\psi(x,y),k)$,其中

$$\varphi(x,y) = -\alpha_p p(p-1)(\|x\| + \|y\|)^{p-2}x$$
$$\psi(x,y) = \alpha_p[p(\|x\| + \|y\|)^{p-1} - p(p-1)\|x\|(\|x\| + \|y\|)^{p-2}]\frac{y}{\|y\|}.$$

以 $x = f_{n-1}, y = g_{n-1}, h = df_n, k = dg_n$,则由以上诸式得到

$$U(f_n,g_n) = U(f_{n-1},g_{n-1}) + (\varphi(f_{n-1},g_{n-1}),df_n) + (\psi(f_{n-1},g_{n-1}),dg_n). \tag{5.23}$$

两端关于 $\mathscr{B}_{n-1}$ 求条件期望然后求期望得到(5.20). 由于

$$EU(f_0,g_0) \leqslant \alpha_p(2-p^*)2^{p-1}\|f_0\|_p^p \leqslant 0$$

所以(5.17)成立.

由于在实值鞅变换的情况 p^*-1 是最优的,所以这里也是最优的. 此外若 $p \neq 2$ 并且 $0 < \|f\|_p < \infty$,不妨设 n 是第一个范数不为 0 的 f_n 的下标,则 $m \geqslant n$ 时

$$EU(f_m,g_m) \leqslant EU(f_n,g_n) \leqslant \alpha_p(2-p^*)2^{p-1}\|f_n\|_p^p < 0$$

故严格不等号成立. 定理得证.

推论 4 设$1<p<\infty$,H是(实或复)Hilbert空间,对于任何H值鞅f,$v=(\varepsilon_n)$,ε_n可以是实或复数,$|\varepsilon_n|=1$,若g是f经过v的变换,则

$$\| g \|_p \leqslant (p^* - 1) \| f \|_p \tag{5.24}$$

并且p^*-1是最优的.等号成立当且仅当$p=2$.

回忆$L^p[0,1]$的基底$e=(e_k,k\geqslant 0)$称为单调基,若对于任何实数列$(\alpha_k,k\geqslant 0)$和$n\geqslant 1$,

$$\| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \|_p \leqslant \| \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k e_k \|_p.$$

另外,考虑正测度空间L^p上的收缩投影的非降序列$(P_k,k\geqslant 0)$,其中$P_0=0$,$\| P_k \| \leqslant 1$,$P_jP_k=P_kP_j=P_k(0\leqslant k\leqslant j)$.若$|a_k|\leqslant 1$,$f\in L^p$,满足

$$\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k (P_k - P_{k-1}) f \|_p \leqslant \beta \| f \|_p \tag{5.25}$$

的最小常数$\beta=$?对此我们有

定理 3 设$1<p<\infty$,则Haar系$h=(h_n)$在$L^p[0,1]$中的无条件常数是p^*-1.即对任何实数序列$(\alpha_k,k\geqslant 0)$和$\varepsilon_k=\pm 1$.

$$\| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \alpha_k h_k \|_p \leqslant (p^* - 1) \| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k h_k \|_p \quad (n\geqslant 1). \tag{5.26}$$

p^*-1是最优的,等号成立当且仅当$p=2$或者$\alpha_k=0,k\geqslant 0$.

当$(\alpha_k,k\geqslant 0)$取为复数,$\varepsilon_k=e^{i\theta_k}$,$\theta_k\in R$时结论仍成立,最优常数不变.

证明 注意

$$(\alpha_1 h_1, \cdots, \alpha_n h_n, 0\cdots)$$

实际上是鞅差序列,记相应的鞅是f,若g是f经过$v=(\varepsilon_n)$的变换,由定理1或定理2得到(5.26).将$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k h_k$作适当组合即得到二进鞅,故由定理1和推论3得到$p^*-1$是最优的.

推论 5 $L^p[0,1](1<p<\infty)$中的单调基的无条件常数是

$p^* - 1$.

Olevskii 证明了 $L^p[0,1]$ 的任何基的无条件常数都不会比 Haar 系的无条件系数小. 所以若 e 是单调基, 则 $\beta_p(e) \geqslant \beta_p(h)$. 关于相反的不等式可从下面定理得到, 因为一个单调基可以看成由一列收缩投影得到的.

推论 6 (5.25) 中的最优常数是 $p^* - 1$. 若 $p \neq 2$, $\| f \|_p > 0$, 则严格不等式成立.

证明 Ando 证明了 L_p 中的每个非 0 收缩投影等距地等价于一个条件期望. 因此由定理 2,

$$\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k (P_k - P_{k-1}) f \|_p^p + \alpha_p (p^* - 2) \| P_1 f \|_p^p \leqslant (p^* - 1)^p \| f \|_p^p.$$

其余的证明与定理 2 相应部分一样.

引理 3 设 $1 < p < \infty$, H 是 Hilbert 空间, f, g 是 H 值鞅, g 是 f 的微分从属. u_{jk}, v_{jk} 是标量值可料 $R.V.$ 序列, 使得

$$\sum_{j=0}^{\infty} |v_{jk}(\omega)|^2 \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |u_{jk}(\omega)|^2, a.e., \forall\, k \geqslant 0 \qquad (5.27)$$

则

$$\| (\sum_{j=0}^{\infty} \| \sum_{k=0}^{n} v_{jk} d g_k \|^2)^{1/2} \|_p \leqslant (p^* - 1) \| (\sum_{j=0}^{\infty} \| \sum_{k=0}^{n} u_{jk} d f_k \|^2)^{1/2} \|_p, n \geqslant 0 \qquad (5.28)$$

这里 $p^* - 1$ 是最优常数. 若右端有限且大于 0, 则等号成立当且仅当 $p = 2$ 并且

$$\sum_{j=0}^{\infty} \| v_{jk} d g_k \|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \| u_{jk} d f_k \|^2 \; a.e., 0 \leqslant k \leqslant n.$$

证明 取 $K = l_H^2$. 不妨设(5.28) 右端有限, 设

$$dF_k = (u_{jk} d f_k)_{j \geqslant 0}, dG_k = (v_{jk} d g_k)_{j \geqslant 0}$$

由(5.27), $\| dG_k \|_K \leqslant \| dF_k \|_K$, dF_k, dG_k 分别对应于 K 值鞅 F, G. 将定理 2 应用于 F, G, 则得到(5.28).

定理 4 设 $1 < p < \infty$，H 是 Hilbert 空间，f 是 H 值鞅，则

$$(p^* - 1)^{-1} \| S^{(2)}(f) \|_p \leqslant \| f \|_p \leqslant (p^* - 1) \| S^{(2)}(f) \|_p \tag{5.29}$$

特别地，若 $1 < p \leqslant 2$，则

$$\| f \|_p \geqslant (p - 1) \| S^{(2)}(f) \|_p \tag{5.30}$$

若 $2 \leqslant p < \infty$，则

$$\| f \|_p \leqslant (p - 1) \| S^{(2)}(f) \|_p \tag{5.31}$$

此两式中的 $p - 1$ 是最优常数. 若 $0 < \| f \|_p < \infty$，则等号成立，当且仅当 $p = 2$.

证明 为证左端，在引理3(5.28)式中令 $df_k = dg_k$ 并且 $j = k$ 时 $v_{jk} \equiv 1$，$j \neq k$ 时 $v_{jk} \equiv 0$，若 $j = 0$，$u_{jk} \equiv 1$，$j \geqslant 1$ 时，$u_{jk} \equiv 0$. 然后令(5.28)中的 $n \to \infty$ 即得之. 右端可用类似方法证明. (5.30)，(5.31)可立即得出.

现在让我们看下面例子.

设 $\omega > p$ 是代数方程

$$x^p + p\omega^{p-1} - \omega^p = 0 \tag{5.32}$$

唯一的正解. 令 $1 - \theta = \dfrac{1}{\omega}$，$\delta > 0$，$\pi_n = [\dfrac{x}{x + (n-1)\delta}]^{\omega}$. 在$[0,1]$上定义

$$f_n(s) = (x + (n-1)\delta)\chi_{[0,\pi_n)} + \theta x s^{\theta-1}\chi_{[\pi_n,1]}.$$

直接计算可得出 $Ef_n = x$ 并且 $f = (f_1, f_2, \cdots)$ 关于 σ 代数列 $\mathscr{B}_n = \sigma(f_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ 是鞅. 另外

$$df_{n+1} = \delta\chi_{[0,\pi_{n+1})} + (x + (n-1)\delta - \theta x s^{\theta-1})\chi_{[\pi_{n+1},\pi_n)}.$$

现在用$(1, -1, 1, -1, \cdots)$作 f 的鞅变换 $g = (g_n)$，则

$$g_{n+1} = x + (-1)^n\delta x_{[0,\pi_{n+1})} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i[x + (i-1)\delta - \theta x s^{\theta-1} - \delta]\chi_{[\pi_{i+1},\pi_i)},$$

$$g_\infty = x + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i[x + (i-1)\delta - \theta x s^{\theta-1} - \delta]\chi_{[\pi_{i+1},\pi_i)}.$$

注意在 $\pi_{n+1} \leqslant s < \pi_n$ 时

$$x(1-\theta)s^{\theta-1} - \delta \leqslant x + (n-1)\delta - \theta x s^{\theta-1} < x(1-\theta)s^{\theta-1}$$

从而

$$x(1-\theta)s^{\theta-1} - 2\delta \leqslant |g_\infty - x| \leqslant x(1-\theta)s^{\theta-1} + \delta$$

$$\| x(1-\theta)s^{\theta-1} \|_p - 2\delta \leqslant \| g_\infty - x \|_p \leqslant \| x(1-\theta)s^{\theta-1} \|_p + \delta. \tag{5.33}$$

但由(5.32)

$$\int_0^1 (x\theta s^{\theta-1})^p ds = (\omega - 1)^p, \tag{5.34}$$

$$\| x(1-\theta)s^{\theta-1} \|_p = \frac{1-\theta}{\theta}(\omega - 1) = 1.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\lim_{\delta\to 0} \| g_\infty \|_p = 1;$$

另一方面

$$\| f_n \|_p^p = [x + (n-1)\delta]^p \pi_n + \int_{\pi_n}^1 (\theta x s^{\theta-1})^p ds$$

第一项当 $n \to \infty$ 时趋于 0,第二项等于$(\omega - 1)^p$,所以

$$\| f \|_p = \sup_n \| f_n \|_p = \omega - 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{\delta\to 0} \| f \|_p = p - 1. \tag{5.35}$$

所以此例也说明鞅变换不等式(5.16)中系数的最优性.

最后让我们计算 $\| f^* \|_p$:实际上

$$f^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} [x + (n-1)\theta] \chi_{[\pi_{n+1}, \pi_n]}$$

所以

$$\begin{aligned}
\| f^* \|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi_{n+1}}^{\pi_n} [x + (n-1)\theta]^p ds \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi_{n+1}}^{\pi_n} (x s^{\theta-1})^p ds = \int_0^1 (x s^{\theta-1})^p ds \\
&= \frac{1}{\theta^p} \int_0^1 (\theta x s^{\theta-1})^p ds = \frac{1}{\theta^p} (\omega - 1)^p.
\end{aligned}$$

$$\| f^* \|_p = \frac{\omega - 1}{\theta} = \omega, \quad \lim_{x\to 0} \lim_{\delta\to 0} \| f^* \|_p = p \tag{5.36}$$

于是

$$\lim_{x\to 0} \lim_{\delta\to 0} \| f^* \|_p = \frac{p}{p-1} \lim_{x\to 0} \lim_{\delta\to 0} \| f \|_p.$$

由此得出

推论 7 设 f 是实值下鞅，f^* 是 f 的极大函数，则当 $1 < p < \infty$ 时

$$\| f^* \|_p \leqslant q \| f \|_p, (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \tag{5.37}$$

系数 q 是最优的.

推论 8 设 $2 \leqslant p < \infty$，H 是 Hilbert 空间，f 是 H 值鞅，则

$$\| f^* \|_p \leqslant p \| S^{(2)}(f) \|_p, \tag{5.38}$$

系数 p 是最优的. 不等号当 $0 < \| f \|_p < \infty$ 时成立.

推论 8 由(5.31) 和(5.37) 合并得到.

定理 5 设 H 是 Hilbert 空间，f,g 是 H 值鞅并且 g 是 f 的微分从属，则

$$P(\sup_{n\geqslant 0}\{ \| f_n \| + \| g_n \| \} \geqslant \lambda) \leqslant \frac{2}{\lambda} \| f \|_1, \tag{5.39}$$

这里系数 2 是最优的.

证明 在上一章 §5 定理 5 我们已证明了(5.39). 关于 2 的最优性是因为在下面推论中它已是最优的.

推论 9 设 H 是 Hilbert 空间，g 是 f 的微分从属，则

$$P(g^* \geqslant \lambda) \leqslant \frac{2}{\lambda} \| f \|_1, \tag{5.40}$$

常数 2 是最优的.

证明 只须说明最优性. 这里是一个简单例子. 设 $\Omega = \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$，$P(\{-\frac{1}{2}\}) = \frac{3}{4}$，$P(\{\frac{3}{2}\}) = \frac{1}{4}$. P 是概率. 若 $dg_0 = df_0 \equiv \frac{1}{2}$，$dg_1(\omega) = -df_1(\omega) = -\omega$，$\omega \in \Omega$. 当 $n \geqslant 2$ 时，$dg_n = df_n$

$\equiv 0$. 由于当 $n \geqslant 1$ 时, $\| g_n \| \equiv 1$,所以 $P(\| g_n \| \geqslant 1) = 1$. 又 $\| f \|_1 = \| f_1 \|_1 = \| df_0 + df_1 \|_1 = \frac{1}{2}$,所以等号成立.

不仅如此,(5.40) 中的常数 2 只有在 Hilbert 空间情况成为最优的.

推论 10 实或复的 Banach 空间 X 是 Hilbert 空间当且仅当 (5.40) 对任何 X 值鞅 f, g 成立,这里 g 是 f 的微分从属,或者 g 是 f 关于 $v(v^* \leqslant 1)$ 的鞅变换.

证明 必要性不需再证. 现在设(5.40) 对全体鞅变换成立,则当 $g^* > 1$ *a.e.* 时, $\| f \|_1 \geqslant \frac{1}{2}$. 考虑 §2 定理 1 证明中定义的函数 $\psi(x,y)$ 和 $\xi(x,y)$,在现在的情况必定有

$$\psi(0,0) \geqslant 2^{-1}, \xi(0,0) = 2\psi(0,0) \geqslant 1$$

实际上只能有 $\xi(0,0) = 1$,由 §2 定理 3, X 是 Hilbert 空间.

现在让我们证明一个指数型不等式. 设 $\Phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是增加凸函数, $\Phi(0) = 0$, Φ 是二次可微的又具有一阶严格凸的导函数, $\Phi'(0+) = 0$.

定理 6 设 Φ 如上, H 是 Hilbert 空间,对于任何 H 值鞅 f, g, g 是 f 的微分从属, $\| f \|_\infty \leqslant 1$,则

$$\sup_n E\Phi(\| g_n \|) < \frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi(t)e^{-t}dt. \tag{5.41}$$

这里常数 $\frac{1}{2}$ 是最优的.

证明 设 $S = \{(x,y) \in H \times H: \| x \| \leqslant 1\}$,由假设 $\| f \|_\infty \leqslant 1$,所以不妨假定 $(f_n(\omega), g_n(\omega)) \in S$, $\forall\ \omega \in \Omega, n \geqslant 0$. 我们将给出一个函数 $u: S \to R$ 使得

1° $E\Phi(\| g_n \|) \leqslant Eu(f_n, g_n)$,

2° $Eu(f_n, g_n) \leqslant Eu(f_{n-1}, g_{n-1}), n \geqslant 1$,

3° $Eu(f_0, g_0) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\infty \Phi(t)e^{-t}dt$.

从 1°,2°,3° 即得到(5.41). 为定义 u,令

$$B(t)=\Phi(t-1),t\geqslant 1.$$

$$A(t)=e^t\int_t^{\infty}B(s)e^{-s}ds=e^{t-1}\int_{t-1}^{\infty}\Phi(s)e^{-s}ds.$$

然后令

$$\begin{aligned}u(x,y)&=(1+\|y\|^2-\|x\|^2)A(1)/2,\|x\|+\|y\|\leqslant 1,\\&=(1-\|x\|)A(\|x\|+\|y\|)+\|x\|B(\|x\|\\&\quad+\|y\|),\|x\|+\|y\|>1.\end{aligned}\tag{5.42}$$

此函数连续并且在 $\|x\|+\|y\|=1$ 时,两部分的值都等于 $\|y\|A(1)$. 现在设

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&=-A(1)x, && \|x\|+\|y\|\leqslant 1;\\&=[-A(\|x\|+\|y\|)+B(\|x\|+\|y\|)\\&\quad+B'(\|x\|+\|y\|)]x,\\& && \|x\|+\|y\|>1.\\\psi(x,y)&=A(1)y && \|x\|+\|y\|\leqslant 1;\\&=[(1-\|x\|)A(\|x\|+\|y\|)+(2\|x\|\\&\quad-1)B(\|x\|+\|y\|)]\frac{y}{\|y\|},\\& && \|x\|+\|y\|>1.\end{aligned}\tag{5.43}$$

在 S 上,φ,ψ 是连续函数.

若$(x,y)\in S,(x+h,y+k)\in S,\|k\|\leqslant\|h\|$. 我们验证必有

$$u(x+h,y+k)\leqslant u(x,y)+(\varphi(x,y),h)+(\psi(x,y),k)\tag{5.44}$$

并且当 $\|x\|+\|y\|\leqslant 1<\|x+h\|+\|y+k\|$ 时,严格不等式成立. 注意此时 $h\neq 0$,我们在验证时将作此假设.

若 $t\in[0,1]$,则 $\|x+th\|\leqslant 1$,所以在$[0,1]$上

$$G(t)=u(x+th,y+tk)$$

连续,不等式(5.44)等价于

$$G(1)\leqslant G(0)+G'(0+).\tag{5.45}$$

当然,若G' 在$(0,1)$上非增,则由均值定理得出(5.45). 设$M(t)=$

$\| x+th \|$，$N(t)=\| y+tk \|$，$F=A-B$. 由 Φ' 严格凸，当 $s>1$ 时，$F(s)>0$，$F'(s)>0$，$F''(s)>0$ 并且 $sF'(s)-F(s)>0$. 若令

$$I=\{t\in(0,1);M(t)+N(t)<1\},$$

$$J=\{t\in(0,1);M(t)>0,M(t)+N(t)>1\}.$$

由 M 的严格凸性和 N 的凸性，$(0,1)\backslash(I\cup J)$ 是有限集. M,N 在 J 上都是严格正的，所以 G 在 $I\cup J$ 上无穷可微. 另外 G' 在 $(0,1)$ 上连续. 为证明 G' 在 $(0,1)$ 上非增只须证明在 $I\cup J$ 上，$G''\leqslant 0$. 若 $I\neq\varnothing$，则 $G''=-(\| h\|^2-\| k\|^2)A(1)\leqslant 0,t\in I$. 若 $J\neq\varnothing$，在前面所说条件 $\| x+y\|\leqslant 1\leqslant\| x+th\|+\| y+tk\|$ 之下，

$$\begin{aligned}G''=&-(\| h\|^2-\| k\|^2)F'(M+N)-N''[(M+N)F'(M\\&+N)-F(M+N)]-M(M'+N')^2F''(M+N)\\ \leqslant&\ 0,\qquad\qquad t\in J\end{aligned}$$

这证明了(5.44). 关于严格不等式的论断是因为 $M(M'+N')^2$ 在 J 中只有有限多个 0 点，所以 G' 在 J 上严格下降.

由(5.44) 和 $\| dg_n\|\leqslant\| df_n\|$ 得到

$$\begin{aligned}u(f_n,g_n)\leqslant u(f_{n-1},g_{n-1})&+(\varphi(f_{n-1},g_{n-1}),df_n)\\&+(\psi(f_{n-1},g_{n-1}),dg_n).\end{aligned}\tag{5.46}$$

若对于某个 $n\geqslant 1$，

$$P(\| f_{n-1}\|+\| g_{n-1}\|\leqslant 1<\| f_n\|+\| g_n\|)>0\tag{5.47}$$

则(5.46) 以正概率成立. 取期望即得出 2°. 若(5.47) 成立，则严格不等式成立.

由(5.44)，$u(f_0,g_0)\leqslant u(0,0)$，故 4° 成立. 若

$$P(\| f_0\|+\| g_0\|>1)>0,\tag{5.48}$$

则严格不等式成立.

最后若 $\| g\|_\infty\leqslant 1$，则 $\sup_n E\Phi(\| g_n\|)\leqslant\Phi(1)$. Φ' 严格凸，$\Phi(1)=\int_0^1\Phi'(t)dt\leqslant\frac{1}{2}\Phi'(1)$. 由 Jensen 不等式

$$\Phi'(1) < \int_0^\infty \Phi'(t)e^{-t}dt = \int_0^\infty \Phi(t)e^{-t}dt.$$

此时(5.43)成立.若 $\|g\|_\infty > 1$,则(5.47)或(5.48)成立,所以也有(5.43)成立.

关于系数的最优性,我们在下面推论的证明中验证.

推论 11 若 $2 < p < \infty$,$\Phi(t) = t^p$,其它条件如定理 6,则

$$\|g\|_p^p < \frac{1}{2}\Gamma(p+1), \tag{5.49}$$

其中的常数是最优的.

现在给出一个例子.设 $0 < \delta < 2$,$\gamma = (2+\delta)^{-1}$,$\beta = (2-\delta)(2+\delta)^{-1}$.又

$$d_1 = \frac{1}{2}\chi_{[0,1]},\ d_2 = \frac{1}{2}(1+\delta)\chi_{[0,\gamma)} - \frac{1}{2}\chi_{[\gamma,r)},$$

$$d_3 = \delta\chi_{[0,\beta\gamma)} - (1-\delta/2)\chi_{[\beta\gamma,\gamma)},$$

$$d_4 = \delta\chi_{[0,\beta^2\gamma]} - (1-\delta/2)\chi_{[\beta^2\gamma,\beta\gamma)},$$

……

这是一个鞅差序列.记相应的鞅是 f,若 $v = (1,-1,1,-1,\cdots)$,f 经过 v 的变换是 g.则 $\|g\|_\infty = 1$.注意若 $n \geq 1$,则

$$f_{n+2} = (1 + (2n+1)\delta/2)\chi_{[0,\beta^n\gamma)} + \sum_{k=1}^{n} k\delta\chi_{[\beta^k\gamma,\beta^{k-1}\gamma)},$$

于是

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &\geq \gamma(1-\beta)\sum_{k=1}^{\infty}(k\delta)^p\beta^{k-1} \\
&\geq \gamma(1-\beta)\sum_{k=1}^{\infty}(k\delta)^p e^{-\alpha(k-1)\delta} \quad (\alpha = -\delta^{-1}\log\beta) \\
&\geq \gamma(1-\beta)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\delta}^{k\delta}\delta^{-1}t^p e^{-\alpha t}dt \\
&= 2\int_0^\infty \frac{t^p e^{-\alpha t}dt}{(2+\delta)^2},
\end{aligned}$$

由于 $\beta^{-1} = 1 + \delta(1 - 2^{-1}\delta)^{-1}$,当 $\delta \to 0$ 时 $\alpha \to 1$,由 Fatou 引理,

$$\liminf_{\delta\to 0}\|f\|_p^p \geq \int_0^\infty 2^{-1}t^p e^{-t}dt = 2^{-1}\Gamma(p+1).$$

再由(5.49),实际上等号成立.

更细致的计算说明,对于这个 f,(5.43) 中的等号(经过取极限)也成立.

最后我们考察随机积分不等式的最优系数. 设 $(\Omega,\mathscr{B},P)$ 是完备概率空间,$(\mathscr{B}_t,t\geqslant 0)$ 是 $\mathscr{B}$ 的非降右连续子 σ 代数族,其中 $\mathscr{B}_0$ 包含 $\mathscr{B}$ 的任何 0 测集. H 是可分 Hilbert 空间. $M=(M_t)_{t\geqslant 0}$ 是适应于$(\mathscr{B}_t,t\geqslant 0)$ 的 H 值鞅,在$[0,\infty)$ 上有右连续规道,在$(0,\infty)$ 上有左极限. 设 $V=(V_t)_{t\geqslant 0}$ 为实值可料过程,$|V_t(\omega)|\leqslant 1$. 考虑随机过程 $N=(N_t)_{t\geqslant 0}$:

$$N_t=\int_0^t VdM.$$

定理 7　设 $1<p<\infty$,H 是 Hilbert 空间,则

$$\|N\|_p\leqslant(p^*-1)\|M\|_p \tag{5.50}$$

若 $\|M\|_\infty\leqslant 1$ 并且 $2\leqslant p<\infty$,则

$$\|N\|_p^p\leqslant 2^{-1}\Gamma(p+1). \tag{5.51}$$

其中的常数都是最优的.

证明　由于在离散情况这些常数是最优的,所以这里也是最优的. 同样地,在 Ito 积分的情况它们也是最优的. 此外这些不等式在 $p=2$ 时等号可以成立. 这一点可直接证明. 在 $p\neq 2$ 时严格不等号成立.

为证明这些不等式,不妨设 $M_0\equiv 0$. 设 $\tilde{Z}$ 是如下形式的过程 $Y=(Y_t)_{t\geqslant 0}$ 的全体

$$Y_t=\sum_{k=1}^n a_k[M(\tau_k\wedge t)-M(\tau_{k-1}\wedge t] \tag{5.52}$$

其中 $|a_k|\leqslant 1$,$0\equiv\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\cdots\leqslant\tau_n$ 都是有界停时. 由于$(M_{\tau_k},0\leqslant k\leqslant n)$ 是鞅,Y_t 可看成它关于$(a_k,1\leqslant k\leqslant n)$ 的变换,由以前得到的结果,注意 $\|\tau_n\|_\infty\leqslant t$,

$$\|Y_t\|_p\leqslant(p^*-1)\|M(\tau_n)\|_p\leqslant(p^*-1)\|M(t)\|_p.$$

从而

$$\| Y \|_p = \sup_{t>0} \| Y_t \|_p \leqslant (p^* - 1) \| M \|_p.$$

类似地，若 $\| M \|_\infty \leqslant 1, 2 \leqslant p < \infty$，则

$$\| Y \|_p^p \leqslant \frac{1}{2} \Gamma(p+1).$$

要把 Y 换成 N，只须注意一个基本的事实，即当 $1 < p < \infty$，$\| M \|_p < \infty$ 时，存在 $Y^{(j)} \in \widetilde{Z}$ 使得$\lim\limits_{j \to \infty} \| Y^{(j)} - N \|_p = 0$.

附录1 网与渗透

本书中用到一些一般拓扑空间的收敛性问题，即网收敛问题.这里扼要地予以叙述.

集合 X 上的拓扑指的是 X 的一个子集族 τ，满足

(1) X 本身和空集 $\varnothing\in\tau$,

(2) B_1、$B_2\in\tau$，则 $B_1\cap B_2\in\tau$,

(3) $B_\lambda\in\tau(\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\in\tau$.

τ 中的每个元称为开集. X 与 τ 一起称为拓扑空间，记为 (X,τ). 开集关于整个空间 X 的余集称为闭集. 上面(3)说明开集关于任意并封闭. 容易证明闭集关于任意交封闭. 对于任何集合 $A\subset X$，包含在 A 中的所有开集之并称为 A 的内部，记为 A°. 包含 A 的所有闭集之交称为 A 的闭包，记为 $\overline{A}$. 容易知道 A 是开集当且仅当 $A=A^\circ$. A 为闭集当且仅当 $A=\overline{A}$. 对于一个点 $x\in X$，包含 X 的任一开集都称为 x 的邻域. x 的邻域的全体称为 x 的邻域系，记为 $N(x)$.

称拓扑空间 (X,τ) 是 T_1 空间，若 X 中的每个单点集 $\{x\}$ 是闭集. 称 (X,τ) 是 T_2 空间或 Hausdorff 空间，若对于任何两点 x、$y\in X$，$x\neq y$，则存在 $U\in N(x)$，$V\in N(y)$ 使得 $U\cap V=\varnothing$. (X,τ) 称为第一可数的，若对于每一点 $x\in X$，$N(x)$ 中有可数多个元，记为 $V_n(n\geqslant 1)$，使得 $\forall\, U\in N(x)$，存在 n 使得 $V_n\subset U$. 称 $\{V_n,n\geqslant 1\}$ 是在 x 点的可数邻域基.

定理 1 (1) T_2 空间是 T_1 空间. (2) (X,τ) 是 T_2 空间当且仅当 $\forall\, x,y\in X$，$x\neq y$ 则存在 $V\in N(y)$ 使得 $x\overline{\in}\overline{V}$. (3) 度量空间是第一可数的.

证明 1° 设 $x\in X$，对于任何 $y\in X$，$y\neq x$，取 $U_y\in N(y)$ 使得 $x\overline{\in}U_y$，则 $X\backslash\{x\}=\bigcup\limits_{y\neq x}U_y$，后者为开集，故 $\{x\}$ 为闭集.

2° 若对于 $\forall\, x$、$y\in X$，$x\neq y$，存在 $U\in N(y)$ 使得 $x\overline{\in}\overline{U}$. 由于余集 $\overline{U}^c\in N(x)$，故 (X,τ) 是 T_2 的. 反之若 (X,τ) 是 T_2 的，$x\neq y$，则 $\exists\, U\in N(x)$，$V\in N(y)$，$U\cap V=\varnothing$. 此时 $V\subset U^c$ 并且 U^c 是闭集. 容易知道 $\overline{V}\subset\overline{U^c}=U^c$，所以 $x\overline{\in}$

$\overline{V}$.

3° 度量空间中以 x 为中心，$\frac{1}{n}$ 为半径的球构成 x 的可数邻域基.

指标集 Λ 的元素之间的关系"$\leqslant$"称为半序关系(从而 Λ 称为半序指标集)，若 $\lambda\leqslant\lambda$；$\lambda_1\leqslant\lambda_2$，$\lambda_2\leqslant\lambda_1$，则 $\lambda_1=\lambda_2$；$\lambda_1\leqslant\lambda_2$，$\lambda_2\leqslant\lambda_3$，则 $\lambda_1\leqslant\lambda_3$. 半序指标集 Λ 称为定向集，若对于任何 $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$，存在 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $\lambda\geqslant\lambda_1$，$\lambda\geqslant\lambda_2$.

设 Λ 是定向集，则以 Λ 为指标集的 (X,τ) 中的点集 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 称为一个网. 称网 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 收敛于一点 $x\in X$，若对于任何 $U\in N(x)$，存在 $\lambda_0\in\Lambda$，使得任何 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 都有 $x_\lambda\in U$. 记为 $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda=x$ 或者 $x_\lambda\to x$，称 x 是 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 的极限. 定向集 Λ 的子集 Λ' 若以原来的半序为半序仍为定向集，则称 Λ' 是 Λ 的子定向集. 此时称 $\{x_{\lambda'},\lambda'\in\Lambda'\}$ 是 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 的子网.

定向集是自然数集 N 的推广形式. 同样的，网是序列的推广形式. 当 $\Lambda=N$ 并且以自然数从小到大为序的话，网就成了序列，并且在度量空间的情况网的作用完全可以用序列来代替. 但在一般拓扑空间情况就另当别论了. 即使常用的赋范空间，当涉及到它的弱拓扑时，一般就不再是可度量的，有关的收敛性就要借助于网的收敛性.

定理 2 设 (X,τ) 是拓扑空间，$A\subset X$.

(1) $x\in\overline{A}$ 当且仅当存在网 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}\subset A$，$x_\lambda\to x$.

(2) $x\in\overline{A}\backslash A$ 当且仅当存在 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}\subset A$，$x_\lambda\neq x$，$x_\lambda\to x$.

(3) A 是闭集当且仅当任何 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}\subset A$，$x_\lambda\to x$，则 $x\in A$.

(4) (X,τ) 是 T_2 空间当且仅当 (X,τ) 中的每个网的极限是唯一的.

证明 1° 设 $x\in\overline{A}$，由 $\overline{A}$ 定义，对任何 $U\in N(x)$，$A\cap U\neq\varnothing$. 否则若 $U_0\in N(x)$ 但 $A\cap U_0=\varnothing$，则 $A\subset U_0^c$. 后者为闭集. 故 $\overline{A}\subset\overline{U_0^c}=U_0^c$，$x\overline{\in}\overline{A}$ 矛盾. 取 $x_U\in A\cap U$，注意 $N(x)$ 中元素依集合包含关系构成半序集并且任何两个 $U,V\in N(x)$，$U\cap V\in N(x)$. 所以 $N(x)$ 是定向集，$\{x_U,U\in N(x)\}$ 是 (X,τ) 中的网并且 $x_U\to x$.

反之，若有 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}\subset A$，$x_\lambda\to x$，需要证明 $x\in\overline{A}$. 此时对于任何闭集 F，$F\supset A$，我们证明 $x\in F$. 反设 $x\overline{\in}F$，则 $x\in F^c$，后者为开集，由 $x_\lambda\to x$ 定义，$\exists\ \lambda_0\in\Lambda$，对于任何 $\lambda\geqslant\lambda_0$，$x_\lambda\in F^c$，$x_\lambda\overline{\in}F$，从而 $x_\lambda\overline{\in}A$ 矛盾.

2° 证明与 1°类似.

3° 若 A 闭，则 $A=\overline{A}$. 当 $x_\lambda\in A$，$x_\lambda\to x$ 时必有 $x\in A$. 否则 $x\in A^c=(\overline{A})^c$. 后者为开集. 于是 $\exists\ \lambda_0\in\Lambda$ 使得任何 $\lambda\geqslant\lambda_0$，$x_\lambda\in A^c$，矛盾. 反过来，若 A 不

闭，取 $x\in\overline{A}\setminus A$. 由 2°，$\exists\ x_\lambda\in A,(\lambda\in\Lambda)$ 使得 $x_\lambda\to x$，但 $x\overline{\in}A$，矛盾.

4° 设 (X,τ) 是 T_2 的. 若 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 使得 $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda=x$，$\lim\limits_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda=y$. 谬设 $x\neq y$，则 $\exists\ U\in N(x),V\in N(y),U\cap V=\varnothing$. 则一方面 $\exists\ \lambda_1\in\Lambda$ 使得 $\lambda\geqslant\lambda_1$ 时，$x_\lambda\in U$. 另一方面存在 λ_2 使得当 $\lambda\geqslant\lambda_2$ 时 $x_\lambda\in V$. Λ 是定向集，故 $\exists\ \lambda_3\geqslant\lambda_1,\lambda_3\geqslant\lambda_2$ 当 $\lambda\geqslant\lambda_3$ 时 $x_\lambda\in U\cap V$，矛盾. 反之，若 (X,τ) 不是 T_2 空间，则存在 $x,y\in X$，$x\neq y$，对于任何 $U\in N(x)$，$V\in N(y)$，$U\cap V\neq\varnothing$. 取 $x_{U,V}\in U\cap V$，记 $\Lambda=\{(U,V),U\in N(x),V\in N(y)\}$. 规定当 $U_1\subset U_2,V_1\subset V_2$ 时，$(U_2,V_2)\leqslant(U_1,V_1)$，则"$\leqslant$"是 Λ 上的半序. 显然 $x_{U,V}\to x,x_{U,V}\to y$ 同时成立. 矛盾.

定义 1 $x\in X$ 称为网 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 的极限点，若 $\forall\ U\in N(x)$ 和 $\forall\ \lambda_0\in\Lambda$，存在 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 使得 $x_\lambda\in U$.

定理 3 $x\in X$ 是 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 的极限点当且仅当存在 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 的子网 $\{x_{\lambda'},\lambda'\in\Lambda'\}$ 使得 $x_{\lambda'}\to x$.

证明 若 $\{x_{\lambda'},\lambda'\in\Lambda'\}$ 是 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 的子网并且 $x_{\lambda'}\to x$. 对于 $U\in N(x)$ 和 $\lambda_0\in\Lambda$ 由 $x_{\lambda'}\to x$，则有 $\lambda'_0\in\Lambda'$ 使得当 $\lambda'\geqslant\lambda'_0$ 时，$x_{\lambda'}\in U$. 而 $\Lambda'\subset\Lambda$ 故 x 是极限点.

反之，若 x 是 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 的极限点. 我们已经知道 $N(x)$ 本身是定向集，对于每个 $U\in N(x)$ 取 $x_\lambda\in U$. 这里 $\lambda=\lambda(U)$. 记 $\tilde{\lambda}=\{(\lambda(U),U),U\in N(x)\}$. 若 $U\supset V$ 并且 $\lambda(U)\leqslant\lambda(V)$，则规定 $(\lambda(U),U)\leqslant(\lambda(V),V)$. $\tilde{\lambda}$ 成为半序集. 并且由极限点的定义，$\tilde{\lambda}$ 是定向集. 显然 $x_\lambda=x_{(\lambda(U),U)}\to x$. $\tilde{\lambda}$ 相应于 Λ 的子定向集.

称拓扑空间 (X,τ) 中的子集 E 是紧集. 若对于 E 的任何开复盖族 $\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ $(E\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)$，存在有限子族 $\{B_{\lambda_i},1\leqslant i\leqslant n\}$ 复盖 $E(\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_{\lambda_i}\supset E)$.

定理 4 设 (X,τ) 是拓扑空间，$E\subset X$，则 E 是紧集当且仅当 E 中任一网有极限点在 E 中.

证明 设 E 紧，不失一般性假定 E 不是由有限多个点构成的. $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 E 中任一网. 若它在 E 中无极限点，即对于每个 $x\in E$，存在 $U_x\in N(x)$ 和 $\lambda_x\in\Lambda$，使得任何 $\lambda\geqslant\lambda_x$，$x_\lambda\overline{\in}U_x$. 显然 $E\subset\bigcup\limits_{x\in E}U_x$，$E$ 紧，不妨设 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{x_i}$，每个 U_{x_i} 对应有 λ_{x_i}，当 $\lambda\geqslant\lambda_{x_i}$ 时，$x_\lambda\overline{\in}U_{x_i}$；$\Lambda$ 是定向集，取 $\lambda\geqslant\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$，从而 $x_\lambda\overline{\in}E$ 得出矛盾.

现在若 E 不紧，即存在 E 的开复盖族 $\{B_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$，但 E 不被有限复盖，即

对任何有限集 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}B_{\alpha_i}\neq\varnothing$，记 $\lambda=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\Lambda=\{\lambda\}$，以包含关系为半序，则 Λ 是定向集．记 $F_\lambda=E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}B_{\alpha_i}$，取 $x_\lambda\in F_\lambda$，则 $\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 E 中网．若 x 是其极限点，则由定理 3，存在子网 $\{x_{\lambda'},\lambda'\in\Lambda'\}$ 收敛于 x，不妨设 $x\in B_{\alpha_0}$，则 $\exists\ \lambda_0$，$\lambda\geqslant\lambda_0$ 时，$x_{\lambda'}\in B_{\alpha_0}$，取 $\lambda\geqslant\lambda'$，$\lambda=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，其中某个 $\alpha_i=\alpha_0$，由定义 $x_\lambda\overline{\in}B_{\alpha_0}$ 矛盾．故 E 紧．

定义 2 设 (X,τ)，(Y,μ) 是两个拓扑空间，映射 $f:X\to Y$ 称为在点 x 连续的，若对于任何 $x_\lambda\to x$，则 $f(x_\lambda)\to f(x)$．称为是在 X 上连续的，若 f 在 X 的每一点连续．

定理 5 设 $f:X\to Y$ 是从拓扑空间 (X,τ) 到拓扑空间 (Y,μ) 的映射，则

(i) f 在一点 $x\in X$ 连续当且仅当对于任何 $B\in N(f(x))$，$f^{-1}(B)=\{x,f(x)\in B\}\in N(x)$．

(ii) f 在 X 上连续当且仅当对于任何 $B\in\mu$，$f^{-1}(B)\in\tau$．

证明 现证(i)，对于(ii)可相仿地去证明．

若对于任何 $V\in N(f(x))$，$U=f^{-1}(V)\in N(x)$．设 $x_\lambda\to x$，则 $\exists\ \lambda_0$ 使得当 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时，$x_\lambda\in U$，从而 $f(x_\lambda)\in V$，故 $f(x_\lambda)\to f(x)$．

反之，设 $x_\lambda\to x$ 时都有 $f(x_\lambda)\to f(x)$．若有 $V_0\in N(f(x))$，但 $f^{-1}(V_0)\overline{\in}N(x)$，即对于任何 $U\in N(x)$，$\exists\ x_U\in U$，但 $f(x_0)\overline{\in}V_0$．显然 $\{x_U,U\in N(x)\}$ 是一个网并且 $x_U\to x$．但 $f(x_U)\to f(x)$．矛盾．

定理 6 设 $f:X\to Y$ 在 X 上连续．$E\subset X$ 是紧集，则 $f(E)=\{f(x),x\in E\}$ 是 Y 中的紧集．

证明 对于 $f(E)$ 的任一开复盖 $\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$．由 f 连续，定理 5 说明 $A_\lambda=f^{-1}(B_\lambda)$ 是 X 中开集，并且由 $f(E)\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$ 得出

$$E\subset f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$$

E 紧，不妨设 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\supset E$，从而

$$f(E)\subset f(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}f(A_{\lambda_i})=\bigcup_{i=1}^{n}B_{\lambda_i}$$

$f(E)$ 紧．

定义 3 设 E 是任意集合，E 的子集族 $\mathscr{F}$ 称为一个滲透，若 (i) $\varnothing\overline{\in}\mathscr{F}$，(ii) $A,B\in\mathscr{F}$，则 $A\cap B\in\mathscr{F}$，(iii) 若 $A\in\mathscr{F}$，$A\subset B$，则 $B\in\mathscr{F}$．

$\mathscr{F}$ 称为一个滲透基，若 $\varnothing\overline{\in}\mathscr{F}$ 并且对于任何 $A,B\in\mathscr{F}$，存在 $C\in\mathscr{F}$ 使得 $C\subset A\cap B$．

例 对于拓扑空间(X,τ)和任一点$x\in X$，$N(x)$构成一个渗透基. 若定义以x为内点的任一集合都称为x的超邻域，x点的超邻域全体记为$\mathscr{U}(x)$，则$\mathscr{U}(x)$是一个渗透.

E的渗透是E的一个集族. 若一个渗透不能真包含于另一渗透中，就称此渗透是极大渗透. 由 Zorn 引理容易得到每个渗透必包含在某个极大渗透中. 同样，给定一个渗透基$\mathscr{F}_0$，由$\mathscr{F}_0$可以生成一个渗透$\mathscr{F}$，

$$\mathscr{F} = \{A, \exists\ B \in \mathscr{F}_0, B \subset A\}$$

定义 4 设(X,τ)是拓扑空间，$x\in X$，$\mathscr{F}$是X上的一个渗透，称$\mathscr{F}$收敛于x，若x的领域系$N(x)\subset\mathscr{F}$.

根据渗透的定义第(ii)条，$\mathscr{F}$对有限交封闭，这相当于说$\forall\ U\in N(x)$，$\exists\ A\in\mathscr{F}$使得$A\subset U$.

若E是(X,τ)的子集，$\mathscr{F}$是E上的渗透，$x\in E$，称$\mathscr{F}$收敛到x，若$\forall\ U\in N(x)$，$\exists\ A\in\mathscr{F}$，$A\subset U$.

显然，设$\mathscr{F}$是收敛于x的渗透，$\mathscr{T}\supset\mathscr{F}$，则$\mathscr{T}$也收敛于$x$.

设$\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$是拓扑空间$(X,\tau)$中的网. 记$A_\alpha=\{x_\lambda,\lambda\geqslant\alpha\}$，$\alpha\in\Lambda$. 容易验证$\{A_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$是一个渗透基. 由$\{A_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$生成的渗透$\mathscr{U}$称为由网$\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$确定的渗透. 此时$x_\lambda\to x$当且仅当$\mathscr{U}$收敛于$x$.

反之，若$\mathscr{U}$是一个渗透，$x\in A\in\mathscr{U}$，记$x=x_A$，则$\{x_A,A\in\mathscr{U}\}$是网. 实际上$\mathscr{U}$以集合包含关系为半序集，并且为定向集. 无论x在A中选择如何，$\mathscr{U}$收敛于x必须且仅须$\{x_A,A\in\mathscr{U}\}$收敛到x，此时称$\{x_A,A\in\mathscr{U}\}$是由$\mathscr{U}$确定的定向点列.

总之，在拓扑空间中，网收敛与渗透的收敛是一致的. 许多由网刻划的命题也可用渗透的语言来刻划. 例如

1. (X,τ)是T_2空间当且仅当X中的每个渗透收敛于唯一极限(如果收敛的话).

2. $f:X\to Y$是在X上连续的映射当且仅当对于X中的每个渗透$\mathscr{U}$，若$\mathscr{U}$收敛于x，则Y中的渗透基$\{f(A),A\in\mathscr{U}\}$所生成的渗透收敛于$f(x)$.

这里的$\{f(A),A\in\mathscr{U}\}$的确是一个Y中的渗透基. 若f是到上的，则它是一个渗透.

定理 7 设$\mathscr{U}$是(X,τ)中的极大渗透，则对于任一集合A，要么$A\in\mathscr{U}$要么$A^c\in\mathscr{U}$.

证明 考虑$A\cap\mathscr{U}=\{A\cap B,B\in\mathscr{U}\}$，类似地考虑$A^c\cap\mathscr{U}$，则至少有一

个不含$\varnothing$，否则有$B_1\in\mathscr{U}$，$A\cap B_1=\varnothing$，又有$B_2\in\mathscr{U}$，$A^c\cap B_2=\varnothing$. 此时$B_1\cap B_2\in\mathscr{U}$.

$$B_1\cap B_2=X\cap B_1\cap B_2=(A\cup A^c)\cap B_1\cap B_2$$
$$\subset(A\cap B_1)\cup(A^c\cap B_2)=\varnothing$$

矛盾. 若$\varnothing\bar{\in}A\cap\mathscr{U}$，则由$A\cap\mathscr{U}$和$\mathscr{U}$生成的渗透将是真包含$\mathscr{U}$的渗透. 由$\mathscr{U}$的极大性这不可能，从而$A\in\mathscr{U}$.

此定理也可就一个集合F的渗透来叙述. 实际上对于$E\subset X$，$E\cap\tau$构成E上的拓扑，后者是前者的拓扑子空间.

定理 8 设(X,τ)是拓扑空间，则(X,τ)紧当且仅当X上的每个极大渗透都收敛.

证明 若(X,τ)是紧的，用前面所说的方法，一个极大渗透产生一个网有子网收敛. 子网定义的渗透基其所生成的渗透包含在极大渗透中，此渗透是收敛的从而极大渗透本身收敛.

反之，若X不是紧的，则有定向集$\{x_\lambda,\lambda\in\Lambda\}\subset X$，它没有任何极限点. 对于每个$\alpha\in\Lambda$，定义$A_\alpha=\{x_\lambda,\lambda\geqslant\alpha\}$，则$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\varnothing$. A_α是闭集，因为它也没有极限点. 由$\{A_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$生成的极大渗透记为$\mathscr{U}$，我们证明$\mathscr{U}$不收敛，否则假如$\mathscr{U}$收敛于$x$，则对于每个$A_\alpha$，若$x\bar{\in}A_\alpha$时$A_\alpha^c$是$x$的领域，故必$A_\alpha^c\in\mathscr{U}$从而$\varnothing=A_\alpha\cap A_\alpha^c\in\mathscr{U}$矛盾.

这一定理同样可以就子集合$F\subset X$来叙述.

定理 9 设$f:X\to Y$是到上的映射，X,Y是任意集合，若$\mathscr{U}$是X上的极大渗透，则$\{f(A),A\in\mathscr{U}\}$是Y上的极大渗透.

证明 仅证极大性. 若$\widetilde{\mathscr{U}}=\{f(A),A\in\mathscr{U}\}$不是极大，例如存在$\widetilde{\mathscr{B}}$，$\widetilde{\mathscr{U}}\subsetneq\widetilde{\mathscr{B}}$. 取$B_0\in\widetilde{\mathscr{B}}\backslash\widetilde{\mathscr{U}}$，记$\mathscr{B}=\{f^{-1}(B_0)\cap A,A\in\mathscr{U}\}$，则由于$f^{-1}(B_0)\bar{\in}\mathscr{U}$，$\mathscr{B}$真包含$\mathscr{U}$. $\varnothing\bar{\in}\mathscr{B}$，实际上，$\widetilde{\mathscr{B}}$是渗透，$\widetilde{\mathscr{U}}\subset\widetilde{\mathscr{B}}$，故$\forall A\in\mathscr{U}$，$B_0\cap f(A)\neq\varnothing$，取$y\in B_0\cap f(A)$，则$f^{-1}(y)\in A$，$f^{-1}(y)\in f^{-1}(B_0)$从而$f^{-1}(y)\in f^{-1}(B_0)\cap A\in\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$是渗透，矛盾即说明$\widetilde{\mathscr{U}}$是极大渗透.

推论 设$\mathscr{U}$是自然数集N上的极大渗透，则对于每个有界序列(α_n)，$\lim\limits_{\mathscr{U}}\alpha_n$收敛.

证明 记$f:N\to R$，$f(n)=\alpha_n$，$\mathscr{U}$是N上的极大渗透，则$\{f(A),A\in\mathscr{U}\}$也是极大渗透. 设$|\alpha_n|\leqslant M$. $[-M,M]$是紧集，由定理 8，$\lim\limits_{\mathscr{U}}\alpha_n$收敛.

附录2　独立性与条件独立性

本书中多次用到集合族或函数族的独立性概念. 独立性是概率论中的一个基本概念. 这里将对几个问题给予集中的叙述，主要是独立性和条件独立性，Borel-Cantelli 引理，条件期望在独立或条件独立情况的有关结论，构造函数族的独立 Copy 的方法等.

定义 1　设(Ω,Σ,P)是概率空间

(i) 对于 $A,B\in\Sigma$，称 A,B 两集合(或事件)独立，若

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \tag{1}$$

(ii) 若 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 是 Σ 的子 σ 代数，称 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 独立，若任何 $A\in\mathscr{B}_1$ 与任何 $B\in\mathscr{B}_2$独立.

(iii) 若 $\xi_1(\omega),\xi_2(\omega)$是定义在$(\Omega,\Sigma,P)$上的(标量值或向量值)可测函数，称$\xi_1$、$\xi_2$ 独立，若 $\sigma(\xi_1)$、$\sigma(\xi_2)$独立. 这里 $\sigma(\xi_1)$、$\sigma(\xi_2)$是分别由 ξ_1,ξ_2 生成的 σ 代数，即 $\sigma(\xi_i)=(\xi_i^{-1}(E),E$ 是 X 中的 Borel 集$)$，$(i=1,2)$.

(iv) 称集合族$(A_\lambda,\lambda\in\Lambda)$ (σ 代数族$(\mathscr{B}_\lambda,\lambda\in\Lambda)$，可测函数族$(\xi_\lambda,\lambda\in\Lambda)$)两两独立，若其中任意两个集合(两个 σ 代数，两个函数)独立.

(v) 称集合 $A_1,\cdots,A_n\in\Sigma$ 相互独立，若

$$P(\bigcap_{k=1}^{m}A_{i_k})=\prod_{k=1}^{m}P(A_{i_k}) \tag{2}$$

其中 $m=2,\cdots,n,\ i_k\in\{1,\cdots,n\},i_k\neq i_s$.

称 σ 代数 $\mathscr{B}_1,\cdots,\mathscr{B}_n$相互独立，若对于任何 $A_i\in\mathscr{B}_i,A_1,\cdots,A_n$ 相互独立. 称 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 相互独立，若 $\sigma(\xi_1),\cdots,\sigma(\xi_n)$相互独立.

(vi) 称集合族$(A_\lambda,\lambda\in\Lambda)$ (σ 代数族$(\mathscr{B}_\lambda,\lambda\in\Lambda)$，函数族$(\xi_\lambda,\lambda\in\Lambda)$)相互独立，若其中任意有限多个集合(任意有限多个 σ 代数，任意有限个函数)相互独立.

定理 1　设(Ω,Σ,P)是概率空间.

(1) 若 $\pi_1=\{A_i^{(1)},i\in I\},\pi_2=\{A_i^{(2)},i\in J\}$是 Σ 的两个子集族，π_1,π_2 关于有限交封闭(称之为 π 类集族)，π_1,π_2 独立(即 π_1 中任一集合与 π_2 中任一集

合独立)，则 $\sigma(\pi_1),\sigma(\pi_2)$独立.

(2) 将(1)推广到任意多个子集族和相互独立的情况结论也是成立的. 特别地，若$\{\mathscr{B}_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$是任意的集合类的族，每个类 $\mathscr{B}_\lambda$ 关于有限交封闭(π类)，而$\{\mathscr{B}_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$相互独立，若 $\Lambda_1,\Lambda_2\subset\Lambda$ 并且 $\Lambda_1\cap\Lambda_1=\varnothing$,

$$\mathscr{G}_1=\sigma(\mathscr{B}_\lambda,\lambda\in\Lambda_1),\mathscr{G}_2=\sigma(\mathscr{B}_\lambda,\lambda\in\Lambda_2)$$

则 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 独立.

证明 1° 设$\mathscr{G}=\{B\in\sigma(\pi_2),P(A\cap B)=P(A)P(B),\forall\ A\in\pi_1\}$. 由假设 $\pi_2\subset\mathscr{G}$，从而 $\sigma(\pi_2)\subset\sigma(\mathscr{G})$. 我们证明 $\sigma(\mathscr{G})=\mathscr{G}$，即 $\mathscr{G}$ 本身是 σ 代数从而由 $\mathscr{G}$ 的定义得到 $\mathscr{G}=\sigma(\pi_2)$.

再设 $\mathscr{H}=\{A\in\sigma(\pi_1),P(A\cap B)=P(A)P(B),\forall\ B\in\sigma(\pi_1)\}$同样的证明得到 $\mathscr{H}=\sigma(\pi_1)$. 由 $\mathscr{G},\mathscr{H}$ 的定义得到 $\sigma(\pi_1),\sigma(\pi_2)$独立.

现在证明 $\mathscr{G}$ 是 σ 代数.

易知 $\Omega,\varnothing\in\mathscr{G}$. 若 $B\in\mathscr{G}$，则 $B^c=\Omega\backslash B$,

$$\begin{aligned}P(B^c\cap A)&=P((\Omega\cap A)\backslash(B\cap A))\\&=P(A)-P(B\cap A)\\&=P(A)-P(B)P(A)\\&=P(B^c)P(A)\end{aligned}$$

故 $B^c\in\mathscr{G}$. 若 $B_1,B_2\in\mathscr{G},B_1\cap B_2=\varnothing$，则

$$\begin{aligned}P((B_1\cup B_2)\cap A)&=P(B_1\cap A)+P(B_2\cap A)\\&=P(B_1)P(A)+P(B_2)P(A)\\&=P(B_1\cup B_2)P(A)\end{aligned}$$

故 $B_1\cup B_2\in\mathscr{G}$，这对于有限并也是真的.

现在设 $B_n\in\mathscr{G},B_n\subset B_{n+1}$，则

$$\begin{aligned}P\Big(\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\big)\cap A\Big)&=P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n\cap A)\Big)=\lim_{n\to\infty}P(B_n\cap A)\\&=\lim_{n\to\infty}P(B_n)P(A)=P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\Big)P(A)\end{aligned}$$

这说明$\lim\limits_{n\to\infty}B_n\in\mathscr{G}$. 得证.

2° 推广到有限多个的情况是明显的. 对于任意多个的情况注意到其相互独立性是建立在任意有限多个相互独立的基础上的，故结论仍然成立.

定理 2 假定 X,Y 是 Banach 空间.

(i) 设 $\xi_i:\Omega\to X$ 是独立 R. V.，$f_i:X\to Y$ 是 Borel 函数 $(i=1,2)$，则

$f_i(\xi_i)$ $(i=1,2)$是独立 $R.V.$

(ii) 设 $\xi_i:\Omega\to X$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是相互独立 R.V.，$f:X^k\to Y, g:X^{n-k}\to Y$ 是 Borel 函数，则 $f(\xi_1,\cdots,\xi_k), g(\xi_{k+1},\cdots,\xi_n)$ 是独立 $R.V.$，其中 X^k, X^{n-k}是乘积空间.

证明 由于$(f_i\circ\xi_i)^{-1}(\mathscr{G})=\xi_i^{-1}(f_i^{-1}(\mathscr{G}))\subset\xi_i^{-1}(\mathscr{X})$其中 $\mathscr{X},\mathscr{G}$ 分别是 X,Y 中的 Borel σ 代数，$\xi_1^{-1}(\mathscr{X})$与 $\xi_2^{-1}(\mathscr{X})$ 的独立性导致所要的结论.

对于(ii) 也一样，二者都是定理 1 的推论.

由定理 2 可以知道，若 ξ_1,ξ_2 是取值于 Banach 空间 X 的 R.V.，并且两者独立，则 $\|\xi_1\|, \|\xi_2\|$ 独立，$\|\xi_1\|^p, \|\xi_2\|^p (0<p<\infty)$ 独立，$x^*(\xi_1)$，$x^*(\xi_2)$ $(x^*\in X^*)$ 独立. 若$(\xi_n, n\geqslant 1)$ 相互独立，则 ξ_n 与 $\sum\limits_{i\neq n}\alpha_i\xi_i$ 独立.

定理 3 设 $\xi:\Omega\to R, \eta:\Omega\to X$ 分别是定义在概率空间(Ω,Σ,P)上的实函数和向量值函数，若 ξ,η 独立并且 $\xi,\eta,\xi\eta$ 可积，则

$$E\xi\eta = E\xi E\eta \tag{3}$$

证明 先证必要性. 对于 ξ,η 都是实值并且都是简单函数的情况，例如

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i},\ \bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega,\ A_i\cap A_k=\varnothing,\ i\neq k,$$

$$\eta=\sum_{j=1}^{m}b_j\chi_{B_j},\ \bigcup_{j=1}^{m}B_j=\Omega,\ B_j\cap B_l=\varnothing,\ j\neq l,$$

这里 $a_i,b_j\in R$. 容易得到

$$\begin{aligned}E\xi\eta &= E\sum_{i,j}a_ib_j\chi_{A_i\cap B_j}=\sum_{i,j}a_ib_jP(A_i\cap B_j)\\ &=\sum_{i,j}a_ib_jP(A_i)P(B_j)=\Big(\sum_i a_iP(A_i)\Big)\Big(\sum_j b_jP(B_j)\Big)\\ &=E\xi E\eta.\end{aligned}$$

上述有限和也可推广到无穷和，即定理的结论对取可数值的函数是成立的.

在 $\xi,\eta,\xi\eta$ 都是可积的一般情况下，取实数族 $a_i^{(n)}$ $(-\infty<i<\infty,\ 1\leqslant n<\infty)$ 满足 $a_i^{(n)}\leqslant a_{i+1}^{(n)}$，$\lim\limits_{i\to-\infty}a_i^{(n)}=-\infty$，$\lim\limits_{i\to+\infty}a_i^{(n)}=+\infty$并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_i(a_{i+1}^{(n)}-a_i^{(n)})=0$. 记

$$A_i^{(n)}=\{\omega, a_i^{(n)}\leqslant\xi<a_{i+1}^{(n)}\},\ \xi_n=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i^{(n)}\chi_{A_i^{(n)}}$$

$$B_i^{(n)}=\{\omega, a_i^{(n)}\leqslant\eta<a_{i+1}^{(n)}\},\ \eta_n=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j^{(n)}\chi_{B_j^{(n)}}$$

由 ξ,η 独立知道 $A_i^{(n)}, B_j^{(n)}$相互独立，因此 ξ_n,η_n 独立. 由上面的论证

$$E\xi_n\eta_n = E\xi_n E\eta_n,$$

令 $n\to\infty$ 即得出 $E\xi\eta=E\xi E\eta$.

对于 ξ 为实值 $R.V.$, η 为向量值 $R.V.$ 的情况，只须考虑 ξ 与 $x^*\eta$ 两个 $R.V.$ 这里 $x^*\in X^*$ 是 X 上的连续线性泛函. 由定理 2 及其后面的说明，ξ 与 $x^*\eta$ 独立，于是

$$x^*E\xi\eta = E\xi x^*\eta = E\xi Ex^*\eta = E\xi x^*(E\eta)$$

x^* 是任意的，得出 $E\xi\eta=E\xi E\eta$.

定理 4 设 ξ 是概率空间 (Ω,Σ,P) 上的 $R.V.$, $\mathscr{B}\subset\Sigma$ 是子 σ 代数. 若 ξ 可积并且 ξ 与 $\mathscr{B}$ 是独立的(即 $\sigma(\xi)$ 与 $\mathscr{B}$ 独立)，则

$$E(\xi|\mathscr{B}) = E\xi \tag{4}$$

证明 注意 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ 当且仅当 $E\chi_A\chi_B=E\chi_AE\chi_B$. 现在对于任何 $A\in\mathscr{B}$. 由条件期望定义和独立性

$$\int_A E(\xi|\mathscr{B})dP = \int_A \xi dP = E\xi\chi_A = E\xi E\chi_A = \int_A (E\xi)dP$$

为了更明确也可先对简单函数运用此式，然后转到一般情况. 总之(4) 成立.

在下面定理中记 $A_n, i, 0 = \limsup\limits_n A_n = \bigcap\limits_{n\geqslant 1}\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$，称之为有无穷多个 A_n 出现的事件(集合).

定理 5 (Borel-Cantelli 引理) 设 (Ω,Σ,P) 是概率空间.

(i) 若 $A_n\subset\Sigma$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$，则 $P(A_n,i,0)=0$.

(ii) 若 A_n 两两独立并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$，则 $P(A_n,i,0)=1$.

证明 易知对于任何 $n, A_n,i,0\subset\bigcup\limits_{k\geqslant n}A_k$，于是 $P(A_n,i,0)\leqslant P(\bigcup\limits_{k\geqslant n}A_k)\leqslant\sum\limits_{k\geqslant n}P(A_k)\to 0\ (n\to\infty)$ 得到(i).

为了得到(ii)，设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$，对于 $\forall\, m\geqslant n$，由独立性

$$\begin{aligned}1-P(\bigcup_{k=n}^{m}A_k) &= P(\bigcap_{k=n}^{m}A_k^c) = P(A_n^c)\cdots P(A_m^c)\\ &= (1-P(A_n))\cdots(1-P(A_m))\\ &\leqslant e^{-\sum_{k=n}^{m}P(A_k)}, \qquad (1+x\leqslant e^x, x\geqslant -1)\end{aligned}$$

对于每个固定的 n, $\sum\limits_{i=n}^{\infty}P(A_i)=\infty$. 从而

$$P(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)=\lim_{m\to\infty}P(\bigcup_{k=n}^{m}A_k)=1,$$

于是

$$P(A_n,i,0)=P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geqslant n}A_k)=\lim_{n\to\infty}P(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)=1.$$

对于$R.V.$ 序列$(\xi_n,n\geqslant 1)$,称 $\mathscr{T}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma(\xi_k,,k\geqslant n)$ 是$(\xi_n,n\geqslant 1)$的尾σ代数.

定理 6 (Kolmogorov 0-1 率) 若 $(\xi_n,n\geqslant 1)$ 是相互独立的 $R.V.$ 序列,$\mathscr{T}$ 是相应的尾 σ 代数,则对于每个 $A\in\mathscr{T}$,或者 $P(A)=0$ 或者 $P(A)=1$.

证明 由于 ξ_n 相互独立,因此由定理 1,对于每个 n,$\sigma(\xi_n)$与 $\sigma(\xi_k,k\geqslant n+1)$是相互独立的. 但 $\mathscr{T}\subset\sigma(\xi_k,k\geqslant n+1)$,所以 $\sigma(\xi_n)$与 $\mathscr{T}$ 独立. 同样由定理 1,$\mathscr{T}$ 与 $\sigma(\sigma(\xi_n),n\geqslant 1)=\sigma(\xi_n,n\geqslant 1)$ 独立. 但 $\mathscr{T}\subset\sigma(\xi_n,n\geqslant 1)$,所以对于每个 $A\in\mathscr{T}$,A 与 A 独立,即

$$P(A)=P(A\cap A)=P(A)^2$$

故 $P(A)=0$ 或 1.

定义 2 设 (Ω,Σ,P)是概率空间,$\mathscr{B},\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 是 Σ 的子 σ 代数,称 $\mathscr{B}_1$,$\mathscr{B}_2$ 关于 $\mathscr{B}$ 是条件独立的,若对于任何 $A\in\mathscr{B}_1$,$B\in\mathscr{B}_2$,

$$E(\chi_A\chi_B|\mathscr{B})=E(\chi_A|\mathscr{B})E(\chi_B|\mathscr{B})\ a.e. \tag{5}$$

称(Ω,Σ,P)上的 $R.V.$ ξ_1,ξ_2 关于 σ 代数 $\mathscr{B}$ 条件独立,若 $\sigma(\xi_1),\sigma(\xi_2)$关于 $\mathscr{B}$ 条件独立.

命题 (1) 若 ξ,η 可积,ξ 为实值,η 为实值或向量值并且 ξ,η 关于 σ 代数 $\mathscr{B}$ 条件独立,则

$$E(\xi\eta|\mathscr{B})=E(\xi|\mathscr{B})E(\eta|\mathscr{B}) \tag{6}$$

(2) 设 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 是 Σ 的子 σ 代数,$\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 独立,$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{B}_1$(或 $\mathscr{B}_2$)的子 σ 代数,则 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 关于 $\mathscr{B}$ 条件独立.

证明 1° (6) 的证明可以归结为 ξ,η 为简单函数的情况. 设 $\xi=\sum_i a_i\chi_{A_i}$,$\eta=\sum_j x_j\chi_{B_j}$,$a_i\in R$,$x_j\in X$,$A_i\in\sigma(\xi)$,$B_j\in\sigma(\eta)$. 此时有

$$\begin{aligned}E(\xi\eta|\mathscr{B})&=E\Big(\sum_{i,j}a_ix_j\chi_{A_i}\chi_{B_j}|\mathscr{B}\Big)\\&=\sum_{i,j}a_ix_jE(\chi_{A_i}\chi_{B_j}|\mathscr{B})\\&=\sum_{i,j}a_ix_jE(\chi_{A_i}|\mathscr{B})E(\chi_{B_j}|\mathscr{B})\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_i a_i E(\chi_{A_i} | \mathscr{B}) \right) \left(\sum_j x_j E(\chi_{B_j} | \mathscr{B}) \right)$$

$$= E(\xi | \mathscr{B}) E(\eta | \mathscr{B})$$

2° 对于任何 $A \in \mathscr{B}_1, B \in \mathscr{B}_2$，不妨设 $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}_1$，则对于任何 $e \in \mathscr{B}, e \cap A \in \mathscr{B}_1$，故 $e \cap A$ 与 B 独立.

$$\int_e E(\chi_A \chi_B | \mathscr{B}) dP = \int_e \chi_A \chi_B dP = E\chi_{A\cap e} \chi_B$$

$$= E\chi_{A\cap e} E\chi_B = P(B) \int_e \chi_A dP = P(B) \int_e E(\chi_A | \mathscr{B}) dP$$

$$= \int_e P(B) E(\chi_A | \mathscr{B}) dP = \int_e E(\chi_B | \mathscr{B}) E(\chi_A | \mathscr{B}) dP$$

最后一步是因为 $B \in \mathscr{B}_2$，则 B 与 $\mathscr{B}$ 独立，从而 $E(\chi_B | \mathscr{B}) = E\chi_B = P(B)$.

定理 7 设 (Ω, Σ, P) 是概率空间，$\mathscr{B}, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ 是 Σ 的子 σ 代数，则以下条件等价.

(i) $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ 关于 $\mathscr{B}$ 条件独立.

(ii) 对于任何 $\mathscr{B}_1$ 可测的可积函数 ξ

$$E(\xi | \mathscr{B} \vee \mathscr{B}_2) = E(\xi | \mathscr{B}). \tag{7}$$

(iii) 对于任何 $\mathscr{B}_2$ 可测的可积函数 ξ

$$E(\xi | \mathscr{B} \vee \mathscr{B}_1) = E(\xi | \mathscr{B}). \tag{8}$$

证明 只须证明(i)与(ii)等价.

(i)⇒(ii) 只须对于 $\mathscr{B}_1$ 可测的简单函数证明之. 由条件期望算子的线性这又归结为对于任何 $A \in \mathscr{B}_1$，

$$E(\chi_A | \mathscr{B} \vee \mathscr{B}_2) = E(\chi_A | \mathscr{B}). \tag{9}$$

为证此式，考虑 $\forall\ e \in \mathscr{B}$，注意此时对于 $\forall\ B_2 \in \mathscr{B}_2, e \cap B_2 \in \mathscr{B} \vee \mathscr{B}_2$，并且 $\mathscr{B} \vee \mathscr{B}_2$ 中元素都可写成此种形式. 又

$$\int_{e\cap B_2} E(\chi_A | \mathscr{B} \vee \mathscr{B}_2) dP = \int_{e\cap B_2} \chi_A dP = \int_e \chi_{A\cap B_2} dP$$

$$= \int_e E(\chi_{A\cap B_2} | \mathscr{B}) dP$$

$$= \int_e E(\chi_A | \mathscr{B}) E(\chi_{B_2} | \mathscr{B}) dP \qquad \text{由条件独立性}$$

$$= \int_e E(\chi_{B_2} E(\chi_A | \mathscr{B}) | \mathscr{B}) dP$$

$$= \int_e \chi_{B_2} E(\chi_A | \mathscr{B}) dP = \int_{e\cap B_2} E(\chi_A | \mathscr{B}) dP$$

于是(9)成立.

(ii)⇒(i) 对于任何 $A\in\mathscr{B}_1, B\in\mathscr{B}_2$，$\chi_B$ 关于 $\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2$ 可测，由(9)

$$\begin{aligned}E(\chi_A\chi_B|\mathscr{B}) &= E(E(\chi_A\chi_B|\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2)|\mathscr{B})\\ &= E(\chi_B E(\chi_A|\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2)|\mathscr{B})\\ &= E(\chi_B E(\chi_A|\mathscr{B})|\mathscr{B})\\ &= E(\chi_A|\mathscr{B})E(\chi_B|\mathscr{B}),\end{aligned}$$

(5)成立.

定理 8 设 $f_k=(f_{kn},n\geqslant 0)$ 是一列实值或向量值鞅 $(f_{k0}=0)$. f_k 与递增子 σ 代数列 $(\mathscr{B}_{kn},n\geqslant 1)$ 适应，$df_k=(df_{kn},n\geqslant 1)$ 是相应的鞅差. 若 $\mathscr{B}_{k\infty}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_{kn}(k\geqslant 1)$ 是相互独立的 σ 代数族，n_k 是单调递增自然数序列，则下列函数序列 $d\mathcal{F}$ 是适应于 σ 代数序列 $(\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$ 的鞅差序列(假定 $\mathcal{F}_0=0$).

$$d\mathcal{F}=(df_{11},\cdots,df_{1n_1},df_{21},\cdots,df_{2n_2},df_{31},\cdots)$$

$$\mathscr{B}_0=\mathscr{B}_{10},\mathscr{B}_1=\mathscr{B}_{11},\cdots,\mathscr{B}_{n_1-1}=\mathscr{B}_{1n_1-1},$$

$$\mathscr{B}_{n_1}=\mathscr{B}_{1n_1}\vee\mathscr{B}_{20},\cdots,\mathscr{B}_{n_1+n_2-1}=\mathscr{B}_{1n_1}\vee\mathscr{B}_{2n_2-1},$$

$$\mathscr{B}_{n_1+n_2}=\mathscr{B}_{1n_1}\vee\mathscr{B}_{2n_2}\vee\mathscr{B}_{30},\cdots\cdots$$

证明 只须证明对于任何自然数 $k,j,1\leqslant j\leqslant n_{k-1}$,

$$E(df_{kj}|\mathscr{B}_{1n_1}\vee\cdots\vee\mathscr{B}_{k-1n_{k-1}}\vee\mathscr{B}_{kj-1})=0.$$

注意 df_{kj}是关于 $\mathscr{B}_{kj}$可测的，$\mathscr{B}_{kj}\subset\mathscr{B}_{k\infty}$. 由定理条件 $\mathscr{B}_{kj}$与 $\mathscr{B}_{i\infty}(i\neq k)$独立，从而 df_{kj}与 $\mathscr{B}_{1n_1}\vee\mathscr{B}_{2n_2}\vee\cdots\vee\mathscr{B}_{k-1n_{k-1}}$独立. 又 $\mathscr{B}_{kj-1}\subset\mathscr{B}_{k\infty}$. 由命题 1(2)，$\mathscr{B}_{k\infty}$与 $\mathscr{B}_{1n_1}\vee\cdots\vee\mathscr{B}_{k-1n_{k-1}}$关于 $\mathscr{B}_{kj-1}$条件独立. 现在 df_{kj}是关于 $\mathscr{B}_{k\infty}$可测的函数，故由定理 7(ii)，

$$\begin{aligned}&E(df_{kj}|\mathscr{B}_{1n_1}\vee\cdots\vee\mathscr{B}_{k-1n_{k-1}}\vee\mathscr{B}_{kj-1})\\ &\quad=E(df_{kj}|\mathscr{B}_{kj-1})=0\quad a.e.\end{aligned}$$

故定理结论成立.

最后让我们转到随机变量的独立 Copy 与鞅的独立 Copy 的构造方法.

两个随机变量 $\xi,\eta:\Omega\to X$，其中 X 是 Banach 空间，称一个是另一个的 Copy，若对于 X 中的任何 Borel 集 B，

$$P(\omega,\xi(\omega)\in B)=P(\omega,\eta(\omega)\in B)$$

换句话说二者有相同的分布，对于随机变量序列 $(\xi_n,n\geqslant 1)$ 和 $(\eta_n,n\geqslant 1)$，设 $\xi_n:\Omega_n\to X,\eta_n:\Omega_n\to X$，在概率空间 (Ω_n,Σ_n,P_n) 上定义，考虑乘积概率空间

$(\widetilde{\Omega},\widetilde{\Sigma},\widetilde{P})$，其中 $\widetilde{\Omega}=\prod_{i=1}^{\infty}\Omega_i$，$\widetilde{\Sigma}=\prod_{i=1}^{\infty}\Sigma_i$，$\widetilde{P}=\prod_{i=1}^{\infty}P_i$，分别表示笛卡尔乘积，此时 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots)$ 为 $\widetilde{\Omega}$ 中的元，对于乘积空间 X^{∞} 中的任何"柱形"Borel 集 $B=B_1\times B_2\times\cdots\times B_n\times X\times\cdots$. 若

$$\widetilde{P}(\omega,(\xi_n(\omega_n),n\geqslant 1)\in B)=\widetilde{P}(\omega,(\eta_n(\omega_n),n\geqslant 1)\in B)$$

则称 $(\xi_n,n\geqslant 1)$ 是 $(\eta_n,n\geqslant 1)$ 的 Copy.

对于实值 $R.V.$ $\xi_1,\cdots,\xi_n$，用下述方法可以作 $R.V.$ $\widetilde{\xi}_1,\cdots,\widetilde{\xi}_n$，其中 $\widetilde{\xi}_1,\cdots,\widetilde{\xi}_n$ 相互独立并且 $\widetilde{\xi}_i$ 与 ξ_i 同分布$(1\leqslant i\leqslant n)$. 实际上令$(\widetilde{\Omega},\widetilde{\Sigma},\widetilde{P})$是与上面类似的 n 个概率空间的笛卡尔乘积，对于 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in\widetilde{\Omega}$. 令

$$\widetilde{\xi}_i(\omega)=\xi_i(\omega_i)\qquad(1\leqslant i\leqslant n)$$

若 $a\in R$，则

$$\{\omega,\widetilde{\xi}_i(\omega)<a\}=\Omega_1\times\cdots\times\Omega_{i-1}\times\{\omega_i,\xi_i(\omega_i)<a\}\times$$
$$\times\,\Omega_{i+1}\times\cdots\times\Omega_n$$

所以

$$\widetilde{P}(\omega,\widetilde{\xi}_i(\omega)<a)=P_i(\omega_i,\xi_i(\omega_i)<a)=P(\xi_i<a)$$

所以 $\widetilde{\xi}_i$ 与 ξ_i 同分布 $(1\leqslant i\leqslant n)$. 另一方面，由 Fubini 定理

$$\widetilde{P}(\widetilde{\xi}_1<a_1,\cdots,\widetilde{\xi}_n<a_n)=\prod_{i=1}^{n}P(\xi_i<a_i)=\prod_{i=1}^{n}\widetilde{P}(\widetilde{\xi}_i<a_i)$$

所以 $\widetilde{\xi}_1,\cdots,\widetilde{\xi}_n$ 是相互独立的.

若 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是同一个随机变量 ξ，则上述方法给了 n 个彼此独立且同分布的随机变量. 完全类似的方法可以构造出一个独立同分布的 $R.V.$ 序列.

对于向量值 $R.V.\xi$ 同样的方法也适用.

现在考虑一个鞅 $f=(f_n)$，它与递增 σ 代数序列 $(\mathscr{B}_n,n\geqslant 1)$适应. 用上述方法对于每个 n，作出独立同分布的 $R.V.$ 序列 f_{kn}，记 $f_k=(f_{kn})$，相应的 σ 代数列为$(\mathscr{B}_{kn},n\geqslant 1)$. 容易知道 f_k 都是与 f 同分布的，其次 f_k 仍是鞅，$E(df_{kn}|\mathscr{B}_{n-1})=E(df_n|\mathscr{B}_{n-1})=0$，$a.e.$ 另外，采用乘积 σ 代数，则 $\mathscr{B}_{kn}$与 $\mathscr{B}_{ln}$ 相互独立. 由定理 1，$\mathscr{B}_{k\infty}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_{kn}$与 $\mathscr{B}_{l\infty}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_{ln}$独立. 甚至$\{\mathscr{B}_{k\infty},k\geqslant 1\}$相互独立. 特别地，$f_k=(f_{kn})$ $(k\geqslant 1)$ 是相互独立的鞅，f_k 是 f 的独立同分布 Copy.

参考文献

Acosta, A. de,

[1] Strong exponential integrability of sums of independent B-valued random vectors, Probab. Math. Statist. **1**(1980), 133—150.

[2] Inequalities for B-valued random vectors with applications to the law of large numbers. Ann. probab. **9**(1981), 157—161.

Acosta, A. de, Kuelbs, J.,

[1] Some results on the cluster set C $(\{S_n/a_n\})$ and the LIL, Ann. Probab., **11** (1983), 102—122.

Acosta, A. de, Kuelbs, J., Ledoux, M.,

[1] An inequatity for the law of the iterated logarithm, LNM **990**(1982), 1—27, Springer-Verlag, Berlin.

Aldous, D. J.,

[1] Unconditional bases and martingales in Lp(F), Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **85**(1979), 117—123.

Alon, N., Milman, V. D.,

[1] Embedding of l_∞^k in finite dimensional Banach spaces, Israel J. Math., **45** (1983), 265—280.

Ando, T.,

[1] Contractive-projections in Lp spaces, Pacific J. Math. **17**(1966), 391—405.

Asplund, E.,

[1] Averaged norms, Isreal J. Math., **5**(1967), 227—233.

[2] Frechet differentiatility of Convex functions, Acta Math., **121**(1968), 31—47.

Assouad, P.,

[1] Martingales et rearrengement dans les uniforment lisses, Sem. Maurey-Schwartz, 1974—1975.

Austin, D. G., Edgar, G. A., Lonescu Tulcea. A.,

[1] Pointwise Convergence in terms of expectations, Zeit. Fur. Wahr., **30** (1974), 17—26.

Azema, J., Gundy, R. F., Yor, M.,

[1] Sur L'intégrabilité uniferme des martingales continues, Sém. Prob. XIV. L.

N. M. , **781** (1980), 53—61.

Beauzamy, B. ,

[1] Introduction to Banach spaces and their geometry, North-Holland, Amsterdam (1985).

[2] Espaces d'Intepolation reels: Toplogie et Geometrie, LNM **666** (1978).

Beck, A. ,

[1] On the Strong law of large numbers, Ergodic Theory, Proc. Inter. Symp. , Acodemic Press, New York, (1963), 21—53.

[2] A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers, Proc. Amer. Math. Soc. , **13**(1962), 329—334.

Bellow, A. ,

[1] Uniform amarts; a class of asymptotic martingales for which strong almost sure convergence obtains, Z. Wahr. Verw. Gebiete (3), **41**(1978), 177—191.

Benedek, A. , Calderon. A. P. , Panzone, R. ,

[1] Convolution operators on Banach Space valued functions, Proc. Nat. Acad. Sci. , **48**(1962), 356—365.

Bergh, J. , Lofström, J. ,

[1] Interpolation Spaces. An Introdution Spinger Verlag (1976).

Berkson, E. , Gillespie, T. A. , Muhly, P. S. ,

[1] Théorie Spectrale dans les espaces UMD, C. R. Acad. Sci. Paric, **302** (1986), 155—158.

Bessaga, C. , Pelczynski, A. ,

[1] On extreme ponts in separable conjugate spaces, Israel J. Math. **4**(1966), 262—264.

Bhavucka-Reid, A. T. ,

[1] Random integral equations, Math. Sci. Eng. , **96**(1974).

Bichteler, K. ,

[1] Stochastic integration and L^p-theory of Semi-martingales, Ann. Probab, **9** (1981), 49—89.

Blasco, O. ,

[1] Hardy spaces of vector Valued functions: Duality, Trans. Amer. Math. Soc. , **308**(1988), 495—507.

[2] Boundary Values of functions in Vector-valned Hardy Spaces and geometry

on Banach Sapces, J. Funct. Anal., **78**(1988), 346—364.

Blower, G.,

[1] A multiplier Characterization of analytic UMD Spaces, Studia Math. **96** (1990), 117—124.

Bochner, S., Taylor, A. E.,

[1] Linear functionals on certain spaces of obstractly-Valued function, Ann. Math., **39**(1938), 913—948.

Bollobás, B.,

[1] *Martingale inequalities. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **87**(1980), 377—382.

Bourgain, J.,

[1] Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, Ark. Mat. **21**(1983), 163—168.

[2] Extension of a result of Benedek, Calderén, and Panzone., Ark. Mat. **22** (1984), 91—95.

[3] Vector Valued singular integrals and the H^1-BMO duality, Probability Theory and Harmonic Analysis, J. A. Chao and W. A. Woyczgnski, New York (1986), 1—19.

[4] On high dimensional maximal functions associated to convex bodies, Amer. J. Math., **108**(1986), 1467—1476.

[5] Strongly exposed points in weakly compact concex sets in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **58**(1976), 197—200.

[6] On dentability and the Bishop-Phelps preperty, Israel J. Math., **28**(1977), 265—271.

Bourgain, J., Milman, V. D.,

[1] New volume ratio properties for convex symmetric bodies in R^n. Inventiones Math., **88**(1987), 319—340.

Bourgain, J., Tzafriri, L.,

[1] Integrability of "large" submatrices with applications to the geometry of Banach spaces and harmonic analysis, Israel J. Math., **57**(1987), 137—224.

Bourgin, R. D.,

[1] Geometrical aspects of convex Sets with the RN property, LNM **993** (1983).

Brown, D. R.,

[1] B convexity and reflexivity in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **187**(1974), 69—81.

Brunel, A.,

[1] Espaces associes a une suite bornee daus un espace de Banach, Sem. Manrey-Schwartz (1973—1974).

Brunel, A., Sucheston, L.,

[1] Sur quelques conditions equivalents a la super-reflexivite dans les espaces de Banach, C. R. A. S., **275**(1972), 993—994.

[2] On B-convex Banach spaces, Math. Systems Theory, **7**(1974), 294—299.

Brunk, H. D.,

[1] The strong law of large numbers, Duke Math. J., **15**(1948), 181—195.

Bu, S. Q., (步尚全)

[1] Quelques remarques Ser la propriete de RN analytigue, C. R. A. S, Paris. **306**(1988), 757—760.

[2] Existence of Radial limits of Harmonic functions in Banach spaces, Chin. Ann. of Math., **12**(8)(1991). 110—118.

Bukhvalov, A. V.,

[1] Hardy spaces of vector valued functions, J. Sov. Math. **16**(1981), 1051—1059.

Bukhvalov, A. V., Danilevich, A. A.,

[1] Boundary properties of analytic and harmonic functions with Values in Banach spaces, Mat. Zametki **31**(1982), 203—214. Math. notes, **31**(1982), 104—110.

Burkholder, D. L.,

[1] Martingale transforms, Ann. Math. Statist. **37**(1966), 1494—1504.

[2] Distribution function inequalities for martingales, Ann. Prob. **1** (1973), 19—42.

[3] A sharp inequality for martingale transforms, Ann. Prob. **7** (1979), 858—863.

[4] A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, Ann. Prob. **9** (1981), 997—1011.

[5] Martingale transforms and the geometry of Banach spaces, Proceedings of the Third International conference on Probability in Banach Sapces, Tufts University, 1980, LNM **860**(1981), 35—50.

[6] A nonlinear partial differential equation and the unconditional constant of the Hear system in L^p, Bull. Amer. Math. Soc. **7**(1982), 581—595.

[7] A geometric condition that imples the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions, in "Conference on Harmonic Analysis in Honer of Antoni Zygmund (Chicago, 1981)," Wadsworth, Belmont, California, 1983, 270—286.

[8] Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms, Ann. Prob. **12**(1984), 647—702.

[9] An elementary proof of an inequality of R. E. A. C. Paley, Bull. Lendon Math. Soc. **17**(1985), 474—478.

[10] Martingales and Fourier analysis in Banach spaces, LNM **1206**(1986), 61—108.

[11] Sharp inequalities for martingales and stochastic integrals, Colloque Paul Levy, Palaiseau, 1987, 75—94.

[12] Differential subordination of harmonic functions and martingales, LNM **1384** (1989), 1—23.

[13] An extension of a Classical martingale inequality, Probability Theory and Harmonic Analysis, J. A. Chao and W. A. Woyczynski, New York (1986), 21—30.

[14] Explerations in martingale theory and its applications, LNM **1464** (1989), 2—66.

Burkholder, D. L., Davis, B. J., Gundy, R. F.,

[1] Integral inqualities for Convex functions of oprators on martingales, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. **2**(1972), 223—240.

Burkholder, D. L., Gundy, R. F.,

[1] Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales, Acta Math., **124**(1970), 249—304.

Burkholder, D. L., Shintani, T.

[1] Approximation of L^1-bounded martingales by martingales of bounded variation, Proc. Amer. Math. Soc., **72**(1978), 166—169.

Calderón, A. P., Zygmund, A.,

[1] On the existence of certain singular integrals, Acta Math. **88**(1952), 85—139.

Carl, B.,

[1] Entropy numbers, S-numbers, and eigenvalue problems, J. Func. Anal., **41**(1981), 290−306.

Chacon, R. V., Sucheston, L.,

[1] On convergence of vector-valued asymptotic martingales, Z. Wahr. Verw. Gebiete (1), **33**(1975), 55−59.

Chao, J. A.,

[1] Hardy Spaces on regular martingales, LNM **939**(1982), 18−28.

[2] Conjugate characterizations of H^1 dyadic martingales, Math. Ann., **40** (1979), 63−67.

Chao, J. A., Long, R. L.,

[1] Martingale transforms with unbounded multipliers, Proc. Amer. Math. Soc. 1990.

Chatterji, S. D.,

[1] Martingale Convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces, Math. Scand., **22**(1968), 21−41.

[2] Les martingales et lours applications analytiques, LNM., **307**(1973), 27−164.

Chen, P. D., Chen, Z. X., Li, J. F., (陈培德,陈宗洵,李俊芬).

[1] n指标随机过程一般理论和n指标鞅文集,1989.

Chobanyan, S. A., Taricladze, V. I.,

[1] A counterexample concerning the CLT in Banach spaces, Probability Theory on Vector Spaces, Trzebieszowice (Poland) 1977, LNM., **656** (1978) Springer, Berlin Heidelberg, 25−30.

[2] Gaussian Characterization of certain Banach spaces, J. Mult. Anal., **7** (1977), 183−203.

Choi, K. P.,

[1] Some Sharp inequalities for martingale transforms, Trans. Amer. Math. Soc., **307**(1988), 279−300.

Chow, Y. S.,

[1] A martingale inequality and the law of large numbers, Proc. Amer. Math. Soc., **11**(1960), 107−111.

[2] Convergence theorems of martingales, ZfW., **1**(1963), 340−346.

Clarkson, J. A.,

[1] Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **40**(1936), 396−414.

Cobos, F.,

[1] Some Spaces in Which martingale difference sequences are unconditional, Bull. Polish Acad. of Sci. Math. **34**(1986), 695—703.

Coifman, R. R., Fefferman, C.,

[1] Weighted norm inequalities maximal functions and singular integrals, Studia Math., **51**(1974), 241—250.

Davis, B.,

[1] On the integrability of the martingales square function, Israel J. Math., **8** (1970), 187—190.

[2] Hardy spaces and rearrangements, Trans. Amer. Math. Soc., **261**(1980), 211—233.

[3] On the weak type (1, 1) inequality for conjugate functions, Proc. Amer. Math. Soc. **44**(1974), 307—311.

Davis, W. J.,

[1] The Radom-Nikodym property, Sem. Maurey-Schwartz, (1973—1974).

Davis, W. J., Milman, V. D., Tomczak-Jaegermann, N.,

[1] The distance between certain n-dimensional Banach spaces, Israel J. Math., **39**(1981), 1—15.

Davis, W. J., Phelps, R. R.,

[1] The Radon-Nikodym property and dentable sets in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **45**(1974), 119—122.

Dellacherie, C.,

[1] Inequalities de Convexite pour les processus Croissants et les Sousmartingales, Sem. Probab. 8, LNM **721**(1979), 371—377.

Dellacherie, C., Meyer, P. A.,

[1] Probabilitiés et Potentiels, (A), (B), (C), Hermann, Paries. (1975).

Diestel, J.,

[1] An introduction to the theory of absolutely p-summing operators between Banach spaces, Proceedings of the Centre for mathematical analysis Australian National University **9**(1985). 1—26.

[2] Geometry of Banach Spaces, Selected topics, LNM **485**(19).

Diestel, J., Uhl, J. J.,

[1] Vector Measures. Math. Surveys, No. 15, Amer. Math. Soc., Providence, Rhede Islomd (1977).

[2] Progress in Vector measures, 1977—83, LNM **1033**(1983), 144—192.

Doob, J. L.,

[1] Stochastic Processes, Wiley, New York, (1953).

[2] Semimartingales and subharmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), 86—121.

[3] Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart, Springer, New York (1984).

Doust, I.,

[1] Contractive projections on Banach spaces, Proc. Centre for Math. Anal., Australian National University **20**(1988), 50—58.

Dunford, N., Schwartz, T. T.,

[1] Linear operators, part I, Interscience publishers, New York (1957).

Durrett, R.,

[1] Brownian Motion and Martingales in Analysis, Inc.. Wadsworth (1984).

Dvoretzky, A.,

[1] Some results on convex bodies and Banach spaces, Proc. Int. Symp. on linear spaces, Jerusalem (1961), 123—160.

Dvoretzky, A., Rogers, C. A.,

[1] Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **36**(1950), 192—197.

Dwoling, P. N.,

[1] Representable operators and the analytic Radon—Nikodym property in Banach spaces, Proc. Roy. Irish Acad. **85**A (1985), 143—150.

Edgar, G. A.,

[1] Estremal integral representations, J. Functional Analysis (2), **23**(1976), 145—161.

[2] On the Radon-Nikodym property and martingale convergence, LNM., **645** (1978), 62—76.

Edger, G. A., Sucheston, L.,

[1] The Riesz decomposition for vector-valued amarts, Z. Wahr. Verw. Gebiete **36**(1976), 85—92.

[2] Martingales in the limit and amarts, Proc. Amer. Math. Soc., **67**(1977).

[3] On Vector-Valued Amarts and Dimension of Banach Spaces, Z. Wahr. Verw. Gebiete., **39**(1977).

Edward, R. E. , Gaudry, G. I. ,

[1] Littlewood-Paley and Multiplier Theory, Erg. 90. Springer-Verlag (1977).

Egghe, L. ,

[1] Strong convergence of pramarts in Banach spaces, Can. J. Math. , **33** (1981), 357—361.

[2] Stopping time techniques for analysts and probabilists, London Math. Soc. Lecture Notes Series: **100**(1984), Cambridge, Univ. Press, Cambridge.

Enflo, P. ,

[1] Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm, Israel J. Math. , **13**(1972), 281—288.

Essen, M. ,

[1] A superharmonic proof of the M. Riesz Conjugate function theorem, Ark. Mat. **22**(1984), 241—249.

Fefferman, C. ,

[1] Characterization of bounded mean oscillation, Bull. A. M. S. , **77**(1971), 587—588.

Fefferman, C. , Stein. E. M. ,

[1] H^p spaces of several variables, Acta Math. **129**(1972), 137—191.

Fernandez, D. L. ,

[1] Vector-valued singular integral operators on L^p-spaces with mixed norms and applications, Pacific J. Math. **129**(1987), 257—275.

Figiel, T. ,

[1] On the moduli of convexity and smoothness. Studia Math. , **56**(1976), 121—155.

[2] A short proof of Dvoretzky's theorem on almost spherical sections, Compositio Math. , **33**(1976), 297—301.

Figiel, T. , Lindenstrauss, J. , Milman, V. D. ,

[1] The dimention of almost Spherical Sections of Convex bodies, Acta Math. **139**(1977), 53—94.

Fisk, D. L. ,

[1] Quasi-martingales, Trans. Amer. Math. Soc. , **120**(1965) 369—389.

Garling, D. J. H. ,

[1] Brownian motion and UMD-Spaces, Conference on Probab. and Banach spaces, Zaragoza, 1985, LNM **1221**(1986), 36—49.

Garsia, A.,

[1] Martingale Inequalities, Sem. Notes on Recent Progress, Benjamin (1973).

[2] On a Convex function inequality for mantingales. Ann. Probab. **1**(1973), 171—174.

Ghoussoub, N., Saab. E.,

[1] On the weak Radon-Nikodym property, Proc. Amer. Math. Soc., **81** (1981), 81—84.

Giesy, D. P.,

[1] On a convexity condition in normed linear spaces, Trons. Amer. Math. Soc., **125**(1966), 144—146.

Giné, E., Mandrekar, V., Zinn, J.,

[1] On sums of independent random variables with Values in Lp, $2\leqslant p<\infty$, LNM., **709**(1979), 111—121.

Gine, E., Zinn, J.,

[1] Central limit theorems and weak laws of large numbers in certain Banach spaces, Z. Wahr. Verw. Geb., **62**(1983), 323—354.

Goodman, V., Kuelbs, J.,

[1] Rates of convergence for the functional LIL, Ann. Probab., **17**(1989), 301—316.

Goodman, V., Kuelbs, J., Zinn, J.,

[1] Some results on the LIL in Banach space with applications to weithted empirical processes, Ann. Probab., **9**(1981), 713—752.

Gordon, Y.,

[1] *some inequalities for Gaussian processes and applcations*, Israel J. Math., **50**(1985), 265—289.

[2] Gaussian processes and almost spherical sections of convex bodies, ann. Probab., **16**(1988), 180—188.

Gordon, Y., König, H., Schütt, C.,

[1] Gepmetric and probabilistic estimates for entropy and aproximation numbers of operators. J. of Approx. Th., **49**(1987), 219—239.

Gromov, M., Milman, V. D.,

[1] A topological application of the isoperimetric inequality, Amer. J. Math., **105**(1983), 843—854.

[2] Generalization of the spherical isoperimetric inequality to the uniformly con-

vex Banach spaves. Composito Math., **62**(1981), 263—282.

Guan, Z. Z., Zhang, G. Q., Feng, D. X., (关肇直，张恭庆，冯德兴)

[1] 泛函分析入门，上海科技出版社，1979.

Gundy, R. F.,

[1] On the class LlogL, Martingales, and singular integrals, Studia math., **33** (1969), 109—118.

[2] Inégalité pour martingales, LNM, **774**(1980).

Gut, A., Schmidt, K. D.,

[1] Amarts and Set function processes, LNM **1042** (1983).

Guttierez, J. A., Lacey, H. E.,

[1] On the Hilbert transform for Banach space Valued functions, LNM **939** (1981), 73—80.

Haagerup, U.,

[1] The best constants in the Khintchine inequality, Studia Math., **70**(1982), 231—283.

Hall, P., Heyde, C. C.

[1] Martingale limit theory and its application. Academic Press, New York (1980).

Halmos, P. R.,

[1] Measure theory. Van Nostrand, New York(1950).

Heinkel, B.,

[1] On the law of large numbers in 2-uniformly smooth Banach spaces, Ann. Probab., **12**(1984), 851—857.

[2] Relation entre théorème central-imite et lei du logarithme itéré dans les espaces de Banach, ZfW., **49**(1979), 211—220.

[3] An application of a martingale inequality of Dubins and Freedman to the law of large numbers in Banach spaces.

Herz, C. S.,

[1] Bounded mean oscillation and regulated martingales, T. A. M. S., **193** (1974), 199—215.

Ho, A.,

[1] The Radon-Nikodym property and weighted trees in Banach spaces, Israel J. Math., **32**(1979), 59—66.

Hoffmann-JØrgensen, J.,

[1] Sums of independent Banach space valued random variables, Studia Math., **52**(1974), 159－186.

[2] Probability and Geometry of Banach spaces, Functional Analysis, LNM., **948**(1982), 164－229.

Hoffmann JØrgensen, J., Pisier, G.,

[1] The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces, Ann. Probab., **4**(1976), 587－599.

Hou, Y. L., (侯友良)

[1] 强算子值鞅型序列,数学物理学报,**10**(1990),472－479.

[2] B值鞅的加权不等式与Banach空间的凸性和光滑性,数学物理学报,**13**(1993),71－79.

Hu, D. H., (胡迪鹤)

[1] 随机过程概论,武汉大学出版社,1986.

[2] B值鞅及经典分析,应用概率统计,**4**(1986),362－370.

Huff, R. E.,

[1] The Radon-Nikodym property for Banach Spaces－－ A Survey of geometric Aspects, Notes de Math., **63**(1977).

[2] Dentability and the Radon-Nikodym property, Duke Math. J., **41**(1974), 111－114.

Huff, R. E., Morris, P. D.,

[1] Geometric Characterizations of the Radon-Nikodym property in Banach spaces, Studia Math., **56**(1976), 157－164.

Itô, K., Nisio, M.,

[1] On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables, Osaka J. Math., **5**(1968), 25－48.

Jain, N. C.,

[1] Central Limit theorem in a Banach space. Probability in Banach Spaces, LNM., **526**(1976), 113－130.

James, R. C.,

[1] Some Self dual properties of Normed linear spaces, Ann. Math. Studies, **69**(1972), 169－175.

[2] Super-reflexive Banach spaces, Can. J. Math., **24**(1972), 896－904.

[3] Non reflexive spaces of type 2, Israel J. Math., **30**(1978), 1－13.

Jamison, B., Orey, S., Pruitt, W.,

[1] Convergence of weighted averages of independent random variables, ZfW., **4**(1965), 40—44.

John, F., Nirenberg, L.,

[1] On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pore Appl. Math., **14** (1961), 415—426.

Johnson, W. B., Schechtman, G.,

[1] Martingale inequalities in rearrangement invariant function spaces, Israel J. Math., **64**(1988), 267—275.

[2] Embedding l_p^m into l_1^n, Acta Math., **149**(1982), 71—85.

Kahane, J. P.,

[1] Some random series of functions, Lenington, Heath (1968).

Kazamaki, N.,

[1] A characteriaztion of BMO-martingales, Sém. Prob. X. L. N. M., **511** (1976), 536—538.

Kolmogorov, A. N.,

[1] Sur les fonstions harmoniques Conjugues et les Series de Fourier, Fund. Math. **7**(1925), 24—29.

König, H.,

[1] Vector valued multiplier theorems, in "Seminaire d'analyse fonctionnelle, 1985—1987," Publications mathematique de l'universite Paris Ⅶ(1988), pp. 131—140.

König, H., Tzafriri, L.,

[1] Some estimates for type and cotype constants, Math. Ann., **256**(1981), 85—94.

Krivine, J. L.,

[1] Sons-espaces de dimension finie des espaces de Banach reticules, Ann. of Maths, **104**(1976) 1—29.

Kuelbs, J.,

[1] The law of the iterated logarithm and related strong convergence theorems for Banach space valued random variables, LNM., **539**(1976), 225—314.

[2] Kolmogorov's law of the iterated logarighm for Banach space valued random variablies, Illinois J. Math., **21**(1977), 784—800.

[3] When is the cluster set of $\{s_n/a_n\}$ empty?, Ann. Probab., **9**(1981), 377—394.

Kuelbs, J., Zinn, J.,

[1] Some results on LIL behavior, Ann. Probab., **11**(1983), 506—557.

Kunen, K., Rosenthal, H.,

[1] Martingale proofs of some geometrical results in Banach space theory, Pacific J. Math., **100**(1982), 153—175.

Kuo, T.,

[1] On conjugate Banach spaces with the Radon-Nikodym property, Pacific J. Math., **59**(1975), 497—503.

Kwapien, S.,

[1] Isomorphic characterizations of inner product Spaces by orthogonal Series with Vector Valued Coefficients, Studia Math., **44**(1972), 583—595.

Lecom, L.,

[1] Convergence in distribution of stochastic processes, Univ. of California Publ. Statist, **2**(1957), 207—236.

Ledoux, M.,

[1] La loi du logarithme itéré pour les variables aléatoires prégaussiennes à valeurs dans les espaces Banach à norme régulière, LNM., **920**(1982), 609—622, Springer Verlag, Berlin.

[2] Sur les théorèmes limites dans certains espaces de Banach lisses, LNM., **990**(1983), 150—169.

Ledoux, M., Talagrand, M.,

[1] Characterization of the law of the iterated logarithm in Banach spaces, Ann. Probab., **16**(1988), 1242—1264.

[2] Some applications of isoperimetric methods to strong limit theorems for sums of independent random variables, Ann. Probab., **18**(1990), 754—789.

[3] Probability in Banach spaces. Springer-Verlag. 1991.

Lindenstrauss, J., Pelczynski, A.,

[1] Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$ spaces and their applications, Studia Math., **29**(1968), 275—326.

Lindenstrauss, J., Tzafriri, L.,

[1] On the complemented subspaces problem, Israel J. Math., **9**(1971), 263—269.

[2] Classical Banach Spaces **I**: Function spaces. Springer, New York(1979).

Liptser, R. S., Shiryayev, A. N.,

[1] Statistics of Random Processes I, Springer (1977).

Liu, P.D.,(刘培德)

[1] 鞅空间与Banach空间的几何性质,中国科学,**7**(A)(1990), 694—704.

[2] UMD空间与B值鞅的大数定律,科学通报,**34**(1989), 401—404

[3] 鞅不等式与Banach空间的凸性和光滑性,数学学报,**32**(1989),765—775.

[4] 由鞅的微分从属确定的Hilbert空间的同构特征,数学学报,**35**(1992), 387—395.

[5] B值鞅的Davis型不等式与Banach空间的几何性质,数学年刊,**11**(A)(1990),110—115.

[6] Banach空间的2光滑性与一类特殊的鞅变换,数学年刊,**12**(A)(1991),70—77.

[7] Fefferman不等式与${}_aH_p$的共轭,数学年刊,**12**(A)(1991), 356—364.

[8] Hilbert空间的一个特征性质,数学进展, **18**(1989),219—225.

[9] The Φ inequalities for B Valued reqular martingales and the gometrical properties of Banach Spaces, Adv. Math., **19**(1990), 357—365.

[10] 向量值BMO鞅空间的等价刻划,数学物理学报,**10**(1990),448—454.

[11] 鞅型序列与Fréchet空间的核性,数学物理学报,**5**(1985),445—454.

[12] 具有无条件鞅差性质的空间,系统科学与数学,**9**(1989), 251—259.

[13] Frechet空间的一个核性特征,武大学报(自科版),**2**(1986),1—8.

[14] 鞅变换与Banach空间的几何性质,武大学报(自科版),**4**(1991),1—10.

Liu,P.D., Long, R.L.,

[1] Boundedness of seveal operators on martingale spaces and geometrical properties of Banach spaces, Chin. Ann. of Math., **13**(1992), 167—179.

Liu, P.D., Gan, S.X.,(刘培德,甘师信)

[1] B值鞅的一致可积性与Banach空间的几何性质,应用概率统计,**7**(1991), 21—26.

Liu, P.D., Hou, Y.L.,

[1] Transforms, diffrential Subordinations and A_p-Weighted inequalities of Banach-Space-Valued regular martingales, Acta Math. Sci., **12**(1992), 22—32.

Long, R.L.,(龙瑞麟)

[1] H_p鞅论,北京大学出版社,1985.

[2] A property of convex functions, Kexue Tongbao, **27**(1982), 641—642.

[3] Two classes of martingale spaces, 中国科学,**11**(A)(1982).

Long, R. L., Liu, P. D.,

[1] B值正规轶空间的实内插，数学年刊，**14**(A)(1993)，152—158.

Mandkekar, V.,

[1] Characterization of Banach spaces through validity of Bochner's theorem, LNM, **644**(1978), 314—326.

Maurey, B.,

[1] Type et cotype dans les espaces munis de structure locale inconditionnelle, Sém. Maurey-Schwartz 1973—74. Ecole Polytechnique, Paris.

[2] Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p. Astérisque, **11**(1974), Herman, Paris.

[3] Systeme de Haar, Sem. Maurey-Schwartz, 1974—75, Ecole Polytechnique, Paris.

Maurey, B., Pisier, G.,

[1] Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach, Studia Math., **58**(1976), 45—90.

McConnell, T. R.,

[1] On Fourier multiplier transformations of Banach Valued functions, Trans. Amer. Math. Soc., **285**(1984), 739—757.

[2] A Skorohod-like representation in infinite dimensions, Probability in Banach Spaces V, LMN **1153**(1985), 359—368.

Meyer, P. A.,

[1] Probabilite et potentiel, Hermann (1966).

Mikhlin, S. G.,

[1] On the Multipliers of Fourier integrals, Dokl. Akad, Nauk SSSR, **109** (1956), 701—703.

Milman, V. D.

[1] Volume approach and iteration procedures in local theory of normed spaces.

[2] A new proof of the theorem of A. Dvoretzky on sections of convex bodies, Funct. Anal. Appl, **5**(1971), 28—37 (translated from Russian).

[3] Some remarks about embedding of l_1^n in finite dimensional.

Milman, V. D., Pisier, G.,

[1] Banach spaces with a weak cotype 2 property, Israel J. Math., **54**(1986), 139—157.

Milman, V. D., Schechtman, G.,

[1] Asympototic theory of finite dimersional normed spaces, Springer LNM **1200** (1986).

Mourier, E.

[1] Eléments aléatoires dans un espace de Banach, Ann. Inst. Poincaré, **13** (1953), 161—244.

Mucci, A. G.,

[1] Limits for martingale-like sequences, Pacific. J. Math., **48**(1973).

[2] The martingale in the limit, Pacific J. Math., **64**(1976).

Muckenhoupt, B.,

[1] Weighted norm inequatities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc., **165**(1972), 207—226.

Musial, K.,

[1] The weak Radon-Nikodym property in Banach spaces, Studia Math, **64** (1979), 151—173.

Namioko. I., Phelps, R. R.,

[1] Banach spaces which are Asplund spaces, Duke Math. J., **42**(1975), 735—750.

Neveu, J.,

[1] Martingales à temps discret, Masson. Paris. (1972).

Olevskii, A. M.,

[1] Fourier series and Lebsque funclions, Uspehi Mat, Nauk **22**(1967), 237—239.

[2] Fourier Series with respect to general orthogonal systems, springer, New York, 1975.

Osserman, R.,

[1] The isoperimetric inequality, Bull. Amer. Math. Soc., **84**(1978), 1182 1238.

Pietsch, A.,

[1] Operator ideals. North-Holland, Amsterdam (1980).

Pisier, G.,

[1] Martingales with Values in uniformly convex spaces, Israel J. Math. **20** (1975), 326—350.

[2] Un exemple concernant la super-reflexitive, Sem. Maurey-Schwartz, 1974—75, E' cole Polytechnique, Paris.

[3] Sur les espaces de Banach qui ne contiennent pas uniforment de l_n^1, C. R. A. S. Paris. Ser. A, **277** (1983), 991—994.

[4] Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces, LNM **1206**(1986), 167—241.

[5] Factorization of Linear Operators and the Geometry of Banach Spaces, CBMs Regional Conf. Series in Math., (1986).

[6] "Type" des espaces normes, Sem. Maurey-Schwartz, 1973—74.

[7] Une propriete du type p-stable, Sem. Manrey-Schwartz, 1973—74.

[8] On the duality between type and cotype, LNM(**939**), 131—144.

[9] The Volume of convex bodies and Banach space geometry, Cambriege Univ., 1989.

[10] Sur les espaces de Banach K-convexes. Sem. d'Analyse fonctionnelle, no 11, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1979—80.

[11] Le théorème limite centrale et la lei du. Logarithme itérée dans les spaces de Banach: Sém. Maurey-Schwartz 1975—1976.

[12] On the dimension of the l_p^n-subspaces of Banach spaces, for $1<p<2$. Trans. Amer. Math. Soc. **276**(1983), 201—211.

[13] Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces. Ann. of Math., **115**(1982), 375—392.

[14] Weak Hilbert spaces, Pro. London Math. Soc., **56**(1988), 547—579.

Pisier, G., Xu. Q.,

[1] The Strong p-variation of martingales and orthogonal Series, Probab. Th. Rel. Fields, **77**(1988), 497—514.

Paley, R. E. A. C.,

[1] A remarkable Series of orthogonal functions I., Proc. London Math., Soc., **34**(1932), 241—264.

Pelczynski, A.,

[1] Structurac theory of Banach spaces and its interplay with analysis and probability, in "Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Warsaw, 1983)," PWN, Warsaw (1984), pp. 237—269.

[2] Geometry of finite dimensional Banach Spaces and operators ideals, Notes in Banach Spaces, University of Texas Press, Anstin and London (1980).

[3] On unconditional bases and Rademacher arerages, LNM **472** (1975), 119—129.

Pelczynski, A., Rosenthal, H. P.,

[1] Localization techniques in L^p spaces, Studia Math., **52**(1975), 263—289.

Pettis, B. J.,

[1] On integration in vector spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **44**(1938), 277—304.

Phelps, R. R.,

[1] Lectures on Choquet's theorem, Van Nostrand, Mathematical Studies **7** (1966).

[2] Dentability and extreme point in Banach spaces, J. Functional Analysis, **17** (1974), 78—90.

Rao, M. M.,

[1] Probability theory with applications, Academic Press, Inc., (1984).

Ren, C. D., (任重道)

[1] 关于自反 Orliçz 空间和 J. L. Lions 引理, 科学通报, **31**(1986), 1516—1517.

Riddle, L. H., Uhl, J. J.,

[1] Martingales and the fine line between Asplund spaces and spaces not containing a copy of l_1, (1983)

Riesz, M.,

[1] Sur les fonctions conjuquées. Math. Z. **27**(1927), 218—244.

Rosenthal, H. P.,

[1] On the subspaces of $L_p(p>2)$ spanned by sequences of independent random variables, Israel J. Math., **8**(1970), 273—303.

Rosinski, J.,

[1] Remarks on Banach spaces of stable type, Probability and Math. Statist, **1** (1980), 67—71.

[2] Central limit theorems for dependent random vectors in Banach spaces. LNM **939**(1981), 157—180.

Rudin, W.,

[1] Functional analysis, McGraw-Hill, Inc. 1973.

Rubio de Francia, J. L.,

[1] Martingale and integral transforms of Banach space Valued functions, Conference on Probab. and Banach spaces. Zaragoza, 1985, LNM **1221** (1986), 195—222.

[2] Fourier series and Hilbert transforms with values in UMD Banach Spaces,

Studia Math, **81**(1985), 95—105.

Rubio de Francia, J. L. ,Ruiz, F. J. , Torrea, J. L. ,

[1] Calderon-Zygmund theory for operator-valued Kernels. Adv. in Math. , **62** (1986), 7—48.

Saab,E. ,

[1] Dentabilité, points extrémaux et propriété de Radon-Nikodym, Bull. Sci. Math. , **99**(1975), 129—134.

Schechtman, G. ,

[1] Fine embedding of finite dimensional subspaces of L_p, $1\leqslant p<2$, into l_1^m, Proc. Amer. Math. Soc. , **94**(1985), 617—623.

Schwartz,L. ,

[1] Geometry and Probability in Banach spaces. LNM **852**(1981).

Stegall,C. ,

[1] The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces. **I** , Trans. Amer. Math. Soc. , **264**(1981), 507—519.

Stein,E. M. ,

[1] Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton U niv. Press. Princeton. (1970).

Stein,E. M. , Weiss,G. ,

[1] Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Pinceton (1971).

Stone, M.H. ,

[1] Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. , **41**(1937), 375—481.

Stout,W. F. ,

[1] Almost sure convetgence, Academic Press, New York(1974).

Szankowski,A. ,

[1] On Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies, Israel J. Math. , **17**(1974), 325—338.

Szarek,S. J. ,

[1] On the best constants in the Khinchin inequality, Studia Math. , **58**(1976), 197—208.

Talagrand,M. ,

[1] Sur l'intégrabilité des vecteurs gaussiens, Z. Wabr. Verw. Geb. , **68** (1984), 1—8.

[2] Regularity of Gaussian processes, Acta Math., **159**(1987), 99–149.

[3] An isoperimetric theorem on the cube and the Khintchin-Kahane inequalities, Proc. Amer. Math. Soc., **104**(1988), 905—909.

[4] Isoperimetry and integrability of the sum of independent Banach space valued random variables, Ann. Probab., **17**(1989), 1546—1570.

[5] Some Structure results for martingales in the limit and pramarts, Ann. Probab., **13**(1985), 1192—1203.

Taylor, R. L.,

[1] Convergence of weighted sums of arrays of random elements in type p spaces with applications to density estimation, Sankhyā, **44**(1982), 341—351.

Tzafriri, L.,

[1] On Banach spaces with unconditional bases. Israel J. Math., **17**(1974), 84—93.

Uhl, J. J.

[1] Martingales of strongly measurable Pettis integrable functions, Trans. Amer. Math. Soc. **167**(1972).

[2] Pettis mean convergence of vector-Valued Asymptotic martingales, Z. Wahr. Verw. Gebiete **37**(1977).

Wang, Z. P., (汪振鹏)

[1] Expectation of Stopped Uniform amarts and convergence of Mils and GFTs, Science in China, **33**(A) (1990), 269—280.

[2] 缺型序列，数学物理学报，**5**(1985)，301—314.

Wang, Z. Q., (王梓坤)

[1] 随机过程论，科学出版社，1965.

Wittmann, R.,

[1] A general law of iterated logarithm. ZfW., **68**(1985), 521—543.

Woyczynski, W. A.,

[1] On Marcinkiewicz-Zygmund laws of large numbers in Banach spaces and related rates of convergence, Prob, and math, Stat., **1**(1980).

[2] Geometry and martingates in Banach spaces, LNM., **472** (1975), 235—275.

[3] Geometry and Martingales in Banach spaces-Part Ⅰ, In Kruelbs, J., Ed. Advances in Probability, **4**(1978), 267—517.

[4] Asymptotic behavior of martingales in Banach spaces Ⅰ, Martingale Theory

in Harmonic Analysis and Banach Spaces, LNM., **939**(1981), 216—225.

[5] Asymptotic behavior of martingales in Banach spaces. I.

[6] Tail probabilities of sums of random vectors in Banach spaces, and related mixed norms, LNM., **794**(1980), 455—489.

Wu.C.X., Wang, T.F., Chen, S., Wang, Y., (吴从炘,王廷辅,陈述涛,王玉文)

[1] Orlicz 空间几何理论,哈尔滨工大出版社,1986.

Wu,Z.Q., Wang,X.C., (吴智泉,王向忱)

[1] 巴氏空间上的概率论,吉林大学出版社,1990.

Xia,D.X., Wu,Z.R., Yan, S.Z., Su.W.C., (夏道行,吴卓人,严绍宗,舒五昌)

[2] 实变函数论与泛函分析,高教出版社,1979.

Xu,Q.H., (许全华)

[1] Convexite's uniformes et ineqalite's de martingales, Pub. Irma, Lille, **17** (1989), 1—31.

Yen,K.A. (严加安)

[1] 鞅与随机积分,上海科技出版社, 1981.

Yen,S.J., Wang, J.X., Liu, X.F., (严士健,王隽骧,刘秀芬)

[1] 概率论基础,科学出版社,1982.

Yu,X.T., (俞鑫泰)

[1] Banach 空间几何理论,华东师大出版社,1986.

Zhao, J.F., (赵俊峰)

[1] Banach 空间结构理论,武汉大学出版社,1991.

[2] Banach 空间几何理论中的若干问题,数学物理学报,**7**(1987),4 3—452.

Zimmermann,F.,

[1] On Vector-Valued Fourier multiplier theorems, Studia Math. **93**(1989), 201—222.

Zinn,J.,

[1] Inequalities in Banach spaces with applications to probabilisti: limit theorems: a survey, LNM., **860**(1981), 324—329.

Zygmund,A.,

[1] Trigonometric Series. Vol Ⅰ, Ⅱ. Cambridge, 1968.

索 引

一、中文部分

一划

一致可积 35

Pettis—— 127

一致凸空间 336

q—— 347

一致光滑空间 336

p—— 347

一致包含 l_p^n 280

二划

几乎可分值函数 23

三划

上函数 440

下函数 440

大数定律

强—— 215

弱—— 216

四划

预 Gauss R. V. 232

中心化 Gauss R. V. 229

中心极限定理 229

分划 2

公平对策 113

内插空间 479

无条件常数 536

无条件鞅差序列(UMD)性质 496

五划

对称 R. V. 198

对称 R. V. 序列 198

可料增加过程 81

六划

凸体 309

凸性模 336

凸函数 155

严格—— 155

共轭函数 524

共轭范数 309

同分布 R. V. 198

向量测度 2

有界变差—— 2

可数可加—— 3

μ 连续—— 14

有限可表现 325

有界完备基 90

原子 67

光滑模 336

再生核 Hilbert 空间 244

决定集 27

七划

尾概率一致有界 223

八划

局部 Bochner 可积 45

变差算子 430

极大函数 63

九划

重对数律 241

有界—— 241

紧—— 241

测度空间 14

有限—— 14

测度延拓 20

测度分裂 155

测度变换 474

胎紧 154

一致—— 230

树 59

有界无穷δ—— 66

加权—— 177

逼近—— 177

有限—— 375

绝对可和算子 10

选样性质 82

十划

特征泛函 230

十一划

渐近鞅 91

一致—— 102

概率—— 112

十二划

停时 73

有界—— 73

有限—— 73

停止性质 82

期望 50

条件—— 50

弱可测 23

弱 a.e. 收敛 24

弱 RN 性质 47

弱紧生成空间 88

超自反 325

超性质 325

超幂空间 389

微分从属 444

十三划

鞅 59

上—— 78

下—— 78

正则—— 61

正规—— 464

拟—— 108

极限—— 112

亚极限—— 112

鞅变换算子 430

随机有界 198

稠密特征 163

椭球 309

二、外文部分

英文

A_p 权函数 475

Asplund 空间 171

B 凸空间 296

Banach-Mazur 距离 279

D 可微 (G,F 可微) 171

Dunford 积分 41

Gauss 测度 232

Gauss R. V. 229

Gauss p 型 251

Haar 函数系 536

Haar 测度 60

Hilbert 变换 490

Hilbert-Schmidt 算子 267

J 凸空间 376

K 凸空间 293

K 泛函 480

Krein-Milman 性质 145

Lorentz 空间 479

p 型空间 186

p 型常数 186

p 绝对可和算子 263

p 绝对可和范数 263

Polish 空间 154

q 余型空间 186

q 余型常数 186

Rademcher 函数列 183

Radon 测度 230

Radon R. V. 255

Radon-Nikodym (RN)性质 38

Schatten 类 532

Souslin 集 154

希文

σ 有界变差 119

σ 代数 1

  生成的—— 2

  完备—— 23

ζ 凸性 502

Φ 函数 395

  一般—— 395

  凸—— 396

  严格凸—— 396

  限制增长—— 396

[General Information]
书名=鞅与Banach空间几何学
作者=刘培德
页数=593
SS号=10236510
DX号=
出版日期=1993年12月第1版
出版社=武汉大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录
Ⅰ.向量测度与积分
1 向量测度
2 可数可加测度的性质
3 可测函数
4 Bochner积分
5 Pettis积分
Ⅱ.鞅与Rodon-Nikodym性质
1 条件期望
2 鞅及其收敛定理
3 停时与鞅
4 实值下鞅的应用
Ⅲ.渐近鞅及其它鞅型序列
1 渐近鞅
2 一致渐近鞅与有限维空间
3 鞅型序列的收敛定理
4 Pettis可积鞅与渐近鞅
Ⅳ.凸集的几何理论
1 可凹性
2 暴露点与端点表现
3 共轭空间中的凸集
4 Asplund空间、树与加权树
Ⅴ.Banach空间的型
1 Rademacher p型和q余型
2 独立增量鞅
3 P型空间中独立R.V.序列的大数定律
4 中心极限定理与重对数律
5 Gauss P型、Kwapien定理

6 p绝对可和算子
VI.局部理论简介
1 等周不等式与Dvoretzky定理
2 K凸性与一致包含？
3 有限维空间的几乎Euclid部分
4 弱型与弱Hilbert空间
VII.超自反空间
1 凸性模与光滑模
2 超自反空间与重赋范定理
3 p光滑空间值鞅的大数定律
4 有限树、J凸性与超幂空间
VIII.B值鞅不等式与鞅空间
1 豫备知识、若干引理
2 凸Φ函数不等式
3 鞅空间
4 鞅空间上若干算子的有界性
5 上下函数不等式与微分从属
6 Fefferman不等式与p？α的共轭
7 正规鞅的一般Φ不等式
8 加权与内插
IX.UMD空间及其应用
1 好鞅变换性质
2 ξ凸性
3 UMD空间的若干性质
4 奇异积分算子的有界性
5 经典分析与鞅论中不等式的最优系数
附录1 网与渗透
附录2 独立性与条件独立性
参考文献
索引